目　　录

第一章 赋范线性空间的基本概念

§ 1.1. 赋范线性空间的基本特性

在线性代数和微分方程的学习中，我们熟知，如果把线性齐次代数方程组的解、线性齐次微分方程的解等等视为一个元素的话，那么它们的集合和欧氏空间中的某些集合（例如较直观的二维或三维矢量所成的集合）具有某种共同的性质．而当不考虑这些具体问题本身的特点时，我们便得出了抽象的线性空间的概念．

然而，要对分析数学中的线性问题作深入的探讨，仅线性空间的概念还显得不够．例如，为了扩大收敛性的概念，在理论上和方法上进一步研究线性问题，都得对线性空间的元素按一定规则赋予相应的数值．如对每一个三维向量赋予一个数值，即向量的长度；对每一个 Lebesgue 可积函数赋予一个数值，即此函数的积分等等．这样便导出了抽象赋范线性空间的概念．

(一)

为了叙述完备起见，我们先复习一下代数学中关于线性空间的概念．

定义 1. 设 E 是某些元素的集合，$\boldsymbol{K}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 或实数域 $\boldsymbol{R}$，我们称 E 为一复的或实的线性空间，是指它满足[1]：

(i) E 构成一个“加法群”，即在 E 内定义了一种运算“+”(称“加法”)，其使得 $\forall x, y, z \in E$，必有

(1) $x+y \in E$（封闭性）；

(2) $x+y=y+x$（交换性）；

1）为简便起见，我们常用符号 $\forall$ 表示“对任意的”，$\exists$ 表示“存在”．

(3) $x+(y+z)=(x+y)+z$（结合性）；

(4) $\exists\theta\in E$，使得 $\forall x\in E$，总有 $x+\theta=x$（θ 称为"零元"）；

(5) $\forall x\in E$，$\exists -x\in E$，使得 $x+(-x)=\theta$（$-x$ 称为 x 的"逆元"）.

(ii)（复或实）数域 $\boldsymbol{K}$ 与集 E 之间定义了一种运算"·"（有时此符号可略），称为"数乘"，其使得 $\forall x\in E$，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{K}$，必有

(1) $\alpha\cdot x\in E$（封闭性）；

(2) $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$（结合性）；

(3) $1\cdot x=x$.

(iii) 上面加法与数乘运算之间具有以下关系，$\forall x,y\in E$，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{K}$ 均有

(1) $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$；

(2) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$（两种分配律）.

定义 2. 我们称 E 为复的或实的赋范线性空间，是指 E 是一复的或实的线性空间，并且，对 E 中每一元 x 按一定法则使其与一非负实数"$\|x\|$"相对应，此对应关系满足

(i) $\|x\|\geqslant 0$，且有 $\|x\|=0 \underset{(\text{等价})}{\Longleftrightarrow} x=\theta$；

(ii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$（三角不等式）；

(iii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$（绝对齐性），$\forall x,y\in E,\alpha\in\boldsymbol{K}$.

这时，我们称 $\|x\|$ 为元 x 的范数.

由上面定义，我们还可以得到下面另外两个"减弱"后的定义. 当上述对应的 $\|x\|$ 满足条件 (i)，(ii) 及条件

(iii′) $\|-x\|=\|x\|$，和 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0$，$\lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0$

时，$\|x\|$ 将称为元 x 的准范数，相应的空间称为赋准范线性空间. 而当上述 $\|x\|$ 满足条件 (ii)，(iii) 及条件

(i′) $\|x\|\geqslant 0$，和 $x=\theta\Rightarrow\|x\|=0$

时，$\|x\|$ 将称为元 x 的拟范数，相应空间称为赋拟范线性空间.

下面，用附注来介绍赋范线性空间的一些基本性质.

注 1. 对于赋范（准范）线性空间 E 中的任意两个元 x，y，当

定义数 $d(x, y) = \|x - y\|$ 时，容易验证其满足下面关于"距离"定义的三条公理：(i°) $d(x, y) \geq 0$，$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$；(ii°) $d(x, y) = d(y, x)$；(iii°) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. 从而 E 构成一个(一般拓扑学意义下的)距离空间. 特别地，由以上可知，赋范线性空间是一种特殊的距离空间，它还具有以下两个特性：(iv°) $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ (对"平移"不变)；(v°) $d(\alpha x, \theta) = |\alpha| d(x, \theta)$ (绝对齐性)，这是一般具有距离的线性空间所没有的性质.

在一般涉及"线性拓扑空间"的内容中，有所谓"线性距离空间"的概念[144]，即此距离 d 还满足上面性质 (iv°) 以及当记 $|x| = d(x, \theta)$ 时，$|\alpha x|$ 为 (α, x) 的二元连续函数. 于是，可知，赋范线性空间一定可以构成线性距离空间；但必须注意的是，反之则未必成立，也就是的确存在着不可定义范数(亦称"不可赋范")的线性距离空间(即不能使其距离关系用某一范数引出来). 例如，所有实数数列所成的空间，在其上我们可以定义距离（亦称"可距离化"）使其成为距离空间，但却是不可赋范的(然而，它是可赋"准范"的). 这些结果由于涉及到线性拓扑空间的知识，所以这里不详细论述，对此感兴趣的读者可以参阅本书后面的附录或其它有关线性拓扑空间的专著.

为了说明赋范线性空间的另一基本特性，我们先给出下面关于抽象空间中"线段"和"凸集"的定义：

定义 3. 设 E 为线性空间，x, y 为 E 中任意两个元，那么，集 $\{\lambda x + (1-\lambda) y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 就称为由 x, y 所组成的线段，记为 $[x, y]$. 类似地，当以上线段中不含 x 元或不含 y 元，或同时不含 x, y 元时，则分别称为半开半闭线段或开线段；记为 $(x, y]$，$[x, y)$ 和 (x, y).

定义 4. 线性空间 E 中的集 V 称为凸集，是指 $\forall x, y \in V$，均有 $[x, y] \subset V$.

注 2. 赋范线性空间里的"球"都是凸集.

为了简单起见，我们只讨论赋范线性空间 E 内的单位球

$$\bar{S}_1 = \bar{S}(\theta, 1) = \{x \mid \|x\| \leqslant 1, x \in E\}$$

的情况. $\forall x, y \in S_1$, 由于 $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, 故根据范数的性质立即推得, $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$, 对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leqslant \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \\ &= \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1,\end{aligned}$$

即 $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_1$. 验毕.

在注 1 中我们已知赋范空间是距离空间,有了距离,我们就可以引入"收敛"的概念.

定义 5. 设 E 为赋范线性空间, $\{x_n\} \subset E$, $x_0 \in E$, 我们称元列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$. 这种收敛,有时亦称为按范数收敛.

注 3. 在赋范线性空间中,下面的映象是连续的: (i) $(x, y) \overset{\varphi_1}{\longmapsto} x + y$ (即 $x + y$ 是二元连续函数, 也即 $x \to x_0$, $y \to y_0 \Rightarrow x + y \to x_0 + y_0$); (ii) $x \overset{\varphi_2}{\longmapsto} \|x\|$; (iii) $(\alpha, x) \overset{\varphi_3}{\longmapsto} \alpha x$ (即 αx 是 α, x 的二元连续函数).

注 4. 范数一定也是准范数、拟范数,反之未必. 下面两个反例可以说明这一点.

反例 1. 设线性空间 E 中已定义了两种范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, 我们令

$$\|x\|_* = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|_1}{1+\|x\|_1}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{\|x\|_2}{1+\|x\|_2}\right), \quad \forall x \in E.$$

那么, 我们容易验证: "$\|\cdot\|_*$" 满足前面关于范数定义中的性质 (i), (ii) 但不满足性质 (iii), 从而知它不是"范数";然而它却满足性质 (iii′), 因而知它是一个"准范数".

反例 2. 设 E 为 $[0, 1]$ 上 L-可积函数的全体,我们令

$$\|x\| = \int_0^1 |x(\xi)|\,d\xi, \quad \forall x(\xi) \in E.$$

容易验证: "$\|\cdot\|$" 满足关于范数定义中的性质 (ii), (iii). 但是当我们把 E 中的"零元"视为在 $[0, 1]$ 中"恒取零值"的函数时, $\|\cdot\|$ 就不满足范数的性质 (i), 但却是满足性质 (i′) 的,因而知它

是一个"拟范数"[不过,我们也要注意,只要在 E 中事先约定 $[0,1]$ 上"几乎处处为零"的函数为"同一个"元,则上面的"拟范"数就变为"范数"了. 这种化"拟范"为"范"的方法,即利用代数中将同余的"剩余类"视为同一元的方法,也就是"商空间"的方法(见 §1.4)是后面经常要用到的].

注5. 在注4的反例1中,我们曾假设一个线性空间定义了两种范数. 这里,说明这种假设的合理性,也即在同一个线性空间中,范数是可以有许多种方式来定义的. 事实上,我们仅用下面例子就可以说明.

例. 在二维欧氏空间 $\boldsymbol{R}_2$ 中,我们可以引入下列范数:

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$
$$\|x\|_\infty = \max(|\xi_1|, |\xi_2|); \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{R}_2.$$

在下一节,我们还可以验明:更一般地令

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p} \ (p \geqslant 1), \tag{1}$$

它就构成范数(显然,当 $p=1,2$ 时,上式即引入的范数 $\|x\|_1$, $\|x\|_2$. 而再由极限论的知识,我们知道:

$$\lim_{p\to\infty}(|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p} = \max(|\xi_1|, |\xi_2|),$$

这就是我们上面引入的范数 $\|x\|_\infty$).

下面,来看看对于每一个范数,"单位球"到底是什么,并且顺便可以知道,当 $p<1$ 时,上面的式(1)便不再成为范数了.

显然,对于 $\|x\|_\infty$ 的情形,$\|x\|_\infty \leqslant 1$ 乃是以 $(\pm1, \pm1)$ 为顶点的正方形,对于 $\|x\|_2$ 的情形,它是半径为1的圆,而在 $\|x\|_1$ 的情形乃是以 $(0,1)$,$(1,0)$,$(-1,0)$,$(0,-1)$ 为顶点的正方形(可以验明,范数 $\|x\|_p$ 对应的单位球,当 p 从 ∞ 减小到1时,"球"将从与 $\|x\|_\infty$ 对应

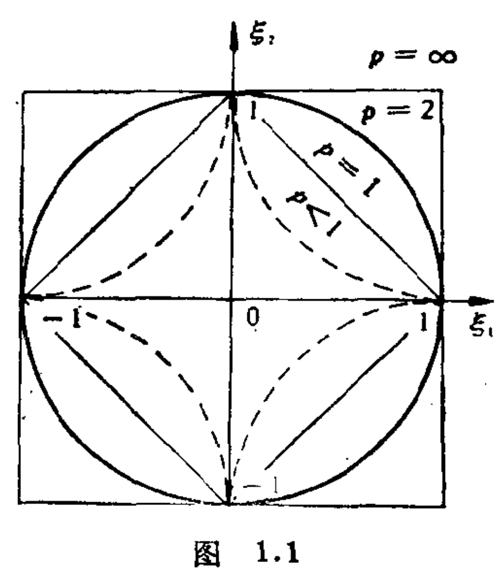


图 1.1

的正方形连续地变形到与 $\|x\|_1$ 对应的正方形)．

此外，由图 1.1，我们也可以看出，当 $p<1$ 时，如果又设 $\|x\|_p^*=|\xi_1|^p+|\xi_2|^p$，则"单位球" $\|x\|_p^*\leqslant 1$（它们仍经过 ξ_1，ξ_2 轴上的 ± 1 四个点)就不再是凸的了(例如，当 $p=\frac{2}{3}$ 时，就是数学分析中熟知的"星形线")．从而由注 2 可知它已不可能是范数了(但却是个准范数)．

（二）

下面，我们给出赋范线性空间是有穷维的特征．为此，我们先给出在代数学中见过的两个定义：

定义 6. 设 E 是一线性空间，集 $M\subset E$．如果 M 满足条件 $\forall x,\ y\in M,\ \alpha,\beta\in \boldsymbol{K}\Rightarrow \alpha x+\beta y\in M$，则 M 称为 E 的一个线性子空间(线性集)，当 $M\neq E$ 时称为 E 的真子空间；如果 E 还是距离空间，上面 M 在 E 中是闭集，那么 M 称为 E 的闭线性子空间．

注 6. 关于"开集""闭集"以及与此有关的一些定义本来是拓扑学的一般概念，但为了适应于我们目前所介绍的知识，这里及以后我们均只讲距离空间，也即满足上面注 1 中所讲述的定义 3，满足 (i°)—(iii°) 距离三公理的空间．

定义 7. 设 E 是一线性空间，称 E 中的元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关，是指存在不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得有 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots\alpha_nx_n=\theta$；否则称其为线性无关．如果 E 中有某 n 个元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关，而 E 中其它的元均可由它线性表出，则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 E 的基底，E 称为有限维的，并称 n 为 E 的维数．

注 7. 容易验证，上面关于维数的定义是确定的．也即，基底的元虽然可以变，但其个数则是确定的．

为了得到有限维赋范线性空间的特征，我们先给出两个引理：

引理 1 (Riesz 引理). 设 E 为一赋范线性空间，E_0 为其内一闭线性真子空间，那么，$\forall \varepsilon_0: 0<\varepsilon_0<1$，$\exists x_0\in E\backslash E_0$，使得

$$\|x_0\| = 1 \text{ 及 } \|x_0 - y\| \geqslant \varepsilon_0, \ \forall y \in E_0.$$

证. 由于 E_0 是 E 的真子集，故知应有一元 $x_1 \in E \backslash E_0$，并由 E_0 是闭集，故知 x_1 与 E_0 的距离是大于零的(参看图 1.2) 即有

$$d = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\| > 0.$$

于是，由下确界的定义可知，$\exists y_1 \in E_0$，使得 $d \leqslant \|x_1 - y_1\| < \dfrac{d}{\varepsilon_0}$ $\left(\text{注意 } \dfrac{d}{\varepsilon_0} > d\right)$. 这样如果取 $x_0 = \dfrac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|}$，则显然由 $\|x_0\| = 1$ 以及

$$\begin{aligned}\|x_0 - y\| &= \left\|\frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} - y\right\| \\ &= \frac{1}{\|x_1 - y_1\|} \|x_1 - (y_1 + \|x_1 - y_1\| y)\| \\ &\geqslant d \Big/ \frac{d}{\varepsilon_0} = \varepsilon_0, \ \forall y \in E_0\end{aligned}$$

可以看出 x_0 即为命题所求之元. 证毕.

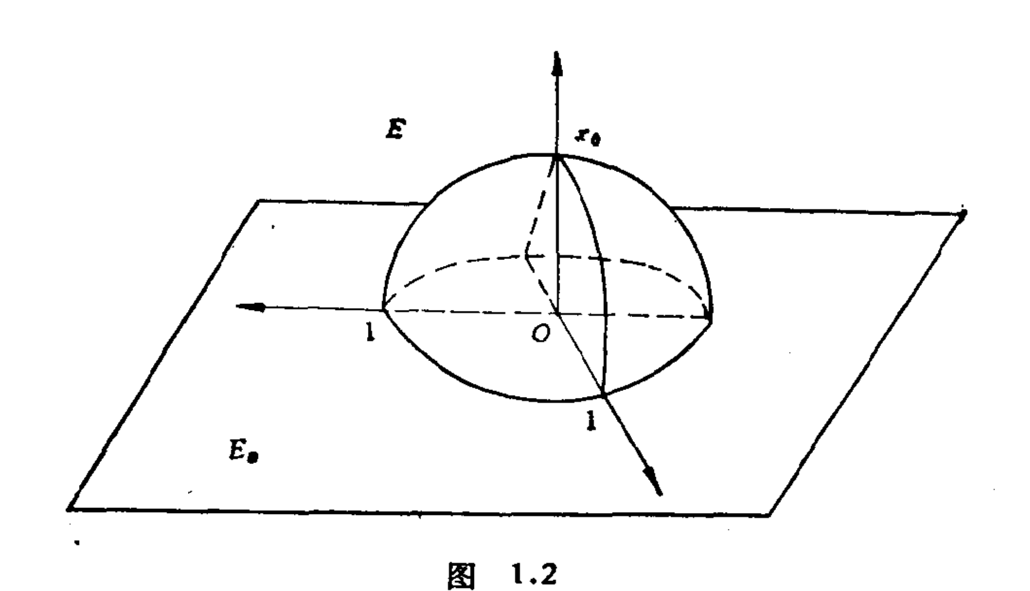


图 1.2

注 8. 引理 1 对于具有"β 级绝对齐性"$(\beta > 0)$"准范数"的赋准范空间亦是成立的. 事实上，由于该准范数还满足条件

$$\|\lambda x\|_* = |\lambda|^\beta \|x\|_*, \quad \forall x \in E, \ \lambda \in \boldsymbol{K},$$

因此，当在引理 1 的证明中将元 x_0 改为 $x_1 - y_1/\|x_1 - y_1\|^{1/\beta}$ 时，便同样可以导出该引理的结论.

注 9. 引理 1 的几何意义：如果 E_0 是 E 中的一闭线性真子空间，那么，必定在空间 E 的单位球面上存在着与 E_0 的距离“无限接近”于 1 的元．值得注意的是，虽然当 E 是有限维空间时，这个与 E_0 距离是 1 的元是肯定存在的（本节习题 5），但是，对于 E 是无穷维空间的情况，与 E_0 距离为 1 的元在单位球面上却可以不存在（参看 § 1.2 习题 15）．

引理 2. 设 E_n 为一个 n 维赋范线性空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E_n 中的一组基底，$\forall x \in E_n$，$x^0 \in E_n$．设 $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$，$x^0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 e_k$，那么，为了按范数有 $x \to x_0$，必须且只须其相应的各坐标均有 $\xi_k \to \xi_k^0 (k = 1, 2, \cdots, n)$．（这里，我们将证明留给读者．在证明时，仅需注意不等式

$$\|x\| \leqslant (\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|e_k\|) \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$$

和存在一正数 m，使得

$$m \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \leqslant \|x\|, \quad \forall x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in E_n.)$$

注 10. 引理 2 对于具有“β 级绝对齐性”($\beta > 0$) 的“准范数”的 n 维线性空间亦是正确的．并且，对于一个有限维的线性空间而言，无论在其上定义什么样的范数［或具有“β 级绝对齐性”($\beta > 0$) 的“准范数”］，该空间中元素的收敛性质是不变的．

注 11. 在赋范［或具有“β 级绝对齐性”($\beta > 0$) 的赋准范］线性空间 E 内，任意一个有限维的线性子空间一定是闭的．

下面，为了引出定理 1，我们先给出一个定义：

定义 8. 距离空间 E 中的集 F 称为紧的，是指对于 F 的任意无穷个开复盖中必定存在有限个开复盖仍然将 F 盖住；F 称为列紧的，是指 F 中任意无穷集中必有一收敛子列．如果 F 中所有收敛序列的极限仍属于 F，则 F 称为自列紧的．

注 12. 上面定义的“紧集”显然就是数学分析中“有限复盖定理”（Heine-Borel 定理）在抽象距离空间中仍保持的集；而定义的

"列紧集"是数学分析中"聚点原理"（Bolzano-Weierstrass 定理）在抽象距离空间中仍保持的集. 我们不难证明：对于一个距离空间而言，其"紧"与"自列紧"的概念是等价的. 此外，紧集一定是有界闭集(在 A_1 的拓扑空间中，"紧"比"自列紧"要求的条件要强).

有了上面定义，我们可以给出赋范线性空间是有限维的特征性命题如下：

定理 1. 设 E 为一赋范线性空间. 那么，为了使 E 是有限维的，必须且只须 E 中的单位球面. $\Sigma_1=\{x\mid\|x\|=1,\ x\in E\}$ 是自列紧集.

证. 1) "$\Longrightarrow$" 我们可以假设 E 是有限维的，因而从上面引理 2，并利用对于复(实)数而言有界闭集是自列紧集的性质，不难推得 Σ_1 中的任一元列必存在着极限仍在 Σ_1 上的收敛子列，此即 Σ_1 是自列紧集.

2) "$\Longleftarrow$" 反之，如果 Σ_1 是(自)列紧集，但 E 不是有限维的，那么，任意取一非零元 $x_1\in\Sigma_1$，利用数乘将 x_1 张成一维子空间 E_1，并由注 11 以及 E 不是有限维的假设，可知 E_1 必为 E 的一个闭的线性真子空间. 于是，我们利用上面的引理 1，对某一固定正数 $\varepsilon_0(<1)$，必定存在元 $x_2\in E\backslash E_1$，$x_2\in\Sigma_1$，使得 $\|x_2-x_1\|\geqslant\varepsilon_0>0$，然后，利用加法和数乘又将元 x_1，x_2 张成二维子空间 E_2 (x_1，x_2 无关显然可以从引理 1 结论中看出) 类似地，由引理 1，必可找出元 x_3，使得 $x_3\in E\backslash E_2$，$x_3\in\Sigma_1$，且有 $\|x_3-y\|\geqslant\varepsilon_0$，$\forall y\in E_2$. 特别地，有 $\|x_3-x_1\|\geqslant\varepsilon_0$，$\|x_3-x_2\|\geqslant\varepsilon_0$. 这样，我们用归纳法就可得到 Σ_1 上的元列 $\{x_n\}$. 其满足 $\|x_n-x_m\|\geqslant\varepsilon_0$，$\forall n,m,n\neq m$，于是 Σ_1 中的无穷集 $\{x_n\}$ 就没有收敛子列存在，此显然与 Σ_1 的列紧性假设矛盾. 证毕.

同样地，由上面两个引理我们还不难得到下面的推理：

推理. 设 E 为一赋范线性空间. 那么，若 E 是有限维的，则 E 的任意有界(闭)集均是列紧(自列紧)集；反之，只要 E 内的某一"球面" $\Sigma(x_0,\rho_0)=\{x\mid\|x-x_0\|=\rho_0,\ x\in E\}(\rho_0\neq 0)$ 是自列紧集，则 E 是有限维的.

（三）

最后，我们给出一个赋范线性空间能成为“内积空间”的充要条件．为此我们先来回忆一下“内积”的定义．

定义 9. 设 E 为一复(实)线性空间．如果对于 E 中任意两个元素 x, y (有先后次序)，均存在一个复(实)数“(x, y)”与此有序的两元相对应，并且该复数满足以下性质，$\forall x, y, z \in E$, $\alpha \in \boldsymbol{C}$ (或 $\boldsymbol{R}$)，均有

(i) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$,

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (当为实数时为 $(x, y) = (y, x)$),

(iii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,

(iv) $(x, x) \geqslant 0$ (由 (ii) 知 (x, x) 必为实数)，并且当 $x \neq 0$ 时，必有 $(x, x) > 0$.

那么，数 (x, y) 就称为 x 与 y 的**内积**．定义了内积的线性空间称为**内积空间**．

下面我们给出有关内积空间特征的一个定理：

定理 2 (Fréchet-Jordan-Von Neumann 定理). 为了线性空间 E 成为一个内积空间，必须且只须 E 是一个赋范空间，并且其中的范数“$\|\cdot\|$”满足(“平行四边形”法则，参看图 1.3) 关系

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in E.$$

证． 1) “$\Longrightarrow$” 设 E 是一个内积空间．那么只要令 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $\forall x \in E$，则知“$\|\cdot\|$”必为一个“范数”，事实上，由内积

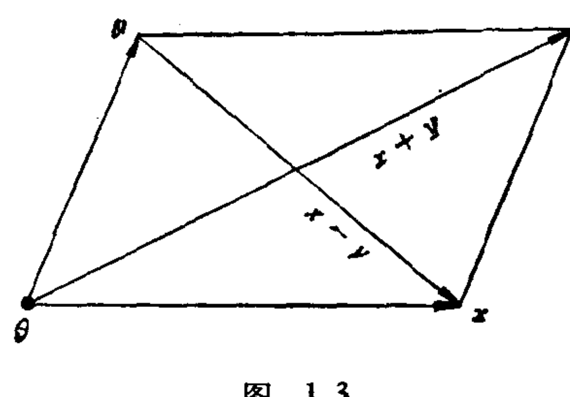


图 1.3

的性质，我们容易推出范数定义中的(i)和(iii)，下面验证，定义9也满足范数定义中的(ii)(“三角不等式”).

为此，我们先证明 $\forall x, y \in E$，均有 $|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. 事实上，由内积性质(iv)，可知，$\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$，$\forall x, y \in E$，均有

$$(x + \lambda(x, y)y,\ x + \lambda(x, y)y) \geqslant 0.$$

从而注意到内积的性质(i)—(iii)，有

$$(x, x) + \lambda(x, y)(y, x) + \overline{\lambda(x, y)}(x, y) + \lambda(x, y)\overline{\lambda(x, y)}(y, y) \geqslant 0,$$

也即有

$$(|(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2)\lambda^2 + 2|(x, y)|^2\lambda + \|x\|^2 \geqslant 0.$$

由实系数二次式的性质，知其系数判别式必有关系式

$$(2|(x, y)|^2)^2 - 4(|(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2)(\|x\|^2) \leqslant 0,$$

因此导出

$$|(x, y)|^4 \leqslant |(x, y)|^2\|x\|^2\|y\|^2.$$

也即得到不等式

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

有了上面的关系式，关于范数(ii)的关系，就容易由式

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x, y) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \quad \forall x, y \in E\end{aligned}$$

导出. 从而知 E 也是一个赋范空间，并且由上面的计算，显然可以看出

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\ &= 2(x, x) + 2(y, y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

(上面的证明，对于实线性空间的情况仍旧成立.)因而定理的必要性得证.

2) “$\Longleftarrow$” 由1)我们已知，如果 E 为一内积空间，则必有 $\sqrt{(x, x)} = \|x\|$，并由上式可看出：

$$2\mathrm{Re}\,(x, y) = \|x + y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

$$2\mathrm{Re}(x, y) = 2\mathrm{Re}(x, -y) = \|x - y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

于是有

$$4\mathrm{Re}(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

我们就按上面的方式在赋范线性空间E内来定义内积，下面分实与复空间的情况来分别证明.

i. E是实空间的情况. 由上面的讨论，我们可直接定义E中的内积

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

下面逐条验证其满足内积的定义.

事实上,由以上定义显然易见$(x, y) = (y, x)$,并由范数的性质有 $(x, x) \geqslant 0$, 由$x \neq \theta$有 $(x, x) > 0$ 成立. 从而导出了内积的性质(ii),(iv). 注意到E中范数的假设条件, $\forall x, y, z \in E$, 我们有

$$\|(x + z) + y\|^2 + \|(x + z) - y\|^2 = 2(\|x + z\|^2 + \|y\|^2),$$
$$\|(x - z) + y\|^2 + \|(x - z) - y\|^2 = 2(\|x - z\|^2 + \|y\|^2).$$

以上两式相减可得

$$\|(x + y) + z\|^2 - \|(x + y) - z\|^2 + \|(x - y) + z\|^2 - \|(x - y) - z\|^2 = 2(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2).$$

注意到内积的定义,上式为

$$(x + y, z) + (x - y, z) = 2(x, z). \tag{1}$$

特别,由于x, y, z的任意性,我们可将(1)式中的x换为$\frac{x + y}{2}$, y换为$\frac{x - y}{2}$,那么,便可得出

$$(x, z) + (y, z) = 2\left(\frac{x + y}{2}, z\right). \tag{2}$$

同样,由内积的定义有 $(\theta, z) = 0$, 故当在(1)式中再令$y = x$时,又有

$$(2x, z) = 2(x, z), \forall x, z \in E.$$

由此式与(2)式则可导出内积的性质(i):

$$(x+y, z)=2\left(\frac{x+y}{2}, z\right)=(x, z)+(y, z).$$

根据这里的内积性质 (i) 及 $(\theta, z)=0$ 的性质，还可推出，对任意整数及有理数 r，均有关系式 $(rx, z)=r(x, z)$ 成立. 最后，由范数的性质

$$\left|\|\alpha x\pm y\|-\|\alpha_0 x\pm y\|\right|\leqslant\|\alpha x-\alpha_0 x\|=|\alpha-\alpha_0|\,\|x\|,$$

可知 $\|\alpha x\pm y\|$ 对 α 是连续的，从而由数积定义可知 $(\alpha x, y)$ 对 α 亦连续. 于是，由于任意无理数均可表示为有理数列的极限，因而可以导出：对任意实数 α，均有 $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$，即 (x, y) 满足内积的性质 (iii). 也即推出 E 是实内积空间.

ii. E 是复空间的情况. 这时，我们只要注意到复数的虚部与实部的关系，$\forall\alpha\in\boldsymbol{C}$，总有 $\operatorname{Im}(\alpha)=-\operatorname{Re}(i\alpha)$. 于是，由本段充分性证明一开始的分析，同样可定义数积

$$\begin{aligned}(x, y)&=[\operatorname{Re}(x, y)-i\operatorname{Re}(ix, y)]\\&=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)\\&\quad-\frac{i}{4}(\|ix+y\|^2-\|ix-y\|^2).\end{aligned}$$

下面，我们来逐条验证其也是满足内积的条件的.

首先，由上面证明中的 i，已知 $\operatorname{Re}(x, y)$ 的"加法性"，我们可以导出这里的内积性质 (i)：

$$\begin{aligned}(x+y, z)&=\operatorname{Re}(x+y, z)-i\operatorname{Re}(i(x+y), z)\\&=\operatorname{Re}(x, z)+\operatorname{Re}(y, z)-i[\operatorname{Re}(ix, z)+\operatorname{Re}(iy, z)]\\&=[\operatorname{Re}(x, z)-i\operatorname{Re}(ix, z)+[\operatorname{Re}(y, z)-i\operatorname{Re}(iy, z)]\\&=(x, z)+(y, z).\end{aligned}$$

其次，同样由上面的证明 i，已知 $\operatorname{Re}(x, y)=\operatorname{Re}(y, x)$ 以及

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(ix, y)&=\frac{1}{4}(\|ix+y\|^2-\|ix-y\|^2)\\&=\frac{1}{4}(\|x-iy\|^2-\|x+iy\|^2)=-\operatorname{Re}(x, iy),\end{aligned}$$

可以导出内积的性质 (ii)：

$$(x,y)=\text{Re}(x,y)-i\,\text{Re}(ix,y)=\text{Re}(x,y)+i\,\text{Re}(x,iy)$$
$$=\text{Re}(y,x)+i\,\text{Re}(iy,x)$$
$$=\overline{\text{Re}(y,x)-i\,\text{Re}(iy,x)}=\overline{(y,x)}.$$

其三,由上面的证明 i, 已知 $\text{Re}(x,y)$ 是"实齐性"的,因此为验证内积性质 (iii) 只要证得 $(ix,y)=i(x,y)$ 就可以了. 事实上,由定义及 $\text{Re}(x,y)$ 的实齐性容易导出

$$(ix,y)=\text{Re}(ix,y)-i\,\text{Re}(i(ix),y)$$
$$=\text{Re}(ix,y)-i\,\text{Re}(-x,y)$$
$$=\text{Re}(ix,y)+i\,\text{Re}(x,y)$$
$$=i[\text{Re}(x,y)-i\,\text{Re}(ix,y)]=i(x,y).$$

最后,由上面内积性质 (ii) 可知 $(x,x)=\overline{(x,x)}$, 从而还知道 (x,x) 是实数,故由定义有

$$(x,x)=\text{Re}(x,x)=\|x\|^2.$$

因而可以导出内积性质 (iv), 也即推出 E 为复内积空间, 从而得出定理的充分性. 证毕.

注 13. 如上图所示,当将 x,y 元视为二维空间的向量时,它即是说"平行四边形两对角线长度的平方和等于其四边长度的平方和", 我们就把定理 2 中范数所要求的条件称为"平行四边形原理". 该定理表明: 对于一个具有内积的线性空间来说,其二维子空间的这一条初等几何性质确定了整个空间存在"内积"的特征.

注 14. 定理 2 还表明: 当一个赋范线性空间的范数满足"平行四边形法则"时, 空间可以在保持其范数的情况下定义内积, 并且由此内积可以导出原来的范数.

注 15. 从定理 2 也可知, 一个内积空间, 当定义范数为 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, $\forall x\in E$ 时,它就构成了一个线性赋范空间. 但反过来,却并不是所有的赋范线性空间都可以变为内积空间的.下面举一个例子来说明.

例. 在二维欧氏空间 $\boldsymbol{R}_2$ 中,如果定义

$$\|x\|_p=\sqrt[p]{|\xi_1|^p+|\xi_2|^p}\quad(p\geqslant 1),$$

则在此赋范线性空间中，除了 $p=2$ 的情况外，均没有"内积".

验. 由前面的注5，我们已知当 $p \geqslant 1$ 时 $\|x\|_p$ 是一个范数，并且当 $p=2$ 时，不难直接验证范 $\|\cdot\|_2$ 是满足"平行四边形法则"的，因而由定理2知其可定义"内积"而成为内积空间.

当 $p \neq 2$ 时，如果空间可定义内积，使得 $(x, x)=\|x\|^2$, $\forall x \in E$，那么，对任意元 $x=(\xi_1, \xi_2)$，$y=(\eta_1, \eta_2)$，则均应有

$$
\begin{aligned}
&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 \\
&\quad = \left(\sqrt[p]{|\xi_1+\eta_1|^p+|\xi_2+\eta_2|^p}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\sqrt[p]{|\xi_1-\eta_1|^p+|\xi_2-\eta_2|^p}\right)^2 \\
&\quad = 2\left[\left(\sqrt[p]{|\xi_1|^p+|\xi_2|^p}\right)^2+\left(\sqrt[p]{|\eta_1|^p+|\eta_2|^p}\right)^2\right] \\
&\quad = 2(\|x\|^2+\|y\|^2).
\end{aligned}
$$

特别，当我们取 $x=e_1=(1, 0)$，$y=e_2=(0, 1)$ 时，由上式则应有 $2(\sqrt[p]{2})^2=4$，即 $2^{2/p}=2$. 然而当 $p \neq 2$ 时，该式显然是不成立的. 验毕.

习　　题

1. 设 V 是赋范线性空间 E 内的凸集，$d=\inf\limits_{x \in V}\|x\|$，并设其内元列 $\{x_n\} \subset V$，满足 $\|x_n\| \to d\,(n \to \infty)$. 试证明:

(i) $\left\|\dfrac{x_n+x_m}{2}\right\| \to d \quad (n, m \to \infty)$;

(ii) 当 $d \neq 0$ 时，如果设 $\bar{x}_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$，则有

$$\left\|\frac{\bar{x}_n+\bar{x}_m}{2}\right\| \to 1 \quad (n, m \to \infty);$$

(iii) 当 $d=0$ 时，(ii) 的结论未必成立(举例说明).

2. 设 (l^2) 表示所有使 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2<\infty$ 的复数列 $x=\{\xi_k\}$ 的全体所组成的空间，并且定义

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{1/2}.$$

试证明: (l^2) 构成以 $\|x\|$ 为范数的一赋范线性空间.

3. 试在上 (l^2) 空间中找出一线性集 L，使它不构成 E 的闭子空间，从而

说明无穷维空间与有穷维空间的一个不同的性质.

4. 以 (l^2) 为例,试说明在无穷维空间中,有界集未必是列紧的.

5. 试证明: 当 E 为"有限维"赋范线性空间时, 那么, 只要 E_0 为 E 的一(闭)真子空间,在 E 的单位球上必有一元 x_0 存在,使得

$$d = \inf_{y \in E_0} \|x_0 - y\| = 1.$$

6. 试证明本节的注 9 和注 10.

7. 试证明: 任何两个有限维空间,只要它们维数相同,则必"线性同胚". (两线性空间 E_1, E_2 称为**线性同构**, 是指在 E_1 与 E_2 之间存在一一对应的映象 φ, 使得

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \quad \forall x, y \in E_1,$$
$$\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}\ (\text{或}\ \boldsymbol{R}).$$

当 E_1, E_2 为距离空间时, 如果 φ 还满足 φ 和 φ^{-1} 均连续映象, 则空间 E_1, E_2 称为线性同胚.)

8. 试证明定理 1 对于具有"β 级绝对齐性"($\beta > 0$) 的赋准范线性空间也是成立的.

9. 试证明: 在距离空间中[1], "紧"与"自列紧"的概念是等价的. [提示: 首先证明当 F 是列紧集时, $\forall \varepsilon > 0$, 必存在由"有限元"组成的集 M_ε, 使得 $\forall x \in F$, $\exists x_\varepsilon \in M_\varepsilon$, 满足 $d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$. ($M_\varepsilon$ 称为 F 的 ε-网).]

10. 试证明: 距离空间中的紧集一定是有界的闭集.

11. 试证明: 紧距离空间上的连续函数一定可以取到最大值和最小值.

§1.2. Banach 空间的定义及例

首先,我们给出下面定义:

定义 1. 距离空间中的元列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 列,是指 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ (自然数),只要 $n, m > N$, 就有距离 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ 成立; 如果该空间中任意 Cauchy 列均有极限存在(属于空间),那么,这个空间就称为**完备的**.

定义 2. 赋范线性空间 E 称为 Banach **空间**(或简记为 (B)-

---

1) 此处及以后,凡不另外说明时,"距离空间"均指一般拓扑意义下的距离空间.

空间)，是指它按距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 是完备的.

注 1. 与定义 2 相应的完备的赋"准范"线性空间称为 Fréchet 空间(或简记为 (F)-空间)，完备的"内积"空间称为 Hilbert 空间，(或简记为 (H)-空间).

下面，我们举几个常用的 (B)-空间的例子.

例 1. n 维复欧氏空间 $\boldsymbol{C}^n$ 作为通常意义上的线性空间是一个 (B)-空间，其中元素 x 为 n 维复数组，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，而其范数为 $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2}$，$\forall x \in \boldsymbol{C}^n$.

请读者自己验证.

其实，我们有下面更一般的结果：

例 1′. 任意有限维的赋范线性空间均是 (B)-空间.

验. 设 E_n 是 n 维赋范线性空间，$\{x_k\} \subset E_n$ 是 E_n 中 Cauchy 列，那么，由

$$\|x_k\| \leqslant \|x_k - x_{m_0}\| + \|x_{m_0}\|, \quad \forall x_k, x_{m_0} \in E_n,$$

容易看出$\{x_k\}$为有界集，因而，利用 § 1.1 定理 1 的推理，则知 $\{x_k\}$ 是列紧集，即有一子列 $\{x_{k_i}\} \subset \{x_k\}$，使得 $x_{k_i} \to x_0 (i \to \infty)$，$x_0 \in E_n$. 由此关系式以及 Cauchy 列的假设，易得出 $x_k \to x_0$，$(k \to \infty)$. 验毕.

上面的例 1 可以推广为下面无穷维空间的情况，为了讲述它，必须先引出三个有关不等式的重要引理，它们在数学的许多领域内都是经常要用到的.

引理 1. 若设 $p > 1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则 $\forall A, B \geqslant 0$，必有 $AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$.

证. 上面不等式的证法有许多，由于它的重要性，下面我们列出三种证明方法(并且我们不妨均设 $A, B > 0$)：

1) *定积分方法* 由图 1.4 易见，比较该两块图形面积 S_1, S_2 我们可以得出：$A \cdot B \leqslant S_1 + S_2$. 但注意到

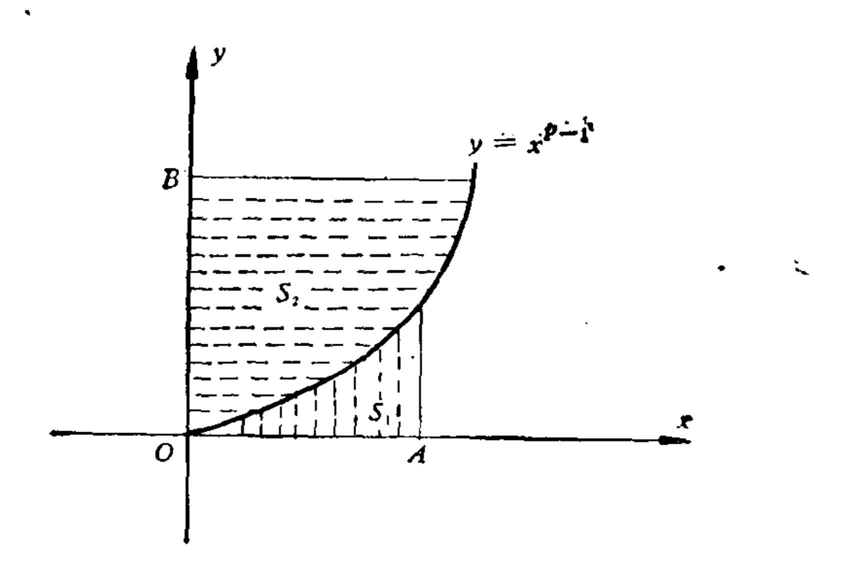


图 1.4

$$S_1=\int_0^A x^{p-1}dx=\frac{A^p}{p},$$

$$S_2=\int_0^B y^{\frac{1}{p-1}}dy=\frac{B^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}}=\frac{B^q}{q}\quad\left(因为\ \frac{p}{p-1}=q\right),$$

故证得结论.

2) 微分法　此时我们只要考虑到函数

$$f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x,$$

当 $x\geqslant 0$ 时在 $x=1$ 取到最小值，从而在不等式 $f(x)\geqslant f(1)$ 中令 $x=\frac{A\cdot B}{B^q}$ 并注意 $p+q=p\cdot q$ 则可导出.

3) 代数法　注意到一个代数不等式：当 $y\geqslant 1, 0\leqslant m\leqslant 1$ 时，$y^m-1\leqslant m(y-1)$. 然后不妨令 $y=\frac{B_1}{A_1}\geqslant 1$，如 $q\geqslant 1$ 又令 $m=\frac{1}{q}$，代入上式，且同乘 $A_1>0$；最后再令 $A_1=A^p$, $B_1=B^q$ 则得. 证毕.

引理 2 (Hölder 不等式). 设数 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

(i) 级数形式　对于任意的复数列 $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ 恒有不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

成立(假设后两级数均是收敛的).

(ii) 积分形式　对于区间 $[a, b]$ 上的任意复值“p 幂绝对可和”函数 $x(t)$ 和“q 幂绝对可和”函数 $y(t)$，恒有下列不等式成立：

$$\int_a^b |x(t), y(t)|\, dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|\, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证. 这是容易的，为了得到 (i)，我们只要在引理 1 中，令

$$A = \frac{|\xi_k|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad B = \frac{|\eta_k|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

(这里我们约定两式中分母都不是 0，否则 (i) 的结论是显然的)，则有

$$\frac{|\xi_k|\,|\eta_k|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{|\xi_k|^p}{p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \frac{|\eta_k|^q}{q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

对于上述 k 求和，再简化则可得到结论.

同样，为了得到 (ii)，我们只要令

$$A = \frac{|x(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad B = \frac{|y(t)|}{\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}$$

(这里，我们也约定上两分式中分母都不是 0，否则 (ii) 的结论同样是显然的)，则有

$$\frac{|x(t)|\,|y(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leqslant \frac{|x(t)|^p}{p\cdot\int_a^b |x(t)|^p dt} + \frac{|y(t)|^q}{q\cdot\int_a^b |y(t)|^q dt}.$$

由于上面的不等式右端乃可和函数，根据实变函数可知左端亦是可和函数. 将上式两边积分可得

$$\frac{\int_a^b |x(t)||y(t)|dt}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

即有

$$\int_a^b |x(t)||y(t)|dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

此即导出 (ii) 的结论. 证毕.

注 2. 上面当 $p=q=2$ 时, (i), (ii) 即变为通常熟知的 Cauchy 不等式和 Schwarz 不等式.

引理 3 (Minkowski 不等式). 设数 $p\geqslant 1$, 则

(i) 级数形式　对于复数列 $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$, 恒有下不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立(假设后两级数是收敛的).

(ii) 积分形式　对于区间 $[a, b]$ 上的任意两复值“p 幂绝对可和”函数 $x(t)$, $y(t)$, 恒有下列不等式成立:

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证. 当 $p=1$ 时, 由绝对值的三角不等式关系显然可知, 以上结论是正确的. 下面, 再对 $p>1$ 来进行讨论.

1) 首先我们知道, 如果 $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 是收敛的, 那么 $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p$ 必收敛. 而由 $(p-1)q=p$, 故知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(|\xi_k|^{p-1})^q$

收敛，当然亦有 $\left[\sum_{k=1}^{\infty}(|\xi_k|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}$ 收敛，这样，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\xi_k|$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}\cdot|\eta_k|,$$

故当分别对后两式应用引理 2 (i) 的结果时，可得到

(上式)

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\quad\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

将上面的不等式两端除以 $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ (这里，我们假设其不为 0，否则 (i) 的结论是显然的)，并注意到 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，可得到所需的结论.

2) 完全与上面类似，先说明 $z(t)$ 是 p 幂绝对可和函数，那么，$|z(t)|^{p-1}$ 就是 q 幂可和函数，然后对积分 $\int_a^b|x(t)+y(t)|^p dt$ 做上面类似的讨论(相应利用到引理 2 (ii) 的结果)就可推得. 证毕.

有了上面的引理 2，就可以得到例 1 的一个一般化的 (B)-空间的例子.

例 2. 设 $(l^p)(p\geqslant 1)$ 表示使 $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty$ 的复数列 $x=\{\xi_k\}$ 的全体所构成的空间，若按普通数列意义定义加法和数乘，并且定义范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad\forall x=\{\xi_k\}\in(l^p),$$

则它构成 (B)-空间.

验. 由正项级数性质可知，上面定义的 $\|x\|$ 是满足范 (i) 和范 (iii) 性的，而范 (ii) 性(即“三角不等式”)却可直接由上面引理 3 中 (i) 的结果得到，故知 $\|x\|$ 的确为一范数.

再由范 (ii) 及范 (iii)（“绝对齐次”)性我们还可知道，在 (l^p) 内加法运算和数乘运算也是“封闭的”，且易验证它们使 (l^p) 构成一线性空间，因而 (l^p) 乃是一赋范线性空间，下面证明 (l^p) 的完备性.

如果设元列 $\{x_n\}\subset\{l^p\}$ (其中，$x_n=\{\xi_k^{(n)}\}, n=1,2,\cdots$) 是 Cauchy 列，即有

$$\|x_i-x_j\|\to 0\quad (i,j\to\infty),$$

那么，$\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ (自然数)，只要 $i,j>N$，就有

$$\|x_i-x_j\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(i)}-\xi_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \tag{1}$$

成立. 于是，对于每个“下标” k，一致地有

$$|\xi_k^{(i)}-\xi_k^{(j)}|<\varepsilon.$$

从而由数列的 Cauchy 判别法可知，对于每一下标 k，相应数列 $\{\xi_k^{(i)}\}$ 均有极限 ξ_k^0，即

$$\lim_{i\to\infty}\xi_k^{(i)}\underset{(一致)}{=}\xi_k^0\quad (k=1,2,\cdots). \tag{2}$$

这样，由 (1) 式可知，对于任意的自然数 n，均有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(i)}-\xi_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon\quad (\forall\, i,j>N).$$

故对以上有限项，取 $j\to\infty$ 的极限，由 (2) 式可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(i)}-\xi_k^0|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon\quad (\forall i>N).$$

再对上取 $n\to\infty$ 的极限，便可导出

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(i)}-\xi_k^0|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon\quad (\forall i>N). \tag{3}$$

最后，若设 $x_0=\{\xi_k^0\}$，则 (3) 式表明 $(x_i-x_0)\in(l^p)$，但由

$x_i \in (l^p)$ 且因 (l^p) 乃一线性空间，故知 $x_0 = [x_i - (x_i - x_0)] \in (l^p)$. 而且同样由 (3) 式，它还表明 $\|x_i - x_0\| \to 0 (i \to \infty)$. 验毕.

例 3. 设 $L^p[a, b] (p \geqslant 1)$ 是区间 $[a, b]$ 上"p 幂绝对可和"复值函数全体所构成的空间，若按普通法定义加法和数乘，并把"对等"(概相等)的元均视为同一元，定义范数为

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x = x(t) \in L^p[a, b],$$

则它构成一个 (B)-空间.

验. $\|x\|$ 满足范 (i)，范 (iii) 性质是显然的，而由本节引理 3 (ii) 的结果可知，它亦满足范 (ii) 性质，因而其确为一范数，并且由此还可知 L^p 乃是一赋范线性空间. 下面证明 $L^p[a, b]$ 的完备性.

设元列 $\{x_n\} \subset L^p[a, b]$ 满足

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

故 $\forall k$ (正整数)，$\exists n_k$ (正整数)，只要 $n, m \geqslant n_k$ 就有

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨取 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，于是，我们可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

令

$$y_m(t) = |x_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{m} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|,$$

显然有 $y_m(t) \in L^p[a, b] (m = 1, 2, \cdots)$. 从而由范数的"三角不等式"可知

$$\begin{aligned} \|y_m\| &\leqslant \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{m} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \\ &\leqslant \|x_{n_1}\| + 1 \quad (m = 1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

又因 $y_m^p(t) \geqslant 0 (m = 1, 2, \cdots)$ 均是可测的，故由 Fatou 引理，可以导出

$$\int_a^b \varliminf_{m\to\infty} (y_m(t))^p dt \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int_a^b (y_m(t))^p dt$$
$$= \varliminf_{m\to\infty} \|y_m\|^p \leqslant (\|x_n\| + 1)^p.$$

但由 $\{y_m(t)\}$ 是单增函数列．故知 $\lim_{m\to\infty} y_m(t)$ 总存在（有限或者 ∞），从而有

$$\int_a^b [\lim_{m\to\infty} y_m(t)]^p dt \leqslant (\|x_{n_1}\| + 1)^p.$$

由此可导出 $\lim_{m\to\infty} y_m(t) < \infty$ （概），即

$$|x_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|$$

是概收敛的，由此推出

$$x_{n_{m+1}}(t) = x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{m} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$$

也是概收敛的．也即存在一个概有穷的极限函数 $x_\infty(t)$，使得

$$x_\infty(t) = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}(t), \quad (\text{概})\, t \in [a, b].$$

再由

$$|x_\infty(t)| \leqslant |x_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|$$
$$= \lim_{m\to\infty} y_m(t) \in L^p[a, b]$$

及 $x_\infty(t)$ 亦可测函数，故知 $x_\infty \in L^p[a, b]$．且由

$$\|x_\infty - x_{n_m}\| \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|,$$

而后端乃一收敛级数之余项，故有

$$x_{n_m} \xrightarrow{(\text{按范})} x_\infty \quad (m \to \infty).$$

注意到 $\{x_{n_m}\} \subset \{x_n\}$，而后者为一 Cauchy 列，故直接由不等式

$$\|x_\infty - x_n\| \leqslant \|x_\infty - x_{n_m}\| + \|x_{n_m} - x_n\|,$$

可以推得

$$\|x_\infty - x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

验毕．

注 3. 由上面例 3 的证明中可以看出，对于任意数 $p \geqslant 1$ 的"p 幂平均收敛"的元列而言，必定存在其一子列，使其"概收敛"于同一极限函数.

例 4. 设 $C(\Omega)$ 表示紧距离空间 Ω 上一切复值"连续函数"全体所组成的线性空间，其中加法与数乘按通常的意义来定义，且范数定义为

$$\|x\| = \max_{t \in \Omega} |x(t)|, \quad \forall x = x(t) \in C(\Omega).$$

那么，它构成一个 (B)-空间.

验. 首先，由于我们熟知在紧空间上连续函数是能达到最大值的(参看 § 1.1 习题 11)，故 $\forall x \in C(\Omega)$，$\|x\|$ 是有意义的，并且容易证明它满足范数性质 (i)—(iii)，从而知它构成一赋范线性空间.

至于完备性也是极明显的，因为在上述范数定义下，距离为

$$d(x, y) = \|x - y\| = \max_{t \in \Omega} |x(t) - y(t)|,$$

因而其按"范数收敛"，也就是"一致收敛". 而由于连续函数列的一致收敛极限仍是连续的. 此即导出结论. 验毕.

从上例，我们可以得到下面两个特例，而它们却是常用的.

首先，由于实轴上的任意有界闭区间乃是一个紧距离空间，故由上例可以直接推出下面的结论.

例 4′. 设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上一切复值连续函数全体所组成的线性空间，加法、数乘、范数同上例一样定义，那么，它构成一个 (B)-空间.

例 4″. 设 (c) 表示复数域 K 中所有"收敛数列"全体所组成的线性空间，其中加法、数乘与通常数列运算相同，且定义范数为

$$\|x\| = \max_{n} |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c),$$

则它构成一个 (B)-空间.

验. 这个结论直接验证也并不困难，但它却仍可利用上面例 4 的结论推出，因为这时，如果把 Ω 视为数直线中的子空间

$\left(0,\ 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$，且对于任意数列$\{\xi_n\} \in (c)$(其中设 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$)，令

$$x\left(\frac{1}{n}\right) = \xi_n \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad x(0) = \xi_0,$$

那么 $x \in C(\Omega)$. 事实上，因为当 $\frac{1}{n} \to 0$ 时，有

$$x\left(\frac{1}{n}\right) = \xi_n \to \xi_0 = x(0),$$

即 x 是定义在空间 $\Omega = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ 上的连续函数，而Ω此时乃"紧"距离空间（因 0 为Ω中唯一的一个极限点，故关于Ω的任意无穷开复盖中，复盖住 0 点的开集之外面仅余有限个Ω的点，故知Ω亦被有穷个开复盖所盖住)，因而不难导出(c)亦为一个(B)-空间.

例 5. 设 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是测度空间 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上一切"概有界"的复值可测函数所组成的线性空间，加法和数乘如常，"对等"的函数看作相同，并设范数定义为

$$\|x\| = \inf_{E_0}\{\sup_{t \in \Omega \setminus E_0} |x(t)|,\ \mu(E_0) = 0\},$$

$$\forall x = x(t) \in M(\Omega, \mathscr{B}, \mu),$$

则它构成一个(B)-空间.

（注 4. 这里及以后，我们均约定 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 为"σ-有限"的测度空间，对于没有学过测度空间的读者来说，那时只要将Ω理解为实轴上任何有限或无穷区间，按照实变函数论定义的(L)测度来讨论，那么，一切内容都是可以看懂的)

验. 我们分两步来验明:

1) $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 构成一赋范线性空间.

为说明此，只要验证上面定义的 $\|x\|$ 的确定义了一个范数.

i. $\|x\| \geqslant 0$ 是明显的. 此外若 $\|x\| = 0$，则此表示对每个数 $\varepsilon_n > 0$（我们特别取 $n \to \infty$ 时有 $\varepsilon_n \to 0$)，存在集 E_n，使得 $\mu(E_n) = 0$，且有

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_n}|x(t)|<\varepsilon_n\ (n=1,2,\cdots).$$

即对于一切的 $t\in\Omega\setminus E_n$，均有 $|x(t)|<\varepsilon_n(n=1,2,\cdots)$，于是，$\forall t\in\Omega$，只要满足

$$t\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\Omega\setminus E_n\}=\Omega\Big\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

则有 $|x(t)|<\varepsilon_n$，$\forall n$ 成立．故当取 $n\to\infty$ 的极限时，注意到 $\{\varepsilon_n\}$的假设,我们则可导出,在集 $\Omega\Big\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 上,恒有 $x(t)=0$ 成立．再注意到 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$，便可推出在 Ω 上有 $x(t)=0$（概）．即 $x=\theta$（因在 $M(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 内"概相等"是看作"相等"的）；

ii. 证明"三角不等式"成立．设 x、$y\in M(\Omega,\mathscr{B},\mu)$，则 $\forall t\in\Omega\setminus E$，$\mu(E)=0$ 均有

$$\begin{aligned}|x(t)+y(t)|&\leqslant|x(t)|+|y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in\Omega\setminus E}|x(t)|+\sup_{t\in\Omega\setminus E}|y(t)|,\end{aligned}$$

因此推得

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E}|x(t)+y(t)|\leqslant\sup_{t\in\Omega\setminus E}|x(t)|+\sup_{t\in\Omega\setminus E}|y(t)|,$$

此外，$\forall\varepsilon_0>0$，由"$\|\cdot\|$"的定义可以找到两个集 E_0，$\tilde{E}_0$，使得 $\mu(E_0)=\mu(\tilde{E}_0)=0$，且有

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x(t)|\leqslant\|x\|+\frac{\varepsilon_0}{2},\quad\sup_{t\in\Omega\setminus\tilde{E}_0}|y(t)|\leqslant\|y\|+\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

两式相加得

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x(t)|+\sup_{t\in\Omega\setminus\tilde{E}_0}|y(t)|\leqslant\|x\|+\|y\|+\varepsilon_0.$$

另一方面，由于

$$\sup_{t\in\Omega\setminus(E_0\cup\tilde{E}_0)}|x(t)|\leqslant\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x(t)|,\quad\sup_{t\in\Omega\setminus(E_0\cup\tilde{E}_0)}|y(t)|\leqslant\sup_{t\in\Omega\setminus\tilde{E}_0}|y(t)|,$$

且注意到 $\mu(E_0\cup\tilde{E}_0)=0$，因而我们导得

$$\begin{aligned}\|x+y\|&\leqslant\sup_{t\in\Omega\setminus(E_0\cup\tilde{E}_0)}|x(t)+y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x(t)|+\sup_{t\in\Omega\setminus\tilde{E}_0}|y(t)|\leqslant\|x\|+\|y\|+\varepsilon_0,\end{aligned}$$

最后由 ε_0 的任意性，导出"三角不等式" $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

成立.

iii. 性质 $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ 是显然的. 综合上面的结果，我们验得 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 确实为一赋范线性空间.

2) $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是一完备空间. 事实上，当我们设元列 $\{x_n\} \subset M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，且有

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

时. 那么，$\forall k$ (自然数)，$\exists N_k$ (自然数)，使得只要 $n, m \geqslant N_k$ 时，就有

$$\|x_n - x_m\| = \inf_{E_0} \{ \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} |x_m(t) - x_n(t)|, \ \mu(E_0) = 0\} < \frac{1}{k},$$

于是，由下确界性质可找到一集 E_k，$\mu(E_k) = 0$，使得，

$$\sup_{t \in \Omega \setminus E_k} |x_m(t) - x_n(t)| < \frac{1}{k}, \ \forall n, m \geqslant N_k, \tag{4}$$

这样，$\forall t \in \bigcap_k \{\Omega \setminus E_k\} = \Omega \Big\backslash \bigcup_k E_k$，关系式

$$|x_m(t) - x_n(t)| \to 0 \ (n, m \to \infty)$$

"一致地"成立. 但注意到 $\mu\left(\bigcup_k E_k\right) = 0$，故知存在一可测函数 $x(t)$，使得一致地有

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t) \quad (\text{概}) \ t \in \Omega.$$

根据式 (4)，当令 $m \to \infty$ 时，可导出

$$\sup_{t \in \Omega / \bigcup_k E_k} |x_n(t) - x_0(t)| \leqslant \frac{1}{k}, \quad \forall n \geqslant N_k. \tag{5}$$

而由 $\mu\left(\bigcup_k E_k\right) = 0$，知当 $n > N_k$ 时，有 $x_n - x_0 \in M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，再由 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 乃是线性空间，$\{x_n\} \subset M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，因而推得 $x_0 \in M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，且再注意到 (5) 式，可推得

$$\inf_{E_0} \{ \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} |x_n(t) - x_0(t)|, \mu(E_0) = 0\} \leqslant \frac{1}{k}, \quad \forall n \geqslant N_k$$

成立，即当 $n \geqslant N_k$ 时，均有 $\|x_n - x_0\| \leqslant \frac{1}{k}$，此即导出 $\|x_n - x_0\| \to 0 (n \to \infty)$. 验毕.

注 5. 以上空间 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 所定义的范数收敛的实质是"概一致收敛",并且,从空间 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 的定义我们容易看出,该空间内上述定义的范数与范数的定义

$$\|x\| = \inf\{\alpha \mid \mu(\{t \mid |x(t)| > \alpha,\ t \in \Omega\}) = 0\}$$

是等价的. 常简记为 $\|x\| = \mathrm{Vrai}\max\limits_{t\in\Omega}|x(t)|$ (称为"真极大").

注 6. 当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时,不难看出,当元 $x \in M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 时必然也有 $x \in L^p(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$, $\forall p \geqslant 1$ (后者表示测度空间 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上可测且"p 幂绝对可和"的复值函数的全体),并且还有

$$\lim_{p\to\infty}\left[\int_\Omega |x(t)|^p \mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}} = \mathrm{Vrai}\max_{t\in\Omega}|x(t)|,$$

$$\forall x = x(t) \in M(\Omega, \mathscr{B}, \mu).$$

因此,当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时,我们也常把空间 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 记为 $L^\infty(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$.

从例 5 我们也可以得到两个常用的特例.

例 5′. 设 $M[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上一切"概"有界的复值可测函数所组成线性空间,加法,数乘与上例类似定义("概"相等视为同一元),那么它构成一个(B)-空间.

例 5″. 设 (m) 表示复数域 $\mathbf{C}$ 中所有"有界数列" $x = \{\xi_n\}$ 所组成的线性空间,若加法、数乘如常定义,且定义范数

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (m),$$

则它构成一个 (B)-空间.

验. 事实上,这就是例 5 的特例,在这里空间 $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$,且令 $\mu(n) = 1$, $x(n) = \xi_n (n = 1, 2, \cdots)$,由此不难直接推出结论. 验毕.

注 7. 类似地,我们对于数列空间可以得到下面的结果:如果 $\{\xi_k\} \in (l^p)(\forall p \geqslant 1)$,那么,必有关系式

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{k\geqslant 1}|\xi_k|.$$

因而，我们也常把有界数列空间 (m) 表示为 (l^∞).

为了验证上面的结论，首先，我们证明，$\forall\{\xi_k\}\subset(l^{p_1})$，均有

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}},\quad \forall p_1,p_2;\ p_2\geqslant p_1\geqslant 1. \tag{6}$$

事实上，由于极限关系，我们仅对任意 n 项部分和来验证，然后用归纳法证明：对于任两复数 ξ_1，ξ_2，均有

$$(|\xi_1|^{p_2}+|\xi_2|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}}\leqslant(|\xi_1|^{p_1}+|\xi_2|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}},\quad \forall p_2\geqslant p_1\geqslant 1.$$

为此，我们先令 $\alpha=\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_1|}\right)^{p_1}$（这里不妨设 $\xi_1\neq 0$，否则上式显然成立），$\lambda=\frac{p_2}{p_1}$，上述问题则变为证明

$$(1+\alpha^\lambda)\leqslant(1+\alpha)^\lambda,\quad \forall\alpha\geqslant 0,\ \lambda\geqslant 1.$$

但是，此后一不等式显然容易由“微分法”导出，因而式(6)也就不难得到.

下面，我们利用(6)验证注7的结论. 事实上，$\forall\varepsilon>0$，$p_0\geqslant 1$，由设 $\{\xi_k\}\in(l^{p_0})$ 可知，$\exists N_0$（自然数），使对任意的 $n\geqslant N_0$，均有 $\left(\sum_{k>n}|\xi_k|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}<\varepsilon$. 因而，当 $p>p_0$ 时，由式(6)，我们导出

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k>n}|\xi_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k>n}|\xi_k|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon.\end{aligned}$$

故由极限论理论可知

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^{p}}\leqslant\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{p}}+\varepsilon=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|+\varepsilon,$$

注意到 n 的任意性，可导出

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p}\leqslant\sup_{k\geqslant1}|\xi_k|+\varepsilon.$$

另一方面，对上述正数 ε，由上确界性质，必有自然数 k_0，使得

$$|\xi_{k_0}|\geqslant\sup_{k\geqslant1}|\xi_k|-\varepsilon.$$

因而有

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p}\geqslant\sqrt[p]{|\xi_{k_0}|^p}=\xi_{k_0}\geqslant\sup_{k\geqslant1}|\xi_k|-\varepsilon.$$

综合以上结果并注意到正数 ε 的任意性，我们还可导出

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p}=\sup_{k\geqslant1}|\xi_k|.$$

这就导出了注 7 的结论.

注 8. 由上面的注 6 及注 7 我们不难看出. 本节重要的 Hölder 不等式，在约定 $p=1, q=\infty$ 的条件下，当 $p=1$ 时，对于“数列”的情况；当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时，对于“函数”的情况，其相应的关系式也是成立的. 这个结论我们以后是常要用到的.

下面，对于记号 $(l^\infty)=(m)$ 及当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时 $L^\infty(\Omega, \mathscr{B}, \mu)=M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，我们还需注意注 9 所述的情况.

注 9. $\lim\limits_{p\to\infty}(l^p)\subsetneqq(m)$；$M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)\subsetneqq\lim\limits_{p\to\infty}L^p(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时.（这里，上面的极限，系集合论中（单调）集族的“极限集”的意思.）

事实上，在“线性同构”的意义下我们不难看出，当 $p_2\geqslant p_1\geqslant1$ 时，必有 $(l^{p_1})\subset(l^{p_2})$，以及

$$L^{p_2}(\Omega, \mathscr{B}, \mu)\subset L^{p_1}(\Omega, \mathscr{B}, \mu)\ (\mu(\Omega)<\infty)$$

（参看 §1.5 习题 1）. 因而，由集合论的知识我们可知，

$$\lim_{p\to\infty}(l^p)=\bigcup_{p=1}^{\infty}(l^p),\quad \lim_{p\to\infty}L^p(\Omega, \mathscr{B}, \mu)=\bigcap_{p=1}^{\infty}L^p(\Omega, \mathscr{B}, \mu).$$

然而，对于元 $(1, 1, \cdots)\in(m)$，显然有 $(1, 1, \cdots)\notin(l^p)$

$\forall p \geqslant 1$，因此可知 $\lim\limits_{p\to\infty}(l^p) \subsetneqq (m)$. 此外，特别当取上面函数空间为 $L^p[0, 1]$ 时 $(p \geqslant 1)$，由数学分析知识，显然有

$$\log \frac{1}{t} \in L^p[0, 1], \ \forall p \geqslant 1.$$

然而 $\log \frac{1}{t} \notin M[0, 1]$，因此可知 $M[0, 1] \subsetneqq \lim\limits_{p\to\infty} L^p[0, 1]$.

最后，我们提请读者注意：不要从这一节里产生一个错觉，以为凡是赋范的线性空间都一定是完备的（即 (B)-空间），其实不然. 甚至对于同一个线性空间，由于定义的范数形式不同也可能产生这样的情况，即在一种范数的定义下空间是完备的，而在另一种范数的定义下空间却是不完备的. 例如，对于 $[a, b]$ 上定义的所有复值"连续函数"所成的线性空间而言，对于其内任一元 $x = x(t)$，当定义范数 $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$ 时，则空间即为上面例 4′ 的 (B)-空间 $C[a, b]$，而当定义范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

（其中 $p \geqslant 1$ 为任一固定正数）时，则其便为不完备的空间了（参看 §1.5 习题 7）. 表面看来，这似乎是难以理解的，其实，这种情况我们并不生疏，而是在数学分析里就曾遇到过的事实. 例如，我们熟知，对于连续函数列而言，它们对于"一致收敛"的运算是"封闭"的，即连续函数列的一致收敛的极限函数仍是连续的. 然而它们对于"逐点收敛"的运算却不是"封闭"的了（事实上，就取 $[0, 1]$ 上的连续函数列 $\{t^n\}$ 就可以看出这一事实）. 由此可知，对于同一线性空间而言，如果其内"收敛"的定义方式不同，其"封闭性"就可能改变，但对于赋范空间来说，其收敛的定义方式完全由其内范数定义的方式所决定，因此我们容易理解，一个赋范空间的完备与否完全是由其内范数的定义所决定的.

另外，在本节及以后各节中，我们都不准备介绍一类很著名的空间即 H^p 空间（它们是由在复平面的"单位球"内部的这样一类

单值解析函数所组成的. 当 $0<p<\infty$ 时,先设

$$M_p[f,r]=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}},\quad \forall 0\leqslant r<1;$$

此类函数满足 $\sup\limits_{0\leqslant r<1} M_p[f,r]<\infty$. 不难验证,$H^p$ 为线性空间,且当 $p\geqslant 1$ 时,其以范数 $\|f\|=\sup\limits_{0\leqslant r<1} M_p[f,r]$ 构成 Banach 空间). 读者除了从文献 [144] 可以看到关于它的一些介绍外,还可从文献 [50],[69] 中看到讨论此类空间的专门著作.

习　　题

1.试用直接方法验证空间 (c) 是 Banach 空间.

2.试验证: 空间 $M(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中的按范收敛就是"概一致收敛". 并且,当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时,有:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\int_\Omega|x(t)|^p\mu(dt)\right]^{1/p}=\text{Vrai. }\max_{t\in\Omega}|x(t)|,$$

$$\forall x=x(t)\in M(\Omega,\mathscr{B},\mu).$$

3.设 A_ρ 表示在圆 $|z|\leqslant\rho$ 上连续,而在圆内,$|z|<\rho$ 解析的复变函数的全体,加法、数乘运算如常定义,定义范数

$$\|x\|=\max_{|z|\leqslant\rho_0}|x(z)|,\quad \forall x\in A_\rho.$$

试证明 A_ρ 按上范数构成一个 (B)-空间.

4.设 $C^2[a,b]$ 仍由闭区间 $[a,b]$ 上的一切复值连续函数所组成,但定义范数

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

试说明,此时 $C^2[a,b]$ 构成一赋范线性空间,但不是 (B)-空间.

5.设 $C^{(k)}[a,b]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上有"k 阶连续导函数"的函数 $x(t)$ 的全体,定义函数的加法和数乘如常,且定义

$$\|x\|=\sum_{m=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(m)}(t)|\quad(\text{这里令“0 阶导数”}\ x^{(0)}(t)=x(t)).$$

试验证 $C^{(k)}[a,b]$ 按上范数 $\|x\|$ 构成一个 (B)-空间.

6.设 $C_0(-\infty,\infty)$ 为定义在 $(-\infty,\infty)$ 上连续且当 $|x|\to\infty$ 时趋于零的复值函数全体,加法及数乘定义如常,且定义范数

$$\|x\| = \max_{-\infty<t<\infty} |x(t)|,$$

试验证 $C(-\infty, \infty)$ 构成一个 (B)-空间.

7. 设 $V^{(p)}(p\geqslant 1)$ 是 $[0, 1]$ 上一切"绝对连续"且具有"p 幂可积"导函数的函数 $x(t)$ 的全体,加法及数乘的运算如常,而定义范数

$$\|x\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + \sqrt[p]{\int_0^1 |x'(t)|^p dt},$$

试验证 $V^{(p)}$ 按上范数构成一个 (B)-空间.

8. 试证明 Banach 空间 E 内的闭线性集 E 亦为 Banach 空间.

9. 设 E 是 (B)-空间, $\{x_n\}$ 为 E 内的元列,试证: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 唯一确定了 E 内的一个元. 反之,如果 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是 E 中的一个元(E 不必完备),那么必有 $x_n \to \theta(n\to\infty)$.

10. 设 E 为一线性赋范空间, $\{S_n\}$ 为其内的一递减开球, $S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} \supset \cdots$. 那么, 只要球 S_n 的"直径" $d(S_n) = \sup_{x, y\in S_n} \|x - y\| \not\to 0$ $(n\to\infty)$, 则有 $\bigcap_n S_n \neq \phi$.

11. 在上题 10 中, 当 E 是 Banach 空间时,即使有 $d(S_n)\to 0(n\to\infty)$,则原结论对 $\{\bar{S}_n\}$ 仍然正确.

12. 举一反例说明, 当改习题 10 中的球为别的集时(例如, 即使改为"闭凸集" $\bar{V}_n(n = 1, 2, \cdots)$, 在 Banach 空间原结论也未必正确.

13. 设元列 $\{x_n\}\subset L^p[a, b](p\geqslant 1)$ 满足条件

$$x_n(t)\to x_0(t) \text{ (概) } t\in[a, b], \ (n\to\infty)$$

及

$$\int_a^b |x_n(t)|^p dt \to 0 \quad (n\to\infty).$$

试证明: 在 $[a, b]$ 上必有 $x_0(t)\equiv 0$, (概) $t\in[a, b]$.

14. 设 $\{x_n(t)\}\subset C[0, 1]$ 是"等度连续"函数列 (即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $\forall t_1, t_2\in[a, b]$, 只要 $|t_1 - t_2|<\delta$, 就一致地有 $|x_n(t_1) - x_n(t_2)|<\varepsilon$, $n = 1, 2, \cdots$). 并设 $x_0(t)\in C[0, 1]$, 试证明: 只要对某正数 $p_0\geqslant 1$, 有

$$\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^{p_0} dt \to 0 \quad (n\to\infty)$$

(按 $L^p[0, 1]$ 范数收敛),则必有 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ (按 $C[0, 1]$ 范数收敛).

15. 设 E 为 $C[0, 1]$ 空间中满足 $x(0) = 0$ 的连续函数全体所成的赋范

线性子空间，E_0 为 E 中使得 $\int_0^1 x(t)dt=0$ 的函数 $x(t)$ 全体所成的子空间，试证明：(i) E_0 为 E 的闭线性真子空间；(ii) 在 E 的单位球面上不存在元 x_0，使得 $d(x_0, E_0)=\inf\limits_{y\in E_0}\|x_0-y\|=1$. (提示：在证 (ii) 时注意用归谬法导出 $\left|\int_0^1 x(t)dt\right|\geq 1$，而后找出矛盾.)

16. 试验证：当空间 $L^2[a, b]$ 在定义

$$(x, y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \quad \forall x, y\in L^2[a, b]$$

时构成一内积空间(从而其为一 Hilbert 空间).

§ 1.3. 空间的可分性

(一)

在讨论本节之前，我们先给出下面的定义：

定义 1. 称距离空间 E 为可分的，是指在其内存在一稠于空间的可数集. 称集 $D\subset E$ 为可分集，是指在其内有一稠于 D 的可数集.

注 1. 由上可知，如果 E 是可分的，则必存在一元列 $\{x_n\}\subset E$，使得 $\forall x\in E$，无论正数 ε 多么小，均有一元 $x_k\in\{x_n\}$ 满足关系式 $d(x_k, x)<\varepsilon$. 特别，距离空间内的任一列紧集均是可分集(参看 § 1.1 习题 9).

根据上面的定义，我们可以得到一个重要的定理：

定理 1. 若设 E 为一可分距离空间，那么，E 内的任意集 D 均为可分集.

证. 首先，我们由假设可知，此时必存在一元列 $\{x_n\}\subset E$，使其在 E 中是稠的. 我们对这列元做开球

$$S\left(x_n, \frac{1}{k}\right)=\left\{x \mid d(x, x_n)<\frac{1}{k}, x\in E\right\} \quad (n, k=1, 2, \cdots).$$

那么，由 D 非空 (当 $D=\phi$ 时不需证明)，而 $\bigcup\limits_{n,k} S\left(x_n, \frac{1}{k}\right)=E$,

故知 $\bigcup_{n,k}\left[D\cap S\left(x_n,\frac{1}{k}\right)\right]\neq\phi$，对于使 $D\cap S\left(x_{n'},\frac{1}{k'}\right)\neq\phi$ 的集，我们任取一元 $y_{n',k'}\in D\cap S\left(x_{n'},\frac{1}{k'}\right)$，于是，这些 $y_{n',k'}$ 元的全体就构成了 D 中的一个可数集，记为 $\{y_n\}$.

其次，证明 $\{y_n\}$ 在 D 内稠，事实上，$\forall y\in D$，及 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\{x_n\}$ 在 E 中稠性（注意 $D\subset E$），故知有元 x_{n_0} 及 $\frac{1}{k_0}<\frac{\varepsilon}{2}$，使得 $y\in S\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)$. 从而知 $D\cap S\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)\neq\phi$，且由上面的论述，我们可以得到元 $y_{n_1}\in\{y_n\}$，使得 $y_{n_1}\in S\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)$，这样，便可导出

$$d(y_{n_1},y)\leqslant d(y_{n_1},x_{n_0})+d(x_{n_0},y)<\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}<\varepsilon.$$

也即 D 中的集 $\{y_n\}$ 是稠于 D 的. 证毕.

下面，用 § 1.2 所举的几个常用的空间来讨论它们的可分性问题.

首先，在 n 复欧氏空间中，有理数是稠于空间的可数集(这里及以后，当在复空间中讨论时，所说的有理数均理解为实部与虚部均为有理数的复数).

例 1. n 维复欧氏空间 $\boldsymbol{C}^n$ 是可分空间.

更一般地，注意到范数的性质，还有

例 1′. 有限维的赋范线性空间都是可分的.

为了得到关于 $C[a,b]$ 空间的可分性结论，我们先介绍一个著名的定理(它在近似计算、概率论等方面都是常用的):

定理 2 (Weierstrass 定理). 若设任意函数 $x(t)\in C[0,1]$，并相应的多项式

$$B_n(t)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x\left(\frac{k}{n}\right)t^k(1-t)^{n-k}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则有

$$\|B_n-x\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|B_n(t)-x(t)|\to 0\qquad(n\to\infty).$$

证. 这里，我们仅简要地叙述一下(因为在许多实变函数论

的书中均有详细证明). 首先,若设

$$b_{n,k}(t)=C_n^k t^k(1-t)^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots n),$$

则有

$$\sum_{n=0}^{n} b_{n,k}(t)=1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} kb_{n,k}(t)=nt\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k t^{k-1}(1-t)^{n-k}$$

$$=nt\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(t)=nt$$

和

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)b_{n,k}(t)$$

$$=n(n-1)t^2\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k}(t)=n(n-1)t^2,$$

由此可得

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nt)^2 b_{n,k}(t)=n^2t^2-(2nt-1)nt+n(n-1)t^2$$

$$=nt(1-t)\quad(n=1,2,\cdots).$$

其次, 由闭区间上的连续函数性质可知: $\exists\beta>0$, 有 $|x(t)|\leqslant\beta$, 且 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $\forall t', t''\in[0,1]$, 只要 $|t'-t''|<\delta$, 就有 $|x(t')-x(t'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 最后,若取

$$N=\left[\frac{\beta}{\delta^2\varepsilon}+1\right],$$

则当 $n\geqslant N$时,便可导出

$$|B_n(t)-x(t)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(x\left(\frac{k}{n}\right)-x(t)\right)b_{n,k}(t)\right|$$

$$=\sum_{\left\{k\,\middle|\,\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta\right\}}+\sum_{\left\{k\,\middle|\,\left|\frac{k}{n}-t\right|>\delta\right\}}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) + 2\beta \sum_{\{k \mid |k-nt|>n\delta\}} b_{n,k}(t)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\beta \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k-nt}{n\delta}\right)^2 b_{n,k}(t)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\beta}{n^2\delta^2} nt(1-t)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\beta}{n\delta^2} \frac{1}{4} < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,1].$$

证毕.

由上面的论述通过简单的变换容易得到下面的定理.

定理 2′（Weierstrass 定理). $\forall x(t) \in C[a,b]$，必有一列多项式 $\{P_n(t)\}$，使得

$$\|P_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

例 2. 空间 $C[a,b]$ 是可分的.

有了上面的定理. 我们就容易验证例 2.

验. 由定理 2′ 可知，任何连续函数可由多项式一致逼近，而任意多项式可由有理系数多项式一致逼近，但后者是可数集. 因而得出所需结论. 验毕.

例 3. 空间 (c) 是可分的.

验. 由定义可知，$\forall x = \{\xi_k\} \in (c)$（设 $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi_0$），及 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$（自然数），使得 $n > N$ 时，$|\xi_n - \xi_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于 x 的前 N 个坐标 ξ_k 存在 N 个有理数 γ_k 使得一致地有

$$|\xi_k - \gamma_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \cdots, N).$$

此外，又可取有理数 γ_0，使得 $|\xi_0 - \gamma_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. 今设 $x_\varepsilon = (\gamma_1, \cdots, \gamma_N, \gamma_0, \gamma_0, \cdots)$，注意到上面三个关系式，便可导出

$$\|x - x_\varepsilon\| = \max\left(\max_{1\leqslant k\leqslant N} |\xi_k - \gamma_k|, \sup_{k>N} |\xi_k - \gamma_0|\right)$$

$$\leqslant \max\left(\max_{1\leqslant k\leqslant N} |\xi_k - \gamma_k|, \sup_{k>N} |\xi_k - \xi_0| + \sup_{k>N} |\xi_0 - \gamma_0|\right) < \varepsilon.$$

此即形如 x_ε 的元的全体在空间 (c) 内是稠的，最后由于该集是可数的，因而得出所需的结论．验毕．

例 4．空间 $(l^p)(p\geqslant 1)$ 是可分的．

验．由定义可知，$\forall x=\{\xi_k\}\in(l^p)$ 及 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$（自然数），使得

$$\sum_{N+1}^{\infty}|\xi_k|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{1}$$

另一方面，存在 N 个有理数 $\gamma_k(k=1,2,\cdots,N)$，使其满足

$$\sum_{k=1}^{N}|\xi_k-\gamma_k|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{2}$$

若设 $x_\varepsilon=(\gamma_1,\cdots,\gamma_N,0,0,\cdots)$，那么，由范数的"三角不等式"，并注意到关系式 (1) 及 (2) 便可导出

$$\|x-x_\varepsilon\|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}|\xi_k-\gamma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

同样地，由于形如 x_ε 的元的全体是可数的，从而得出所需的结论．验毕．

例 5．空间 $L^p[a,b](p\geqslant 1)$ 是可分的．

验．$\forall x(t)\in L^p[a,b]$，及 $\forall\varepsilon>0$．首先，由 $L^p[a,b]$ 的定义可知，$x(t)$ 可用一有界可测函数 $x_N(t)$ 来 p 幂平均逼近（即"按范"逼近）．事实上，由于积分的绝对连续性，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $\mu(E)<\delta$，就有 $\int_E|x(t)|^p dt<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$．而又由于 $x(t)$ 是概有穷的可测函数，故对上述正数 δ，$\exists N$（自然数），使得 $\mu(t||x(t)|>N)<\delta$．今做 $[a,b]$ 上的有界可测函数 $x_N(t)$，

$$x_N(t)=\begin{cases}x(t), & 若\ |x(t)|\leqslant N;\\ 0, & 若\ |x(t)|>N.\end{cases}$$

这时，当然有 $x_N(t)\in L^p[a,b]$，且由上两关系式可得

$$\|x-x_N\|=\left(\int_a^b|x(t)-x_N(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{t \mid |x(t)| > N} |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

其次，根据 Лузин 定理，我们可知：每一个有界可测函数可以由一个连续函数来“按范”逼近．事实上，由于 $x_N(t)$ 为有界可测函数，故由 Лузин 定理知存在一连续函数 $x_c(t)$，使得

$$|x_c(t)| \leqslant N, \quad \mu(\{t \mid x_N(t) \neq x_c(t)\}) < \left(\frac{\varepsilon}{6N}\right)^p.$$

从而推得(注意到 § 1.2 引理 3)

$$\begin{aligned}
\|x_N - x_c\| &= \left(\int_a^b |x_N(t) - x_c(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{t \mid x_N(t) \neq x_c(t)} |x_N(t) - x_c(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_{t \mid x_N(t) \neq x_c(t)} |x_N(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{t \mid x_N(t) \neq x_c(t)} |x_c(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant [N^p \cdot \mu(\{t \mid x_N(t) \neq x_c(t)\})]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + [N^p \cdot \mu(\{t \mid x_N(t) \neq x_c(t)\})]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned} \tag{4}$$

最后，由定理 2(Weierstrass 定理)可知，上面的连续函数 $x_c(t)$ 可由“有理数为系数”的多项式一致逼近，故存在有理系数多项式 $P_n(t)$，使得 $\max\limits_{t \in [a, b]} |x_c(t) - P_n(t)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)^{\frac{1}{p}}}$，从而推得

$$\|x_c - P_n\| = \left(\int_a^b |x_c(t) - P_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

由式 (3)，(4)，(5)，可知

$$\begin{aligned}
\|x - P_n\| &\leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - x_c\| + \|x_c - P_n\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

此即 $[a,b]$ 上的有理系数多项式集合是在 $L^p[a,b]$ 内稠密的，但由于该集合是可数的，从而得出所需的结论．验毕．

上面，我们列举出的几个空间都是可分的，但是我们不能忽视另一事实，这就是不可分的空间也是存在的．

反例 1． 空间 $M[a,b]$ 是不可分的．

验． 我们注意到元素集合 $\{x_s|s\in[a,b]\}\subset M[a,b]$，其中，

$$x_s(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } a\leqslant t\leqslant s \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } s<t\leqslant b \text{ 时}.\end{cases}$$

显然，当 $s_1\neq s_2$ 时，均有

$$\|x_{s_1}-x_{s_2}\|=\inf_{E_0}\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x_{s_1}(t)-x_{s_2}(t)|,\ \mu(E_0)=0\}=1.$$

而且 $\{x_s(t)|s\in[a,b]\}$ 是不可数集．故由该集的不可分性，利用上面定理 1 的逆否命题，我们可推出空间 $M[a,b]$ 是不可分的．验毕．

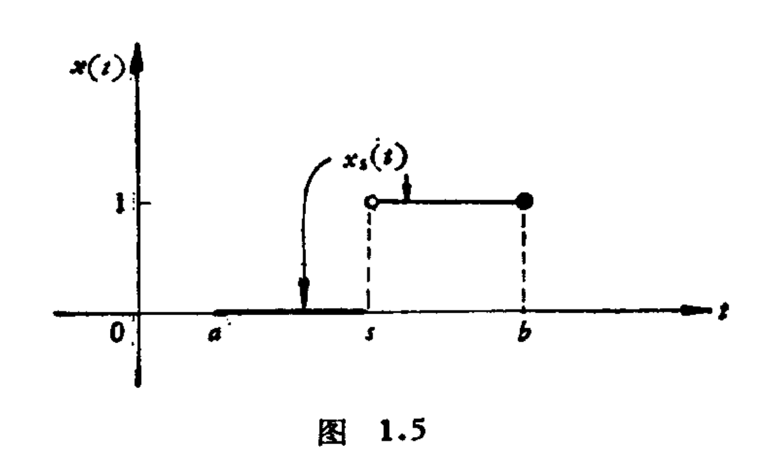


图 1.5

反例 2． 空间 (m) 是不可分的．

验． 考虑 (m) 中其坐标仅取 0 和 1 的元素的集合，易知，它们不同者相互距离显然为 1．此外，从实变函数论中，我们还可知道它的“势”为 $\mathscr{N}$（“连续统”的势），因此这个集合是非可数的．同理可知结论．验毕．

（二）

下面我们来介绍与可分性密切相关的另一个概念，即“基”的

概念，为此，我们先给出下面的定义

定义 2. 称赋范线性空间 E 为具有**可数基**的，是指存在元列 $\{e_n\}\subset E$，使得 $\forall x\in E$，其均可唯一地表示成 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$（其中，$\xi_k\in \boldsymbol{K}$，$(k=1,2,\cdots)$并且这时称 $\{e_n\}$ 为 E 的**基**(或 Schauder 基)，称 ξ_k 为元 x 对于基 e_k 的**坐标** $(k=1,2,\cdots)$.

注 2. 上面 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ 的意义是指 $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k-x\right\|\to 0$ $(n\to\infty)$. 显然，一个具有可数基的空间一定是可分空间. 事实上，此时关于"基"的任意有理系数线性组合所构成的可数集 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k e_k \middle| \gamma_k \text{ 为任意有理数}, k=1,2,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots\right\}$ 在 E 中必定是稠的.

注 3. 当 E 具可数基 $\{e_n\}$ 时，由上定义中 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ 表出的唯一性，可知当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k=0$ 时，必恒有 $\xi_k=0$ $(k=1,2,\cdots)$. 并且，其坐标 ξ_k 是由元 x 唯一确定的一个数，从而 ξ_k 成为空间 E 的一个泛函数（自变量是一个抽象空间的元的"函数"），简称为"泛函"记为

$$\xi_k=f_k(x),\quad \forall x\in E\quad (k=1,2,\cdots).$$

同样由 E 中的元，关于基的表示式的唯一性不难看出，f_k 是"加法的"和"齐次的"，即有

$$f_k(x+y)=f_k(x)+f_k(y),\ f_k(\alpha x)=\alpha f_k(x),$$
$$\forall x,y\in E,\ \forall \alpha\in \boldsymbol{K}\quad (k=1,2,\cdots)$$

（加法且齐次有时我们统称为"分配"的或"线性"的）.

注 4. 同样地，从基的定义我们容易看出，空间 E 中的可数基 $\{e_k\}$ 和由其决定的 E 中之泛函列 $\{f_k\}$ 构成一个"双正交组"，即有

$$f_k(e_n)=\delta_{k,n}=\begin{cases}1, & \text{当 } k=n \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } k\neq n \text{ 时}\end{cases}\quad (k,n=1,2,\cdots).$$

其实，我们还可以证明，当 E 是 Banach 空间时，上述的泛函列 $\{f_k\}$ 均为 E 上的连续泛函列，并且，在一定的条件下它也构成 E 的所有

连续线性泛函所成的空间中的一个"基". 这些以及关于基的更进一步的性质,我们将在第五章讨论.

下面,我们举出具有可数基的几个空间的例子.

例 1. 在空间 $(l^p)(p \geqslant 1)$ 及 (c_0)(空间 (c) 中以 0 为极限的数列所成的闭子空间)均是具有可数基的.

验. 容易看出,当令 $e_k = \{\delta_{k,n} | n = 1, 2, \cdots\}$ (即 $e_k = \{0, 0, \cdots, \underset{(k\text{位})}{0}, 1, 0, \cdots,\}$) 时 $(k = 1, 2, \cdots)$. $\{e_n\}$ 即构成该空间的可数基,验毕.

例 2. 空间 (c) 是具有可数基的.

例 3. 空间 $C[0, 1]$ 是具有可数基的.

验. 下面,我们具体找出空间 $C[0, 1]$ 的一组基底(这个结果是由 Schauder[132] 第一个得到的).

首先,我们在空间 $C[0, 1]$ 内取一元列如下:

$$e_0 = 1 - t; \qquad e_1 = t; \; e_2 = x_{00}(t);$$
$$e_3 = x_{10}(t), \; e_4 = x_{11}(t); \; e_5 = x_{20}(t),$$
$$e_6 = x_{21}(t), \; e_7 = x_{22}(t), \; e_8 = x_{23}(t);$$
$$\cdots\cdots.$$

这里,函数 $x_{nk}(t)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$; $k = 0, 1, \cdots, (2^n - 1)$. 按如下方式定义:先将区间 $[0, 1]$ 分成 2^n 等分,然后该函数在小区

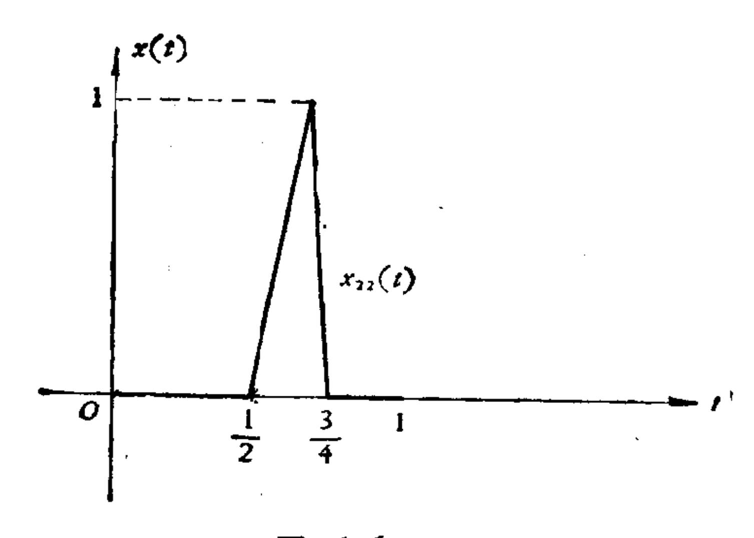


图 1.6

间 $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ 之外恒取 0，而在此区间内取成高为 1 的等腰三角形折线形式(参看图 1.6).

此时，对于任一元 $x \in C[0, 1]$，将区间[0, 1]分为 2^N 等分，通过分点作 t 轴的垂线，得 $x = x(t)$ 曲线的 $(2^N + 1)$ 个分点(包括始末点). 令 $\alpha_0 = x(0)$，$\alpha_1 = x(1)$；令 $\alpha_2 = \alpha_{00}$，为连接 $x(t)$ 曲线的第一与第 $(2^N + 1)$ 个分点所成折线的中点与曲线的距离；令 $\alpha_3 = \alpha_{10}$ 为连接 $x(t)$ 曲线的第一与第 $(2^{N-1} + 1)$ 个分点所成折线的中点与曲线的距离，$d_4 = d_{11}$ 为连接 $x(t)$ 曲线的第 $(2^{N-1} + 1)$ 个与第 $(2^N + 1)$ 个分点所成折线的中点与曲线的距离令…. 这样，不难看出(参看图 1.7)，有限和

$$y_N(t) = \sum_{i=0}^{2^N} \alpha_i e_i = \alpha_0(1-t) + \alpha_1 t + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_{nk} x_{nk}(t)$$

正好 $x(t)$ 曲线就是由上述 $(2^N + 1)$ 个分点所组成的 2^N 段折线，于是，从闭区间上连续函数的性质，我们显然可知，$y_N(t)$ 当 $N \to \infty$ 时在区间 [0, 1] 上是一致收敛于函数 $x(t)$ 的，从而导出

$$\|y_{2N} - x\| \to 0 \quad (N \to \infty),$$

即

$$x = \alpha_0(1-t) + t\alpha_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_{nk} x_{nk}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i.$$

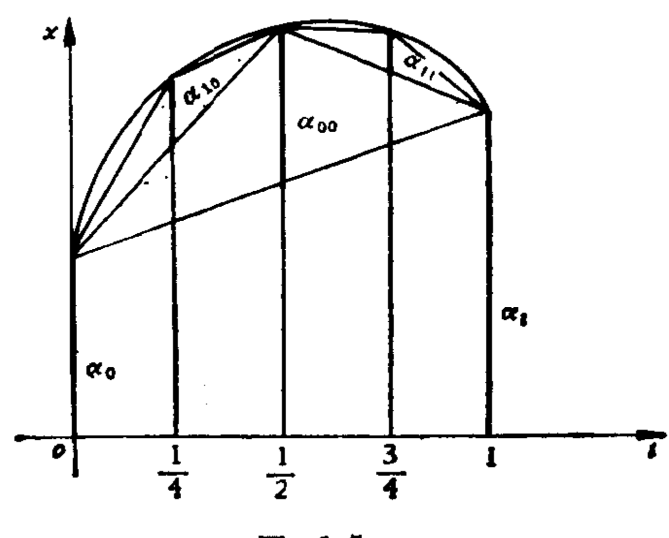


图 1.7

此即说明上述可列元组成了空间 $C[0,1]$ 的一组基底. 验毕.

例 4. 空间 $L^p[a,b](p\geqslant 1)$ 是具有可数基的.

验. 为方便起见,我们仅对空间 $L^p[-\pi,\pi]$ 来讨论. 下面我们指出,三角函数列

$$e_0=1,\ e_1=\cos t,\ e_2=\sin t;\ e_3=\cos 2t,$$
$$e_4=\sin 2t,\cdots,\ e_{2n-1}=\cos nt,\ e_{2n}=\sin nt,\cdots$$

为空间 $L^p[-\pi,\pi]$ 的一组基底(当对任意空间 $L^p[a,b]$ 讨论时,可用初等变换得出相应的一列三角函数作为基).

首先由前面关于 L^p 空间可分性的讨论. 我们已经知道, $\forall x\in L^p$, 存在一连续函数(按"范数")来逼近 $x(t)$. 由三角级数的理论我们还知道,在 $[-\pi,\pi]$ 上连续的函数又可以由三角多项式来"一致逼近" (Weierstrass 定理),因而知 $x(t)$ 亦可由三角多项式来"按范"逼近. 因此, $\forall\varepsilon>0$, 必有一个三角多项式 $y_\Delta(t)$, 使得 $\|y_\Delta(t)-x(t)\|<\varepsilon$.

其次,若设 $S_n(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt$ 表示 $x(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的部分和,那么,由 Fourier 展开性质显然可知

$$S_n(y_\Delta-x)=S_n(y_\Delta)-S_n(x),$$

当 n 足够大以后,必有 $S_n(y_\Delta)=y_\Delta(t)$, 这样,对这些 n, 必有

$$\begin{aligned}\|S_n(x)-x\|&\leqslant\|y_\Delta-x\|+\|y_\Delta-S_n(x)\|\\&=\|y_\Delta-x\|+\|S_n(y_\Delta)-S_n(x)\|\\&=\|y_\Delta-x\|+\|S_n(y_\Delta-x)\|.\end{aligned}$$

最后由关于 L^p 中三角级数的 Riesz 定理,我们可以导出(参看文献[25], § 14, § 20)

$$\|S_n(y_\Delta-x)\|\leqslant\gamma_{(p)}\|y_\Delta-x\|\quad(\gamma_{(p)}\text{ 为仅依于 } p \text{ 的常数}).$$

从而注意到 $y_\Delta(t)$ 的取法,由前式则可推得

$$\|S_n(x)-x\|\leqslant(1+\gamma_{(p)})\|y_\Delta-x\|<(1+\gamma_{(p)})\varepsilon.$$

此即导出在 L^p 的范数下有 $S_n(x)\to x(n\to\infty)$, 且有

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k e_k,\quad\forall x\in L^p,$$

其中，α_k 为 x 相应于 e_k 的 Fourier 系数. 验毕.

注 5. 对 Banach 空间的"基"感兴趣的读者可参看专著[138].

习　　题

1. § 1.2 中习题 5 的空间 $C^{(k)}[a, b]$ 是可分的吗? 为什么?

2. § 1.2 中题 6 的空间 $C_0(-\infty, \infty)$ 是可分的吗? 为什么?

3. 设 $C[0, \infty)$ 为 $[0, \infty)$ 上全体有界连续函数由范数

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,\infty)} |x(t)|$$

所张成的 (B)-空间，试问 $C[0, \infty)$ 是可分的吗? 为什么?

4. 设 (s) 表示"所有复数序列 $x = \{\xi_k\}$ 全体"所成的线性空间，并且引入收敛定义为"按坐标收敛"(不要求"收敛"一致)，试证明它构成一可分空间.

5. 设 $\tilde{L}^2$ 表示在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义的复可测函数 $x(t)$ 的全体，并且其中每一函数使 $\|x\| = \lim\limits_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ 存在. 试证明: $\tilde{L}_2$ 是不可分的空间.（可以证明 $\tilde{L}^2$ 是 Banach 空间.）

6. 设 $x(t)\in L^p(-\infty, +\infty)(p\geqslant 1)$，试证明:

$$\lim_{h\to 0}\|x(t+h) - x(t)\| = 0 \quad (\text{关于平移连续}).$$

7. 试验证: 空间 (c) 具有可数基.

8. 试证明: 当赋范线性空间 E 具可数基 $\{e_n\}$ 时，$\forall x\in E$，其相应于基 e_n 的坐标 $\xi_n(n = 1, 2, \cdots)$ 乃是 x 的一个"分配"泛函.

9. 试证明: $\forall x\in L^p[-\pi, \pi]$ 必定存在一列三角多项式

$$y_\Delta^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\cos kt + \beta_k^{(n)}\sin kt \quad (n = 1, 2, \cdots,)$$

使得 $\|y_\Delta^{(n)} - x\|\to 0(n\to\infty)$.

§ 1.4. 商空间与积空间

(一)

在代数学中，我们曾经学习过具有相同余数的"剩余类"的概念. 那里，凡是对于"模"余数相同者均归入一类，并且我们常常将

每一类的全体视为同一元素．同样地，在实变函数论中，我们也常把“对等”（概相等，也称“几乎处处”相等）的函数看作同一元素．例如，在§1.2中L^p，M等空间定义中我们已经用了这样的观点．总之，当一般地把一个“元素类”视为一个“元”时，在线代数中就有所谓“商空间”的概念．

定义 1. 设E是一线性空间，M为E中一线性子空间，我们称元$x_1, x_2 \in E$关于M等价，是指

$$x_1 - x_2 \in M.$$

有时我们记为$x_1 \sim x_2(M)$，或$x_1 \equiv x_2(\mathrm{mod}\, M)$.

注 1. 我们容易验证上面的关系“～”是满足“等价”的通常性质，即满足“自反”、“对称”和“传递”性的．

定义 2. 把上述E中的元按相互关于M等价的归为一类，而这些“等价类”的全体称为商群，在商群中每一“等价类”视为一个“元素”，记为$[x]$，显然

$$[x] = \{y \mid y \sim x(M);\ y \in E\}.$$

如果在商群中，我们定义其间元素的加法和数乘为

$$[x] + [y] = [x + y],\ \alpha[x] = [\alpha x];\ \forall x, y \in E, \alpha \in \boldsymbol{K}.$$

那么，这些“等价类”$[x]$的全体也形成一线性空间，我们称为E以M为模的商空间，记为E/M.

注 2. 上面关于E到E/M的映象$x \overset{\varphi}{\longmapsto} [x]$构成一“线性同态”映象（即在$E$上定义的单值确定的映象$\varphi$满足$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$，$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$；$\forall x, y \in E, \alpha \in \boldsymbol{K}$），我们常称其为$E$到$E/M$的典则映象，这个映象在下面第三章、第五章及第七章讲述 Banach 代数的知识时还要常用的．

注 3. 上面关于商空间的定义是“合理的”，这里我们只要作以下说明：首先，E/M中的元素是唯一确定的，由于M是线性集，根据关系式$[x_1] = [x_2] \Longleftrightarrow x_1 \sim x_2(M)$可知，$E$中的元均被归入且唯一地被归入到某一个“等价类”；其次，同样注意到M是线性的，由假设

$$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\in M,$$
则可导出
$$[x_1]=[x_2],\ [y_1]=[y_2]\Rightarrow[x_1+y_1]=[x_2+y_2],$$
$$\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ \in E,$$
即商空间中"加法"的定义是唯一确定的，最后，同样可知
$$[x]=[y]\Rightarrow[\alpha x]=[\alpha y],\ \forall x,\ y\in E,\ \alpha\in \boldsymbol{K},$$
即商空间中"数乘"的定义也是确定的.

注 4. 在商空间 E/M 内，集M起着"零元"的作用，即 $[\theta]=M$. 事实上，由于对任意的元 $[x]\in E/M$，根据
$$[x]+M=\{x+x_0|x\in[x],\ x_0\in M\},$$
注意到 $x+x_0\sim x(M)$，即 $x+x_0\in[x]$，可导出
$$[x]+M=[x],\ \forall[x]\in E/M;$$
另一方面，如果设元 $[x_0]\in E/M$，使得有
$$[x]+[x_0]=[x],\ \forall[x]\in E/M,$$
那么，由线性同态的关系知 $[x+x_0]=[x]$，即有 $x+x_0\in[x]$. 由此可得 $x+x_0\sim x(M)$，从而导出 $(x+x_0)-x=x_0\in M$，即 $[x_0]=M$.

下面，我们举一个简单直观的例子来加深对商空间的理解.

例. 设 $E=\boldsymbol{R}^3$ (实三维欧氏空间)，M 为 ξ_1 轴，则商空间

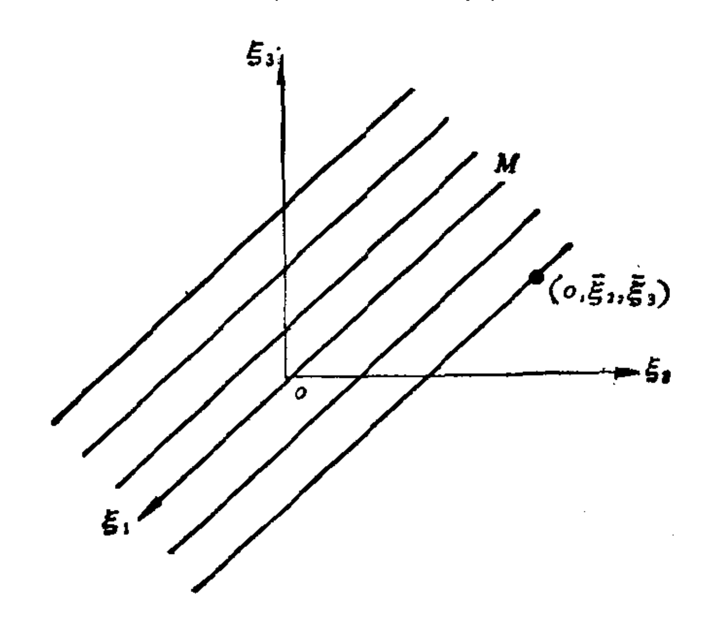


图 1.8

E/M 即由所有平行于 ξ_1 轴的空间直线所组成(参看图 1.8).

验. 事实上,由于此时 $M=\{(\xi_1, o, o)|\xi_1\in \boldsymbol{R}\}$, 故 $\forall \bar{x}=(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)\in \boldsymbol{R}^3$, 有

$$[\bar{x}]=\{\bar{x}+x_0|x_0\in M\}=\{(\bar{\xi}_1+\xi_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)|\xi_1\in \boldsymbol{R}\},$$

故当 ξ_1 跑遍 $\boldsymbol{R}$ 时, $\bar{\xi}_1+\xi_1$ 也跑遍 $\boldsymbol{R}$. 也即,从 ξ_2, ξ_3 轴上的坐标 $\bar{\xi}_2$, $\bar{\xi}_3$ 就可将 $[\bar{x}]$ 一意确定出来,它即为过 $\xi_2 o \xi_3$ 坐标平面上的一点 $(o, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ 且平行于 ξ_1 的一条直线,验毕.

下面,我们给出关于商空间的两个定理:

定理 1. 如果设 E_1, E_2, 为两线性空间,且有 $E_1\cap E_2=\{\theta\}$, 那么,当令 $E=E_1\dotplus E_2$ 时[1], 则有: 商空间 E/E_1 与 E_2 是线性同构的.

证. 1) E_2 内的任一元必组成唯一的一个"等价类"属于 E/E_1. 事实上, $\forall x\in E_2$ 只要令 $[x]=\{x+y|y\in E_1\}$ 则可,由此特别得到 E_2 中的零元 θ, 对应地有 $[\theta]=E_1$.

2) E/E_1 内的任一"元"(即 E 对于 E_1 的等价类)必含有 E_2 的唯一的一个元. 其实,我们只要注意到, $\forall[x]\in E/E_1$, 其内必含有 E_2 的元,因为当设元 $x=x_1+x_2$ 时($x_1\in E_1, x_2\in E_2$), 由

$$[x]=\{x_1+x_2+y|y\in E_1\}=\{x_2+\tilde{y}_0|\tilde{y}\in E_1\}$$

故立即可以得知元 $x_2\in[x]$. 因此,下面只要来证明 E/E_1 内任一"元"含有 E_2 的元是唯一的就行了. 我们仍然用归谬法. 若设元 $[x]\in E/E_1$ 内含有 E_2 的两个不同元素 x_1, x_2, 那么,由 E_2 是线性集,故有 $x_1-x_2\in E_2$.

但另一方面,由 $x_1, x_2\in[x]$ 及等价类的定义,应有 $x_1-x_2\in E_1$, 最后注意到假设条件 $E_1\cap E_2=\{\theta\}$ 以及上面的关系式,可知 $x_1-x_2=\theta$, 从而导出 $x_1=x_2$, 与假设矛盾. 证毕.

定理 2. 若设 E_0 是赋"拟范"线性空间 E 中的闭线性子空间,在商空间 E/E_0 中定义范数[2]

$$\|[x]\|=\inf_{x\in[x]}\|x\|, \quad \forall[x]\in E/E,$$

1) 这里 E 即为 E_1 与 E_2 的"直接和".

2) 这里及以后,我们一般均用同一符号"$\|\cdot\|$"代表不同空间的范数.

则 E/E_0 构成一赋范线性空间.

证. 只要证明 $\|[x]\|$ 是满足范数的三个性质就行了.

1) $\|[x]\|\geqslant 0$, $\|[x]\|=0\Longleftrightarrow[x]=[\theta]=E_0$. 由定义显然可知 $\|[x]\|\geqslant 0$. 且当 $[x]=[\theta]=E_0$ 时,由定义可得

$$\|[x]\|=\inf_{x\in E_0}\|x\|=\|\theta\|=0,$$

而当 $\|[x]\|=0$ 时,由定义则知, $\exists\{x_n\}\subset[x]$,使得 $\|x_n\|\to 0$, 即 $x_n\to\theta(n\to\infty)$. 又由定义可知 $[x]=\{x+y|y\in E_0\}$,因而上述 x_n 可以表为

$$x_n=x+y_n,\ y_n\in E_0\quad(n=1,2,\cdots),$$

且

$$x_n=x+y_n\to\theta,$$

即

$$y_n\to -x\quad(n\to\infty).$$

但注意到 E_0 是闭的线性子空间, 故有 $-x\in E_0$,从而推得 $x\in E_0$, 由此便导出 $[x]=E_0=[\theta]$.

2) $\|[x]+[y]\|\leqslant\|[x]\|+\|[y]\|$. 这是较明显的,因 $\forall\bar{x}\in[x]$, $\bar{y}\in[y]$,有

$$\|[x]+[y]\|=\inf_{\substack{x\in[x]\\ y\in[y]}}\|x+y\|\leqslant\|\bar{x}+\bar{y}\|\leqslant\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|,$$

先对后式 $\bar{x}\in[x]$ 取下确界, 再对 $\bar{y}\in[y]$ 取下确界, 上式保持不变,即得

$$\|[x]+[y]\|\leqslant\inf_{\bar{x}\in[x]}\|\bar{x}\|+\inf_{\bar{y}\in[y]}\|\bar{y}\|=\|[x]\|+\|[y]\|.$$

3) $\|\alpha[x]\|=|\alpha|\|[x]\|$. 这是易验证的,因为

$$\|\alpha[x]\|=\|[\alpha x]\|=\inf_{y\in[\alpha x]}\|\alpha x\|=\inf_{y/\alpha\in[x]}|\alpha|\left\|\frac{y}{\alpha}\right\|$$

$$=|\alpha|\inf_{\bar{x}\in[x]}\|\bar{x}\|=|\alpha|\|[x]\|.$$

推理. 若设 E 为"赋拟范"线性空间,且设

$$E_0=\{x|\|x\|=0,x\in E\},$$

那么, E_0 必为 E 的闭线性子空间, E/E_0 必构成赋范线性空间, 并且有 $\|[x]\|=\|x\|$, $\forall x\in[x]$.

证. 1) E_0 是 E 的闭线性子空间. 事实上, 当设 $\{y_n\}\subset E_0$,

$y \in E$,并有 $y_n \to y(n \to \infty)$ 时. 注意到 E_0 的假设,我们可导出

$$0 \leqslant \|y\| \leqslant \|y_n - y\| + \|y_n\| = \|y_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

此即 $\|y\| = 0$, 从而得出 $y \in E_0$, 也就是 E_0 是闭的. 至于 E_0 是线性空间这一点显然容易从范数的性质导出.

2) E/E_0 是赋范线性空间. 注意到上面的 1) 可知,这显然是前面定理 2 的直接结果.

3) $\|[x]\| = \|x\|$, $\forall x \in [x]$. 其实,我们只要注意到, $\forall x_1, x_2 \in [x]$,由于 $x_1 - x_2 \in E_0$,故从 E_0 的假设可知有

$$\|x_1\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|x_2\| = \|x_2\|,$$
$$\|x_2\| \leqslant \|x_2 - x_1\| + \|x_1\| = \|x_1\|$$

成立,由此导出 $\|x_1\| = \|x_2\|$,从而得到结论. 证毕.

定理 3. 在定理 2 的假设条件下, 为了商空间 E/E_0 和子空间 E_0 是完备空间必须且只须 E 是完备空间.

证. 1) "$\Longrightarrow$" 为了证明 E 是完备空间,我们假设 $\{x_k\} \subset E$ 是一 Cauchy 列, 那么, 首先从商空间 E/E_0 中元及范数的定义我们有

$$\|[x_n] - [x_m]\| = \|[x_n - x_m]\| \leqslant \|x_n - x_m\|, \ \forall x_n, x_m \in \{x_k\}.$$

因而知 $\{[x_k]\}$ 亦为空间 E/E_0 内的一 Cauchy 列. 于是,由 E/E_0 完备性的假设可知, $\exists [x_0] \in E/E_0$, 使得 $[x_k] \to [x_0] \quad (k \to \infty)$. 但当我们注意到 E_0 是线性子空间时,从关系式

$$d(x_k, [x_0]) = \inf_{y \in E_0} \|x_k - (x_0 + y)\| = \inf_{y \in E_0} \|(x_k - x_0) + y\|$$
$$= \|[x_k - x_0]\| = \|[x_k] - [x_0]\| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

可以导出: 存在一单增自然数列 $\{k_n\}$ 及元列 $\{z_n\} \subset [x_0]$,使其满足

$$d(x_{k_n}, z_n) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

这样,由关系式

$$\|z_n - z_m\| \leqslant \|z_n - x_{k_n}\| + \|x_{k_n} - x_{k_m}\| + \|x_{k_m} - z_m\|$$
$$\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \|x_{k_n} - x_{k_m}\|$$

及 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列的假设不难看出，$\{z_n\}$亦为一 Cauchy 列，由此导出 $\{z_n - x_0\}$ 必为空间 E_0 的一 Cauchy 列. 最后，注意到假设 E_0 是完备空间，从而，$\exists z_0 \in E$，使得 $\|z_n - z_0\| \to 0 (n \to \infty)$. 由

$$\|x_k - z_0\| \leqslant \|x_k - x_{k_n}\| + \|x_{k_n} - z_n\| + \|z_n - z_0\|$$
$$< \frac{1}{n} + \|x_k - x_{k_n}\| + \|z_n - z_0\|$$

以及上面的结论，我们则可导出 $x_k \to z_0 \in E (k \to \infty)$，即 E 亦为完备空间. 从而定理的必要性得证.

2) "$\Longleftarrow$" 若设 E 是完备空间，那么首先由 E_0 为 E 的闭线性子空间的假设易知，E_0 必然也是完备空间. 下面，我们再来证明商空间 E/E_0 的完备性. 若设 $\{[x_k]\}$ 为空间 E/E_0 的一 Cauchy 列，那么，由其满足

$$\|[x_n] - [x_m]\| \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

我们就可以从中选出一子列 $\{[x_{k_n}]\}$，使其满足

$$\|[x_{k_{n+1}} - x_{k_n}]\| = \|[x_{k_{n+1}}] - [x_{k_n}]\| < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

这样，由商空间元的范数定义，则可找到一元列 $\{z_n\}$，使其满足

$$z_n \in [x_{k_{n+1}} - x_{k_n}], \|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

若设 $z_1 = (\bar{x}_{k_2} - \bar{x}_{k_1}) + z_0$，(其中 $\bar{x}_{k_2} \in [x_{k_2}]$，$\bar{x}_{k_1} \in [x_{k_1}]$，$y_0 \in E_0$.) 那么，由以上的假设我们可以作出 E 的一元列 $\{x^0_{k_n}\}$ 如下:

$$x^0_{k_1} = \bar{x}_{k_1}, x^0_{k_2} = z_1 + x^0_{k_1}, x^0_{k_3} = z_2 + x^0_{k_2},$$
$$x^0_{k_{n+1}} = z_n + x^0_{k_n}, \cdots.$$

并且，从归纳法显然有

$$x^0_{k_n} \in [x_{k_n}], z_n = x^0_{k_{n+1}} - x^0_{k_n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由此可知

$$\|x^0_{k_{n+1}} - x^0_{k_n}\| = \|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

也即 $\{x^0_{k_n}\}$ 为 E 中的一 Cauchy 列，于是由 E 完备性的假设可知，$\exists x^0 \in E$，使得

$$x_{k_n}^0 \to x^0 \quad (n \to \infty).$$

现在令 $[x^0] = \{x^0 + y | y \in E_0\}$,注意到 $\{[x_n]\}$ 是 E/E_0 中的 Cauchy 列的假设,不难由关系式

$$\begin{aligned} \|[x_k] - [x^0]\| &\leqslant \|[x_k] - [x_{k_n}]\| + \|[x_{k_n}] - [x^0]\| \\ &\leqslant \|[x_k] - [x_{k_n}]\| + \|x_{k_n}^0 - x^0\| \end{aligned}$$

导出 $[x_k] \to [x^0] (k \to \infty)$, 也即商空间 E/E_0 也是完备的. 因而定理的充分性得证. 证毕.

注 5. 在以上定理 3 中,如果 E 的闭线性子空间 E_0 不是(B)-空间,那么,即使商空间 E/E_0 是完备的,一般也未必有 E 的完备性.

反例. 设 E 为空间 (c) 中使 $\{\xi_k\}$ 仅有"有限个坐标非 0"的元之全体; E_0 为 E 中使 $\{\xi_k\}$ 的前 n_0 项(某一固定自然数)坐标恒为 0 的元之全体, 那么相应的商空间 E/E_0 是完备的. 但 E 却不完备.

验. 首先, 我们看出这里的 E_0 确是 E 的闭线性子空间. 其次,来验证商空间 E/E_0 是完备的,事实上,当设 $\{[x_k]\} \subset E/E_0$ 为一 Cauchy 列时,与定理 3 的充分性证明类似,只要注意到空间 (c) 内的范数定义, 就可以取那里的元 z_n, 使其除前 n_0 项以外其余坐标均为 0, $(n = 1, 2, \cdots)$, 于是相应地得到的元列 $\{x_{k_n}^0\}$, 由于 $x_{k_{n+1}}^0 - x_{k_n}^0 = z_n$, z_n 坐标的性质以及 E/E_0 元的特点(起"代表"作用的是前 n_0 个坐标), 也可以设 $x_{k_n}^0$ 的除前 n_0 项以外其余后面的坐标均为 $0 (n = 1, 2, \cdots)$. 这样,由有限维赋范空间一定是完备的. 我们便可找到一元 $x^0 \in E$,使得 $x_{k_n} \to x^0 (n \to \infty)$. 由此类似地就可以推出 $[x_k] \to [x^0] (k \to \infty)$, 也即证得 E/E_0 是完备的.

最后, E 的不完备性是显然的. 例如只要取 E 中一元列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_1 = (1, 0, \cdots), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \cdots\right), \cdots,$$

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, \cdots\right), \cdots\cdots,$$

那么，由

$$\|x_n - x_m\| = \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

可知 $\{x_n\}$ 为 E 中一 Cauchy 列，然而其在 E 中却无极限存在（事实上，在 (c) 空间的范数下，当令 $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ 时，显然有 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$，但由 $x_0 \notin E$ 以及距离空间元列极限的唯一性则知结论）. 验毕.

由上面的定理及有限维赋范线性空间的特点，可以直接得到下面的推理：

推理. 设 E_0 为赋拟范线性空间 E 中的"有限维"线性子空间. 那么，空间 E 与商空间 E/E_0 的完备性是等价的.

注 6. 上面的定理 2、推理以及定理 3 对于赋"拟""准范"的线性空间也是正确的.（这个结论的证明请读者完成. 这里相应于"准范"数的定理 2，我们在 § 1.5 以及 § 5.2 还要用到.）

注 7. 由上面的命题我们就可以得出把一个赋"拟(准)范"线性空间变成一个赋(准)范线性空间的方法，而这正是我们在 § 1.2 中所介绍的空间 L^p, M 的定义的根据. 例如，那里的空间 L^p 其实就是"p 幂可积"的可测函数全体关于其中"概为零"的函数所成的闭线性子空间的商空间.

(二)

从已知空间产生出新空间，除了上面所说的"商空间"的办法外，还有一个常用的方法，就是做"积空间"的方法. 通常当我们将一个问题从一维欧氏空间推广到 n 维欧氏空间的时候，就常用到这一方法. 下面，我们仅对两个空间的"积空间"来讨论，显然，它们是容易推广到任意有限个甚至无穷个的情况的.

定义 3. 设 E_1, E_2 均为赋范线性空间，那么，我们定义其**积空间**

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\},$$

其中加法与数乘的运算及范数定义为

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2), \|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|;$$
$$\forall x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2. \quad \alpha \in \boldsymbol{K}.$$

注 8. 当我们讨论到任意有限个空间或无限个空间的积空间时,加法与数乘的运算仍按如上"自然方式"来定义,范数的定义可各有不同. 在有限个空间时,例如,我们上面是按空间 (l^1) 的形式定义的. 类似地当然也可按空间 (c) 或 (l^p) 甚至更复杂的形式来定义,这里为了讨论有意义,我们必须要求所引入的积空间中的范数收敛与各"坐标"元间的范数收敛要一致. 即为了积空间元的范数趋向于 0,必须且只须其各坐标元的范数均趋于 0. 在无穷个空间的时候,情况就复杂得多. 首先在各种范数定义下,积空间仅由使其范数有意义的元组成(参看本节习题),其次如要范数收敛与坐标收敛等价则带来的困难就大得多. 例如,虽然我们对积空间 $E = \prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 可以定义 $\|x\|_E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x_n\|}{1 + \|x_n\|}$, $\forall x = (x_n) \in E$, 并且可以证明 $\|x^{(k)}\|_E \to 0$ $(k \to \infty)$ 与(各坐标的关系式) $\|x_n^{(k)}\| \to 0$ $(k \to \infty, n = 1, 2, \cdots)$ 是等价的, 然而可惜 $\|x\|_E$ 已经不是一个"范数",而仅是一个"准范数"了(一般说来,没有可能在可数积空间中引入一个合理的范数来).

最后,我们对积空间给出下面的定理.

定理 4. 设 E_1, E_2 为两赋范线性空间,那么积空间 $E_1 \times E_2$ 仍是赋范线性空间. 并且为了 $E_1 \times E_2$ 是(B)-空间必须且只须 E_1 和 E_2 均为 (B)-空间.

证. 积空间 $E_1 \times E_2$ 亦为一赋范线性空间是明显的. 下面,我们仅证明定理的后一命题.

1) "$\Longrightarrow$" 若设 $E_1 \times E_2$ 是 (B)-空间,则对于 E_1 中的任一 Cauchy 列 $\{x_1^{(n)}\}$, 由于此时元 $\{(x_1^{(n)}, \theta)\}$ 亦为积空间的 Cauchy 列,因而应有元 $(x_1^0, \bar{x}_2) \in E_1 \times E_2$. 使得

$$(x_1^{(n)}, \theta) \to (x_1^0, \bar{x}_2) \quad (n \to \infty).$$

但注意到

$$\|x_1^{(n)} - x_1^0\| \leqslant \|x_1^{(n)} - x_1^0\| + \|\bar{x}_2\| = \|(x_1^{(n)} - x_1^0, \bar{x}_2)\|$$
$$= \|(x_1^{(n)}, O) - (x_1^0, \bar{x}_2)\|,$$

可以得出 $x_1^{(n)} \to x_1^0 \in E_1 (n \to \infty)$，$(\bar{x}_2 = \theta)$. 即 E_1 是 (B)-空间. 类似地可证 E_2 也是 (B)-空间，从而得出定理的必要性.

2) "$\Longleftarrow$" 若设 E_1, E_2 均为 (B)-空间，又设 $\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\}$ 为 $E_1 \times E_2$ 中的 Cauchy 列，那么，由关系式

$$\|x_1^{(n)} - x_1^{(m)}\| + \|x_2^{(n)} - x_2^{(m)}\| = \|(x_1^{(n)} - x_1^{(m)}, x_2^{(n)} - x_2^{(m)}\|$$
$$= \|(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - (x_1^{(m)} - x_2^{(m)})\| \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

可以推出

$$\|x_1^{(n)} - x_1^{(m)}\| \to 0, \|xx_2^{(n)} - x_2^{(m)}\| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

即 $\{x_1^{(n)}\}$ 与 $\{x_2^{(n)}\}$ 分别为空间 E_1 与 E_2 内的 Cauchy 列，因此，由空间 E_1, E_2 的完备性假设则知，必存在元 $x_1^0 \in E_1$, $x_2^0 \in E_2$，使得

$$\|x_1^{(n)} - x_1^0\| \to 0; \ \|x_2^{(n)} - x_2^0\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

这样便可导出

$$\|(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - (x_1^0, x_2^0)\|$$
$$= \|x_1^{(n)} - x_1^0\| + \|x_2^{(n)} - x_2^0\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

即 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \to (x_1^0, x_2^0) \in E_1 \times E_2 (n \to \infty)$. 因而导出积空间 $E_1 \times E_2$ 也是 (B)-空间，从而得出了定理的充分性. 证毕.

注 9. 为了第五章的需要，我们必须指出：上面的定理 4 对于赋"准范"线性空间亦是正确的(相应将 (B)-空间换为 (F)-空间).

习 题

1. 设 E 是(B)-空间，E_0 是 E 的一有限维线性真子空间，试证明：$\forall [x] \in E/E_0$，必 $\exists x \in [x]$，使得 $\|x\| = \|[x]\|$.

2. 设 $E_l (l \in I)$ 是一族 (B)-空间，定义积空间

$$E = \prod_{l \in I} E_l = \{(x_l) | x_l \in E_l (l \in I), \sup_{l \in I} \|x_l\| < \infty\},$$

在 E 中定义运算及范数

$$(x_l) + (y_l) = (x_l + y_l), \quad \alpha(x_l) = (\alpha x_l),$$

$$\|(x_l)\| = \sup_{l\in I}\|x_l\|, \quad \forall x_l, y_l \in E(l\in I), \alpha\in \boldsymbol{K}.$$

试证明：E 是一个 (B)-空间。

3．设 $E_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 (B)-空间，在积空间 $\prod_{k=1}^{n} E_k$ 中，元 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的加法与数乘运算如上题类似地定义，而定义范数

$$\|x\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_n\|\}$$

或

$$\|x\|^* = \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p\right)^{1/p} \quad (p\geqslant 1).$$

试证明：在上两种范数的定义下，积空间均成为 (B)-空间.

4．试证明：在本节定理 2 中，如果改其赋"拟范"空间为赋"拟准范"空间，则相应的商空间 E/E_0 必为一赋"准范"线性空间.

5．试证明本节注 9.

§ 1.5. 赋范线性空间的等价与完备化

(一)

定义 1. 我们称两个赋范线性空间 E 和 E_1 等价，是指存在一个由 E 到 E_1 上的"线性同构"映象 φ(即有"一一对应"的映象 φ，使得

$$\varphi(\alpha x+\beta y) = \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y), \forall x, y\in E, \alpha, \beta\in \boldsymbol{K}),$$

并且这映象是"保范"的(即有 $\|\varphi(x)\| = \|x\|, \forall x\in E$)，那么，我们称 φ 为等价映象.

注 1. 由定义我们显然可以看出，一个等价映象必是一个"双方连续"的线性映象，因此，两个等价的赋范线性空间必是"线性同胚"的，反之则未必成立，我们可举一反例.

反例. 设 $C^{(1)}[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上具有连续导函数的函数全体，我们引入两个范数：

$$\|x\|_1 = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|,$$

$$\|x\|_2 = |x(a)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|, \quad \forall x\in C^{(1)}.$$

那么，$C^{(1)}$ 以范数"$\|\cdot\|_1$"与范数"$\|\cdot\|_2$"所成的两种赋范线性空

间是“线性同胚”的，但不是“等价”的．

验． 为验证上面前半段结果，我们只要验证关系式

$$\|x_n\|_1 \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_2 \to 0 \quad (n\to\infty)$$

和

$$\|x_n\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_1 \to 0, (n\to\infty); \forall\{x_n\} \subset C^{(1)}$$

就可以了．事实上，从范数定义可知：$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1, \forall x\in C^{(1)}$，因此，上面关系式的前一式显然成立．另一方面，注意到一致收敛函数列的逐项积分性质，当我们假设有函数列 $\{x_n(t)\}\subset C^{(1)}$ 满足

$$\|x_n\|_2 = |x_n(a)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n'(t)| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

时，便可得到

$$x_n(a)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

及

$$x_n(t)-x_n(a)=\int_a^t x_n'(\xi)d\xi \xrightarrow[\text{(一致)}]{} 0 \quad (n\to\infty), \forall t\in[a,b].$$

从而得出

$$\|x_n\|_1 = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n'(t)| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

这样，即证得 $C^{(1)}$ 对于上述两种范数所构成的赋范线性空间是“线性同胚”的．

至于该两赋范空间不等价的情形，显然可由其不恒满足关系式 $\|x\|_1=\|x\|_2, \forall x\in C^{(1)}$ 而得到。验毕．

注 2. 由上面的反例，我们利用本节习题 2 的结果可以看出：虽然 $C^{(1)}[a,b]$ 的元在范 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 下所成的两空间不等价（不“等距同构”），但此两范数都是等价的．也即有，虽然在以上反例中不能有 $\|\cdot\|_1=\|\cdot\|_2$ 恒成立，然而却可以找到一个正数 α，使得恒有关系式

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1, \quad \forall x\in C^{(1)}$$

成立．特别可以得到下面有趣的结果：存在一个正数 α，使得对于 $[a,b]$ 上任意具有“Riemann 可积的导函数”的函数 $x(t)$，均有关系式

$$\alpha\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| + \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|\right) \leqslant |x(a)| + \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|$$

成立.

例 1. 在空间 (c) 或 (m) 或 (l^p) 中,若令 φ 为映象

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n,\cdots)\xrightarrow{\varphi}(0,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n,\cdots)$$

则它们均使空间"等价"于其内的一个真子空间. 其后者乃由第一个坐标恒为 0 的所有对应数列组成.

注 3. 上面的例子给出了与集合论中类似的一个性质,即,无穷维的赋范线性空间可以等价于它的真子空间. 同样地,与集合论中该性质类似,我们还可以得知:对于有限维的空间而言,上面的情况是不会发生的. 即,"有限维的赋范线性空间是绝不能与其真子空间等价的",这里,我们就不详细论证了,有兴趣的读者可以参看文献[11].

例 2. 空间 l^2 与 $L^2[a,b]$ 等价.

验. 若设 $e_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 是 $L^2[a,b]$ 的完全规范正交组,则 $\forall x(t)\in L^2[(a,b]$,必有 $x(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne_n(t)$ (其中,a_n 是 $x(t)$ 对 $e_n(t)$ 的 Fourier 系数,$(n=1,2,\cdots)$) 显然,$x(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne_n(t)$ 与 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ 是线性同构的,且由实变函数论中的 Riesz-Fischer 定理(参看文献[111]第七章§3),我们又有 $\|x\|=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 从而可知以上映象是保范的. 验毕.

注 4. 上例在量子力学中即表现为 Schrödinger 的"波动力学"和 Heisenberg 的"矩阵力学"是等价的.

(二)

下面我们转到一个赋范线性空间的完备化问题的讨论.

定理 1. 任何一个赋范线性空间 E_1 必可等价于一个 Banach 空间 $\mathscr{E}$ 中的稠线性子空间 $\mathscr{E}_1$.

证. 首先,我们设

$$\hat{E}_1=\{\{x_n\}\,|\,\{x_n\}\text{ 是 }E_1\text{ 中的 Cauchy 列}\},$$

并且在 $\hat{E}_1$ 中定义其"元"间的运算如下:

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},\ \alpha\{x_n\}=\{\alpha x_n\},$$
$$\forall\{x_n\},\{y_n\}\in\hat{E}_1,\ \alpha\in\boldsymbol{K}.$$

不难看出，$\hat{E}_1$ 构成一线性空间. 又对 $\hat{E}_1$ 中"元"定义范数.

$$\|\{x_n\}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|,\ \forall\{x_n\}\in\hat{E}_1.$$

(后面的极限是存在的,因为 $|\|x_n\|-\|x_m\||\leqslant\|x_n-x_m\|$,并且注意到 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而由数列极限存在的 Cauchy 准则可知.)显然，$\|\{x_n\}\|$ 是满足范数定义的 (ii) 和 (iii) 的，并且它还是一个非负数,因而知其构成一个"拟范"数. 下面,如果设

$$\hat{E}_0=\{\{x_n\}\mid\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0,\{x_n\}\in\hat{E}_1\}$$
$$=\{\{x_n\}\mid\|\{x_n\}\|=0,\{x_n\}\in\hat{E}_1\},$$

那么，由 § 1.4 定理 2 的推理. 可知相应的商空间 $\mathscr{E}=\hat{E}_1/\hat{E}_0$ 必为一赋范线性空间.

下面,我们作$\mathscr{E}$的一个子空间 $\mathscr{E}_1$,

$$\mathscr{E}_1=\{\widetilde{\{x\}}\mid 存在\ E_1\ 的“常驻列”(x,x,\cdots)\in\widetilde{\{x\}},\widetilde{\{x\}}\in\mathscr{E}\}.$$

首先,由 $\hat{E}_0$ 的假设及$\mathscr{E}$的构成，显然可知在 $\mathscr{E}_1$ 的每一个"元"(等价类)中绝不会含有 E_1 的两个不同的"常驻列". 而且，根据上面引用过的同一推理,我们还知道: 当设 $\widetilde{\{x\}}$ 中含有 E_1 的"常驻列"为 $\{x\}$ 时,我们总有关系式

$$\|\widetilde{\{x\}}\|=\|\{x\}\|=\lim\|x\|=\|x\|,\ \forall\widetilde{\{x\}}\in\mathscr{E}_1.$$

这样,我们可看出上面关于空间 E_1 与商空间$\mathscr{E}$ 的子空间 $\mathscr{E}_1$ 之间的映象 $x\longleftrightarrow\widetilde{\{x\}}$ 是"保范"的,此外,它显然还是一个线性同构映象,由此已导出原空间 E_1 与 $\mathscr{E}_1$ 是等价的.

其次,$\forall\widetilde{\{x_n\}}\in\mathscr{E}$,如果设$\{x_n\}\in\widetilde{\{x_n\}}$,那么,由其为Cauchy 列知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$ (自然数),使得,只要 $n\geqslant N$,就有 $\|x_n-x_N\|<\varepsilon/2$. 于是，当取一"常驻列" $\{x_N\}=(x_N,x_N,\cdots)\in\widetilde{\{x_N\}}\in\mathscr{E}_1$ 时，由上面各种范数的定义,可导出

$$\|\widetilde{\{x_n\}}-\widetilde{\{x_N\}}\|=\|\widetilde{\{x_n-x_N\}}\|\leqslant\|\{x_n-x_N\}\|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_N\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

从而得到 $\mathscr{E}_1$ 在 $\mathscr{E}$ 中是稠密的.

最后,我们来证明空间 $\mathscr{E}$ 是完备的. 事实上,如果设"元"列 $\{\widetilde{\{x_n^{(k)}\}}|k=1,2,\cdots\}$ 是 $\mathscr{E}$ 中的一 Cauchy 列,那么,由 $\mathscr{E}_1$ 在 $\mathscr{E}$ 中稠,知必有一"元"列 $\widetilde{\{y_n^{(k)}\}}\in\mathscr{E}_1(k=1,2,\cdots)$ 使得

$$\|\widetilde{\{x_n^{(k)}\}}-\widetilde{\{y_n^{(k)}\}}\|<\frac{1}{k}\quad(k=1,2,\cdots).\tag{1}$$

于是再由

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\{y_n^{(i)}\}}-\widetilde{\{y_n^{(j)}\}}\|&\leqslant\|\widetilde{\{y_n^{(i)}\}}-\widetilde{\{x_n^{(i)}\}}\|+\|\widetilde{\{x_n^{(i)}\}}-\widetilde{\{x_n^{(j)}\}}\|\\&\quad+\|\widetilde{\{x_n^{(j)}\}}-\widetilde{\{y_n^{(j)}\}}\|\\&<\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\|\widetilde{\{x_n^{(i)}\}}-\widetilde{\{x_n^{(j)}\}}\|,\end{aligned}$$

因而可知 $\{\widetilde{\{y_n^{(k)}\}}|k=1,2,\cdots\}$ 亦为空间 $\mathscr{E}_1$ 的 Cauchy 列, 于是由前面已证得的 E_1 与 $\mathscr{E}_1$ 等价,当设 E_1 中与 $\widetilde{\{y_n^{(k)}\}}$ 对应的元为 $z^{(k)}(k=1,2,\cdots)$ 时,我们显然可以看出

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\|y_n^{(k)}-z^{(k)}\|=0\quad(k=1,2,\cdots).\tag{2}$$

此外,当设元列 $\{z^{(n)}\}=\{z^{(1)},z^{(2)},\cdots,z^{(n)},\cdots\}$ 时其也必为原空间 E_1 中的一 Cauchy 列, 从而有 $\{z^{(n)}\}\in\hat{E}_1$, 且由它可确定一"元" $\widetilde{\{z^{(n)}\}}\in\mathscr{E}$. 这样,由各范数的定义及 (1), (2) 便可导出

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\{x_n^{(k)}\}}-\widetilde{\{z^{(n)}\}}\|&\leqslant\widetilde{\{x_n^{(k)}\}}-\widetilde{\{y_n^{(k)}\}}\|+\|\widetilde{\{y_n^{(k)}\}}-\widetilde{\{z^{(n)}\}}\|\\&<\frac{1}{k}+\|\{y_n^{(k)}\}-\{z^{(n)}\}\|=\frac{1}{k}+\lim_{n\to\infty}\|y_n^{(k)}-z^{(n)}\|\\&\leqslant\frac{1}{k}+\lim_{n\to\infty}\|y_n^{(k)}-z^{(k)}\|+\lim_{n\to\infty}\|z^{(k)}-z^{(n)}\|\\&=\frac{1}{k}+\lim_{n\to\infty}\|z^{(k)}-z^{(n)}\|.\end{aligned}$$

注意到 $\{z^{(n)}\}$ 是 Cauchy 列, 则由上式即得出 $\widetilde{\{x_n^{(k)}\}}\to\widetilde{\{z^{(n)}\}}(k\to\infty)$,也即空间 $\mathscr{E}$ 是完备的. 证毕.

注 5. 上面的定理 1 实际上是距离空间的完备化定理在赋范空间上的具体化,那里的空间 $\mathscr{E}$ 常称为空间 E_1 的"完备化空间",

该证明方法正是 Cauchy 对于实数所采用过的. 由于有了这个定理，在某些情况下，人们就可以把赋范线性空间看作是 Banach 空间，否则可以先将它完备化以后再来讨论. 当然，我们同时还要强调指出，在另一些情况下，赋范线性空间的完备性假设是起着极其重要的作用的，一旦消除就会使许多重要的定理失效，我们在以后必须注意这种情况.

我们举两个关于空间完备化的例子.

例 1. 设 (l_0^p) $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示所有“有限的”有序数组 $\{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) | \xi_k \in \boldsymbol{K}, k = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots\}$，其内加法与数乘运算如常（当两元所取数组个数不同时，可令个数小者后面加上 0，使之个数相同），定义范数

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p},\ \forall x = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) \in (l_0^p).$$

这时，容易验证 (l_0^p) 构成一个赋范线性空间，但却不是完备的. 事实上，若取空间 (l_0^p) 中的一元列 $\{x_n\}$ 为

$$x_1 = (1),\ x_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right),\ x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}\right), \cdots,$$

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}\right), \cdots,$$

由于（当设 $m > n$ 时）

$$\|x_m - x_n\| = \left[\sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{1}{2^k}\right)^p\right]^{1/p} = \left(\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{1/p} \to 0$$

$$(n, m \to \infty),$$

则知 $\{x_n\}$ 是空间内的一 Cauchy 列，然而 $\{x_n\}$ 在 $\{l_0^p\}$ 内却无极限（因其极限元乃是一个无穷数组）. 易见，(l_0^p) 在完备空间 (l^p) 内是稠的，故综合上面的论述可导出 (l_0^p) 的完备化空间就是 (l^p).

例 2. 设 $C_0[a, b]$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一切“多项式”的全体所成的线性空间，并且定义范数

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |P(t)|,\quad \forall x = p(t) \in C_0[a, b].$$

显然，$C_0[a, b]$ 构成一赋范线性空间，但却是不完备的，因为

多项式可以在 $[a, b]$ 上一致收敛于一个非多项式的连续函数. 但另一方面, 由于空间 $C_0[a, b]$ 在完备空间 $C[a, b]$ 内到处稠密(由 Weierstrass 连续函数及多项式一致逼近定理可知), 故 $C_0[a, b]$ 的完备化空间是 $C[a, b]$. 验毕.

(三)

对于赋"准范"的线性空间而言,相应的完备化定理也是成立的,这里,为了使原空间的"准范"仍然保持(上面定理 1 证明中的)空间 $\hat{E}_1$ 亦为一赋"拟、准范"空间,我们必须用到,对于空间的准范而言, $\|\alpha x\|$ 也是 (α, x) 的"二元连续"函数的性质. 为了验证这一事实,我们需要介绍函数论中的"L 测度对于平移的连续性."

首先, 我们先来回忆一下关于两个集 A, B 为"对称差"的概念[62]. 集 A, B 的**对称差**是指集 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ (即 A, B 两集中除去其共同部份所余之集), 记为 $A\triangle B$. 由此, 我们不难验证(下面需要用到的)关于对称差的一个性质: $A\triangle B\subset(A\triangle C)\cup(C\triangle B)$.

有了上面关于对称差的关系式,我们就可得到关于"L 测度对于平移连续"的命题.

引理 1. 对于复平面上的任意有界可测集 A 均有

$$\mu[(A+\delta)\triangle(A)]\to 0 \quad (\delta\to 0).$$

这里, 值得注意的是 δ 为任意复数. 因此与 § 1.2, § 1.3 一样, 实际上是在二维空间中应用熟知的函数论中的结果来讨论"复平面"上的集合及函数的性质.

证. 从可测集的基本性质可知,如 A 为一有界可测集,那么, $\forall\varepsilon>0$,必存在集 $A_0\supset A$, 使得 $\mu(A\triangle A_0)=\mu(A\backslash A_0)<\frac{\varepsilon}{2}$,且存在有界开集 $U\supset A$,使得 $\mu(U\triangle A_0)<\frac{3}{4}$, 并存在一正数 δ, 使得对复平面的"原心开球"$S(0, \delta)=\{z\,|\,|z|<\delta,\ z\in\boldsymbol{C}\}$, 有 $\{A_0+S(0, \delta)\}\subset U$.

这样 $\forall z_0\in\boldsymbol{C}$,只要点 z 满足 $|z-z_0|<\delta$,那么,由

$$\mu((A_0+z)\triangle(A_0+z_0))$$
$$\leqslant \mu((A_0+z)\backslash(A_0+z_0))+\mu((A_0+z_0)\backslash(A_0+z)),$$
并注意到 L 测度对于"平移"的不变性，可得到
$$\mu((A_0+z)\backslash(A_0+z_0))+\mu((A_0+z_0)\backslash(A_0+z))$$
$$=\mu((A_0+z-z_0)\backslash A_0)+\mu((A_0+z_0-z)\backslash A_0)$$
$$\leqslant 2\mu((A_0+s(0,\delta))\backslash A_0)\leqslant 2\mu(U\backslash A_0)<\varepsilon.$$
因而，由于上面关于对称差的性质，从上式也可导出
$$|\mu((A+z)\Delta(A))-\mu((A+z_0)\Delta(A))|$$
$$\leqslant \mu((A+z)\Delta(A+z_0))<\varepsilon.$$
证毕.

由引理 1 和函数论中著名的 Егоров 定理，可得出下面的引理：

引理 2. 设"$\|\cdot\|^*$"为定义在复线性空间 E 上的一个准范数. 那么 $\|\alpha x\|^*$ 必为 (α,x) 的"二元"连续函数.

证. 首先，我们来证明当复数 α 满足 $|\alpha|\leqslant|\alpha_0|$ 时（$|\alpha_0|$ 为一固定正数），必有
$$\|x_n\|\to 0\Rightarrow \sup_{|\alpha|\leqslant|\alpha_0|}\|\alpha x_n\|\to 0\quad(n\to\infty).$$
为此，对上述趋向零元的元列 $\{x_n\}$，如果令
$$p_n(\alpha)=\|\alpha x_n\|,\quad \forall\alpha\in \boldsymbol{C}\quad(n=1,2,\cdots).$$
那么，由准范数的性质，可知 $\{p_n(\alpha)\}$ 乃是定义在复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的一列连续函数，并且其满足性质
$$p_n(-\alpha)=p_n(\alpha)\quad(\text{绝对齐性})$$
$$p_n(\alpha+\beta)=\|(\alpha+\beta)x_n\|\leqslant\|\alpha x_n\|+\|\beta x_n\|$$
$$=p_n(\alpha)+p_n(\beta)\quad(\text{次加性}).$$
$$\forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}\quad(n=1,2,\cdots).$$
再由 $\{x_n\}$ 的假设，还有
$$p_n(\alpha)\to 0\quad(n\to\infty),\quad \forall\alpha\in\boldsymbol{C}.$$
从而根据 Егоров 定理，我们推出：必存在一集 $B\subset\boldsymbol{C}$（不妨设 B 是有界集），使得 $\mu(B)>0$，而在集 B 上有 $p_n(\alpha)\xrightarrow[(\text{一致})]{}0(n\to\infty)$.

另一方面，由上面的引理 1 可知：存在一正数 $|\delta_0|$，使得 $\forall\delta\in$

$\boldsymbol{C}$,只要 $|\delta| \leqslant |\delta_0|$, 就有 $\mu[(B+\delta)\triangle(B)] < \frac{1}{2}\mu(B)$. 由此,根据对称差定义我们可得 $\mu[(B+\delta)\cap(B)] > \frac{1}{2}\mu(B)>0$. 因而,$\forall\delta\in\boldsymbol{C}$, 只要 $|\delta| \leqslant |\delta_0|$,则 $\exists\beta,\beta'\in B$,使得 $\beta'+\delta=\beta$. 这样,由以上结果我们有 $\forall|\delta| \leqslant |\delta_0|$,

$$p_n(\delta) \leqslant p_n(\beta) + p_n(-\beta') = p_n(\beta) + p_n(\beta') \xrightarrow[(\text{一致})]{} 0 \quad (n\to\infty).$$

当设自然数 m_0 满足 $m_0|\delta_0| \geqslant |\alpha_0|$ 时, 由于 $\left|\frac{\alpha}{m_0}\right| \leqslant |\delta_0|$, 故可导出 $\forall|\alpha| \leqslant |\alpha_0|$,

$$p_n(\alpha) = p_n\left(m_0\frac{\alpha}{m_0}\right) \leqslant m_0 p_n\left(\frac{\alpha}{m_0}\right) \xrightarrow[(\text{一致})]{} 0 \quad (n\to\infty).$$

此即得到了前面所需的结论.

然后,我们注意到,$\forall x_0\in E$ 及 $\forall\alpha_0\in\boldsymbol{C}$, 如果 $\{x_n\}\subset E$ 是满足 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 的任一元列, $\{\alpha_n\}\subset\boldsymbol{C}$ 是满足 $\alpha_n\to\alpha_0(n\to\infty)$ 的任一数列,那么,在关系式

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha_0 x_0\| &\leqslant \|\alpha_n x_n - \alpha_n x_0\| + \|\alpha_n x_0 - \alpha_0 x_0\| \\ &= \|\alpha_n(x_n - x_0)\| + \|(\alpha_n - \alpha_0)x_0\|\end{aligned}$$

中,对于等式右边第一式利用上面导出的结果,对于第二式利用准范的性质,立即可以导出本引理的结论. 证毕.

注 6. 显然可见,上面的引理 1, 2 对于实数域的情况当然也是成立的.

有了上面的引理, 下面我们就可以来介绍关于赋准范线性空间的完备化定理.

定理 2. 每一个赋准范线性空间 E_1,必可等价于一个 Fréchet 空间 $\mathscr{E}$ 中的稠线性子空间 $\mathscr{E}_1$.

证. 我们只要用类似上面关于赋范线性空间完备化定理的证明步骤就可以将本定理导出. 为了证相应空间 $\hat{E}_1$ 上定义的 $\|\{x_n\}\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$ 构成"拟、准范数",当在证明关系式

$$\alpha_k \to 0 \Rightarrow \|\alpha_k\{x_n\}\| \to 0$$
$$(k\to\infty), \forall\{x_n\}\in\hat{E}_1$$

时，我们需要用到上面引理 2 的结果．事实上，由 $\|\alpha x\|$ 是 (α, x) 的二元连续函数，可知 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，使得当 $|\alpha| < \delta$，$\|x\| < \delta$ 时，便有 $\|\alpha x\| < \varepsilon/2$．因此，$\forall\{x_n\} \in \hat{E}_1$，由 $\{x_n\}$ 是 E_1 中的一 Cauchy 列，故对上述正数 ε，$\exists N$（自然数），使得当 $n \geqslant N$ 时，有 $\|x_n - x_N\| < \delta$；另外，由于 $\alpha_k \to 0(k \to \infty)$，故知 $\exists K$(自然数)，使得当 $k \geqslant K$ 时，有 $|\alpha_k| < \delta$．于是，就可得到

$$\|\alpha_k x_n\| \leqslant \|\alpha_k(x_n - x_N)\| + \|\alpha_k x_N\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|\alpha_k x_N\|;$$

$$\forall k \geqslant K, \ n \geqslant N.$$

同样，根据准范数的性质，我们还知道，当 k 足够大时（例如 $k \geqslant K^*$ $(\geqslant K)$），必有 $\|\alpha_k x_N\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，因此，得出 $\|\alpha_k x_n\| < \varepsilon$ $(\forall k \geqslant K^*, n \geqslant N)$．最后，由 $\hat{E}_1$ 上"$\|\cdot\|$"的定义，可导出

$$\|\alpha_k\{x_n\}\| = \lim_{n\to\infty}\|\alpha_k x_n\| \to 0 \quad (\alpha_k \to 0).$$

详细的证明留给读者完成．证毕．

习　　题

1．试验证：在"线性同构"的意义下，$\forall p, q > 0$，只要 $p \leqslant q$，就有

$$(l^p) \subset (l^q), \quad L^q[a, b] \subset L^p[a, b]$$

（即空间 $(l^p)(L^p[a, b])$，随 p 增大而"增大"（而"减小"））．

2．（我们称范数 $\|\cdot\|_2$ 比范数 $\|\cdot\|_1$ **不弱**，是指 $\forall\{x_n\} \subset E$，$x_0 \in E$，均有

$$\|x_n - x_0\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty) \Rightarrow \|x_n - x_0\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

我们称两范数 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ **等价**，是指 $\|\cdot\|_2$ 不比 $\|\cdot\|_1$ 弱，且 $\|\cdot\|_1$ 也不比 $\|\cdot\|_2$ 弱．）试证明：为了 E 中定义的两个范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 等价，必须且只须 $\exists\alpha, \beta > 0$，使得恒有

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

3．试验证：在 §1.4 习题 3 中积空间 $\prod_{k=1}^{n} E_k$ 定义的两种范数是互相等价的．

4．试验证：空间 (c) 与 (c_0) 是线性同胚的，但不是等价的．

5．设 $AC[a, b]$ 表示在 a 点取零值的所有 $[a, b]$ 上绝对连续函数的全

体，定义范数

$$\|x\| = \int_a^b |x'(t)| dt.$$

试证明：空间 $AC[a, b]$ 与 $L^1[a, b]$ 是等价的.

6. 设 $C^{(k)}$ 是 $[0, 1]$ 上一切具有连续的 k 阶导函数的函数全体，运算如常，定义范数

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(i)}(t)|, \quad \forall x \in C^{(k)}$$

(§1.2 的习题中，我们已知其为 (B)-空间)，今又设 C_k 表示 $k+1$ 个 B-空间 $C[0, 1]$，按范

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})\| = \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|, \quad \forall x_i \in C[0, 1], 1 \leqslant i \leqslant k+1$$

所成的积空间. 试证明：$C^{(k)}$ 必等价于 C_k 中的一个闭线性子空间.

7. 设 $L_0^p[a, b]$ 是定义在 $[a, b]$ 上的复值"连续函数"的全体，且定义范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad (p \geqslant 1 \text{ 为任一固定正数}).$$

试说明 $L_0^p[a, b]$ 构成一不完备的赋范线性空间，并找出其完备化空间.

8. 设 $C_0^{(k)}[a, b]$($k \geqslant 1$ 为任一固定自然数) 是 $[a, b]$ 上一切具有"k 阶连续导函数"的函数 $x(t)$ 的全体，且范数定义为

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$$

所成的赋范线性空间. 试说明 $C_0^{(k)}[a, b]$($k \geqslant 1$) 构成一不完备的赋范线性空间，并找出其完备化空间.

9. 试证明本节定理 2 关于赋准范空间的完备化定理.

第二章　线性算子的基本概念

§2.1. 线性算子(泛函)的定义及例

(一)

在线性代数中，我们曾经遇到过把一个 n 维向量空间 E^n 映象到另一 m 维向量空间 E^m 的运算，就是借助于 m 行 n 列的矩阵

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

对 E^n 中的元起作用来达到的. 同样地，在数学分析中我们亦遇到过把一个函数变为另一个函数或一个数的运算，即微分和定积分运算等等. 把上述的所有运算抽象化后，我们就得到在一般赋范线性空间中的算子的概念.

定义 1. 设 E, E_1 为赋范线性空间，集 $D\subset E$，如果 T 为定义在 D 上的映象，使得

$$D\xrightarrow{\mathrm{T}}W\subset E_1,$$

那么称 T 为算子；称 D 为 T 的定义域，常记为 $\mathscr{D}(\mathrm{T})$；W 称为 T 的值域，常记为 $W(\mathrm{T})$. 当 T 在 $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 上不恒为零元时，则称 T 为非零算子.

定义 2. (i) 算子 T 称为可加的，是指

$$\mathrm{T}(x+y)=\mathrm{T}(x)+\mathrm{T}(y),\quad \forall x,y\in\mathscr{D}(\mathrm{T}).$$

(ii) T 称为齐性的，是指

$$\mathrm{T}(\alpha x)=\alpha\mathrm{T}(x),\quad \forall x\in\mathscr{D}(\mathrm{T}),\forall\alpha\in\boldsymbol{K}.$$

(iii) T 称为线性的(分配的)，是指 T 既是可加的又是齐性的.

(iv) T 称为连续的，是指

$$x_n \to x_0 \Rightarrow \mathrm{T}(x_n) \to \mathrm{T}(x_0) \quad (n \to \infty),$$
$$\forall x_0, x_n \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

(v) T 称为有界的，是指 T 把任意有界集映象为有界集. 特别地，当 T 为"可加"或"正齐性"算子时，以上定义等价于：存在一正数 C，使得

$$\|\mathrm{T}(x)\| \leqslant C\|x\|, \quad \forall x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}).$$

(事实上，由 T 的可加性可导出，对任意有理数 r，均有 $\mathrm{T}(rx) = r\mathrm{T}(x)$；由此当 T 有界时，不难用归谬法得到上面关系式.)对于一般的非线性算子，我们称满足以上不等式的为强有界算子(§3.2，§4.1 等处均会涉及到).

(vi) 称 T 为稠定的，是指 $\overline{\mathscr{D}(\mathrm{T})} = E$ (也即 T 的定义域在全空间稠).

注 1. 在上述定义中，当 $E_1 = \boldsymbol{K}$ (数域)时，则称算子 T 为泛函，通常用 f, g 表示，而且相应地有以上几个定义. 当上述定义中，$E = \boldsymbol{K}$ 时，则称算子 T 为抽象函数，一般用 t 表示 $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 中的元，而 $x(t) \in E_1$ 表示其映象元. 通常，人们常把有界(或连续)分配算子称为有界(或连续)线性算子.

定理 1. 若设 E, E_1 均为赋范线性空间，T 是由 E 到 E_1 内的"可加"算子，那么，如果 T 是连续的，则其必是实齐性的(即对实数是齐性的).

证明从略，作为本节习题.

定理 2. 若设 T 是如上所设的"可加"算子，那么，为了 T 是连续的必须且只须 T 是有界的.

证. 1)"$\Longleftarrow$"如果有正数 c，使得 $\|\mathrm{T}(x)\| \leqslant c\|x\|, \forall x \in \mathscr{D}(\mathrm{T})$，那么，$\forall x_n, x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$. 由 T 的加法性可得

$$\|\mathrm{T}(x_n) - \mathrm{T}(x)\| = \|\mathrm{T}(x_n - x)\| \leqslant c\|x_n - x\| \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由此即得

$$x_n \to x \Rightarrow \mathrm{T}(x_n) \to \mathrm{T}(x) \quad (n \to \infty).$$

2)"$\Longrightarrow$" 反之，如果 T 是连续的可加算子，但 T 是无界的，

那么，从定义则知，$\exists\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，使得

$$\|T(x_n)\|>2n\|x_n\| \quad (n=1,2,\cdots). \tag{1}$$

由此当然可知 $x_n\neq\theta$（否则由T的可加性导出 $0>0$，矛盾），从而可取相应的有理数 r_n，使得 $\|x_n\|\leqslant r_n<2\|x_n\|$ $(n=1,2,\cdots)$，这样一来，由 $\left\|\frac{x_n}{r_n}\right\|\leqslant 1$ $(n=1,2,\cdots)$，便有

$$y_n=\frac{x_n}{nr_n}\ \theta\to\ (n\to\infty).$$

然而，从关系式(1)并注意到 $\{r_n\}$ 的选取，却得到

$$\|T(y_n)\|=\left\|T\left(\frac{x_n}{nr_n}\right)\right\|=\frac{1}{nr_n}\|T(x_n)\|>\frac{1}{nr_n}2n\|x_n\|>1$$
$$(n=1,2,\cdots).$$

其显然与T的连续性假设矛盾．证毕．

根据本节定理2，不难直接导出下面几个常用的推理：

推理1． 如果设T是上面所设的可加算子，那么，只要T将 E 中某一含有内点的集映象为 E_1 中的有界集，则T就是连续的；反之，如果T是连续的，则其必将 E 中的任意有界集映象为 E_1 中的有界集．

推理2． 在推理1中，若 $E_1=\boldsymbol{R}$，只要实可加泛函 f 将 E 中某一含有内点的集映象为"上"(或"下")有界的实数集，则 f 就是连续线性泛函．

推理3． 如果设T为定义在赋范线性空间 E 内集 $\mathscr{D}(T)$ 上的线性算子，那么，为了T存在连续的逆算子 T^{-1}，必须且只须存在正数 α，使得 $\|T(x)\|\geqslant\alpha\|x\|,\forall x\in\mathscr{D}(T)$．

注2． 对于在赋"准范"线性空间上所定义的线性算子，从算子的"强有界性"可以导出其连续性，然而反之却未必成立(这是必须要留心的！)．

事实上，上面的前半段结论是明显的，为了得到其后半段结论，我们先注意下面的一个反例．

反例．如果设 R_* 为在实数域中以准范数

$$\|x\|_*=\sqrt{|x|},\quad \forall x\in R_*$$

而成的赋准范线性空间，那么在 R_* 上定义的

$$f(x)=x, \quad \forall x\in R_*$$

必为在 R_* 上连续但不强有界的线性泛函.

验. 首先，由于

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|=(\sqrt{|x-x_0|})^2=\|x-x_0\|_*^2,$$
$$\forall x_0, x\in R_*.$$

因而，我们显然可知 $f(x)$ 是连续的泛函. 其次，又由

$$|f(x)|=|x|=\|x\|_*^2=(\|x\|_*)\|x\|_*, \quad \forall x\in R_*,$$

可以看出不能存在一正常数 β，使其满足关系式 $|f(x)|\leqslant\beta\|x\|_*$，$\forall x\in R_*$. 从而可知 f 为非强有界泛函. 最后由定义还知 f 是分配的，此即导出 f 是在 E 上连续而非强有界的线性泛函. 验毕.

注 3. 对于一个有限维的赋范线性空间 E_n 而言，其上的"线性"算子必定连续.[1)]

事实上，只要在 E_n 中选出一组基底 $\{e_k|_{k=1,2,\cdots,n}\}$，则由关系式

$$\left\|A\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k A(e_k)\right\|$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\|A(e_k)\|\right), \quad \forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in E_n$$

以及 §1.1 中关于在有限维赋范线性空间内元的按范收敛与其各坐标收敛是等价的命题，便可知 A 是连续的.

注 4. 在无穷维的赋范线性空间中，"线性"算子未必是连续的. 可见以下反例.

反例 1. 如果空间 $C_0^{(1)}[a,b]$ 如 §1.5 习题 8 所设（$[a,b]$ 上具有一阶导函数的函数全体，且范数为 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$），那么，$C_0^{(1)}$ 上的泛函

$$f(x)=x'(t_0), \quad \forall x=x(t)\in C_0^{(1)}[a,b]$$

（其中，t_0 为 $[a,b]$ 内任一固定点）必为线性但不连续.

验. f 的分配性是显然的. 至于当 f 的不连续性可由选 $C_0^{(1)}$

1) 这里及以后，我们常常省略说明此算子的值域所在的空间亦一赋范线性空间，并且我们一般均用同一符号"$\|\cdot\|$"表示各自的空间范数.

中元列为 $\{x_n\} = \left\{\frac{\sin[n(t-t_0)]}{n}\right\}$ 时，由关系式

$$\|x_n\| = \sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\frac{\sin[n(t-t_0)]}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

与

$$f(x_n) = \left(\frac{\sin[n(t-t_0)]}{n}\right)'_{t_0} = \cos 0 = 1 \to 1 \quad (n\to\infty)$$

得出．验毕．

反例 2. 如果空间 $C_0[a,b]$ 如 §1.5（二）中例 2 所设（多项式的全体，范数为 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|P(t)|$），那么，$C_0[a,b]$ 上的泛函族

$$f_{(k,t_0)}(p) = p^{(k)}(t_0) \quad (\text{其中，} t_0 \in [a,b] k = 0,1,2,\cdots,)$$

均为线性但不连续的．

验．泛函 $f_{(k,t_0)}(k = 0,1,2,\cdots;t_0 \in [a,b])$ 的分配性是显然的，下面仅验证其不连续性．我们对 k 分以下两种情况验证．

1）当 $k=0$ 时，取函数 $y_0(t) = \frac{1}{t-t_0}$，其显然在 $[a,b]$ 上连续．因而由 Weierstrass 定理可知存在多项式列 P_n，使得在 $C_0[a,b]$ 范数下，有 $P_n \to y_0\ (n\to\infty)$．这样，做元列 $\bar{P}_n = \frac{P_n}{y_0} - 1$，由 $\bar{P}_n(t) = (t-t_0)P_n(t) - 1$，知 $\bar{P}_n(t) \in C_0[a,b]$，且有

$$\begin{aligned}\|\bar{P}_n\| &= \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|(t-t_0)P_n(t) - 1| \\ &= \sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|(t-t_0)\left(P_n(t) - \frac{1}{t-t_0}\right)\right| \\ &= \sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|(t-t_0)(P_n(t) - y_0(t))\right| \\ &\leqslant (|b-t_0| + |b-a|)\|P_n - y_0\| \to 0(n\to\infty).\end{aligned}$$

但是

$$f_{(0,t_0)}(\bar{P}_n) = \bar{P}_n(t_0) = -1 \to -1 \quad (n\to\infty).$$

故知泛函 $f_{(0,t_0)}$，$(t_0 \in [a,b])$ 均不是连续的．

2）当 $k>0$ 时，我们可取函数 $y_0^*(t) = \frac{1}{(t-t_0)^{k+1}}$，其显然也为 $[a,b]$ 上的连续函数，从而类似验证 1）的方法，亦可推出

泛函 $f_{(k,t_0)}$ ($k=1,2,\cdots;t_0\in[a,b]$) 均是不连续的. 验毕.

(注意: 以上列举两个反例均是在不完备空间中的,可能会给读者带来一个想法,认为在完备空间中或许不会存在不连续的线性泛函. 其实这是错误的. 事实上,在 §3.1 中,我们将利用所谓"Hamel 基"的概念,"抽象地"在任意一个无穷维的赋范线性空间(即使是 Banach 空间)上构造出一个线性但不连续的泛函来. 这里,不详细讨论. 当在第四章讲过"共鸣定理"以后,我们可以看出,对于 (B)-空间或某些特殊的 (F)-空间,若其上的连续线性泛函列 $\{f_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在,则亦为空间上的连续线性泛函. 因此,一般说来,其上的线性不连续的泛函是不能用"级数"、"积分"等等"明确做出来"的).

注 5. 我们必须强调指出,本节上面的命题在算子(或泛函)不是"可加"的时候是不能保证成立的. 特别地,例如相对定理 2 而言,我们可以举出一个非可加泛函的有趣的反例,它在某一闭球上是连续的,但却是无界算子;并且在该闭球上可以取到任意大的值.

反例 3. 设 E 为一无穷维的赋范线性空间,则由 Riesz 引理可知(参看 §1.1)必能取出无穷元列 $\{x_n\}\subset E$, 使其满足 $\|x_n\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$, 且 $\|x_n-x_m\|\geqslant\varepsilon_0$ $(0<\varepsilon_0<1)$ ($n\neq m$ 时). 下面我们做 E 上的泛函

$$f(x)=\begin{cases} n, & \text{当 } x=x_n \text{ 时;} \\ n-2n\|x-x_n\|/\varepsilon_0 & \text{当 } \|x-x_n\|\leqslant\dfrac{\varepsilon_0}{2} \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x\in E \text{ 为其它情况时} \end{cases}$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

为了直观起见,图 2.1 大概地描绘了该"函数"的图形.

易见, $f(x)$ 在闭球

$$\bar{S}\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,\|x\|\leqslant 1+\frac{\varepsilon_0}{2},\ x\in E\right\}$$

上(其实在全空间 E 上亦是)为连续的泛函,但 $f(x)$ 在其内却可以取到任意大的值.

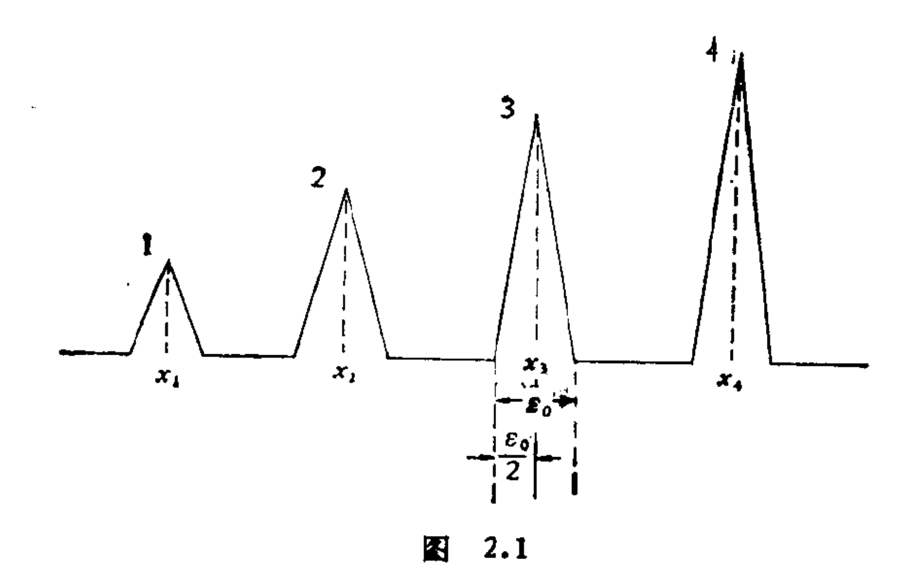


图 2.1

与上例类似，我们还可以举出在有界闭球 $\bar{S}\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ 上连续、有界，但不一致连续的泛函的例子：

取元列 $\{x_n\}\subset E$，并再取元列 $\{y_n\}\subset E$，使得 $\|y_n\|=1$，

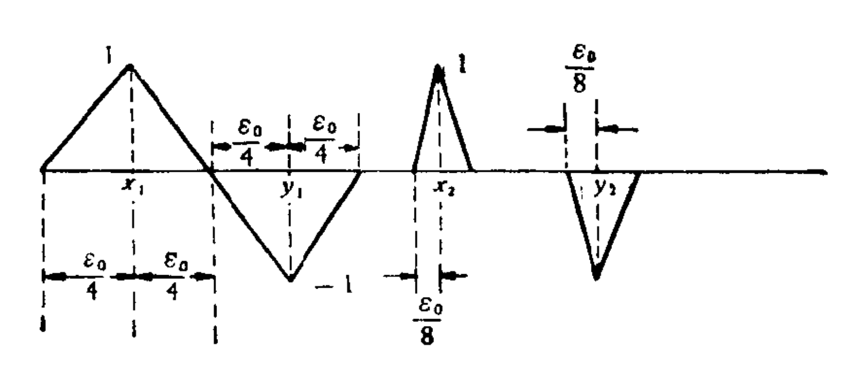


图 2.2

$$\|x_n-y_n\|=\frac{\varepsilon_0}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

做 E 上的泛函

$$f^*(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=x_n \text{ 时;}\\ -1, & \text{当 } x=y_n \text{ 时;}\\ 1-4n\|x-x_n\|/\varepsilon_0, & \text{当 } \|x-x_n\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{4n} \text{ 时;}\\ 4n\|x-y_n\|/\varepsilon_0-1, & \text{当 } \|x-y_n\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{4n} \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } x\in E \text{ 为其它情况时.}\end{cases}$$

注意：从上面两个例子可看出，对于"无穷维"的赋范线性空间而言，原来关于有限维空间中有界闭集上的连续函数性质都未必成立，其实质的原因是因为此时有界闭集已不是(自列)紧集了.

(二)

下面举出几个各种类型的算子的例子.

例 1. 设 E^n，E^m 分别为 n 维和 m 维的赋范线性空间，这时 E^n,E^m 中的元各可表为

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m),\quad \forall x\in E^n, y\in E^m.$$

如果设 $f_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 是 n 个变数的函数，那么，映象 T

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\xrightarrow{\mathrm{T}}(f_1(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),f_2(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\\ \cdots,f_m(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n))$$

显然是 E^n 到 E^m 中的算子，且有 $\mathscr{D}(\mathrm{T})=\bigcap\limits_{k=1}^{m}\mathscr{D}(f_k)\subset E_n$.

最后，由 §1.1，已知对于有限维空间来说，范数收敛等价于按各坐标收敛，因而，为使算子 T 连续，必须且只须每个函数 $f_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 均是 n 元连续函数. 特别地，当设 f_k 是线性函数，即

$$f_k(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\xi_i\quad(1\leqslant k\leqslant m)$$

时，相应的 T 则为定义在空间 E^n 上的连续线性算子(并且可以证明，从 E^n 到 E^m 内的所有有界线性算子的集合与 $m\times n$ 矩阵 (α_{k_i}) 的全体所成的集是线性同构的).

例 2. 在空间 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上，定义算子 K 使得

$$[\mathrm{K}(x)](t)=\int_\Omega k(t,s)x(s)\mu(ds),\quad \forall x\in L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu),$$

其中 $k(t,s)$ 是"积测度空间" $(\Omega,\mathscr{B},\mu)\times(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中的可测函数，并且是"平方可和"的也即满足

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega}|k(t,s)|^2(\mu\times\mu)(dtds)<+\infty.$$

那么，K 是 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 到它自身中的连续线性算子.

验．首先，由函数论中的 Fubini 定理可知，关系式

$$\int_{\Omega} |k(t,s)|^2 \mu(ds) < \infty$$

对$(-\infty,\infty)$上的 t 是"概"成立的．从而，$\forall x \in L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，我们可以推出，函数

$$[K(x)](t) = \int_{\Omega} k(t,s)x(s)\mu(ds)$$

对 t 是"概"存在的，且是 t 的可测函数．此外，由 Schwarz-буняковский 不等式，还有

$$|[K(x)](t)|^2 \leqslant \int_{\Omega} |k(t,s)|^2 \mu(ds) \cdot \int_{\Omega} |x(s)|^2 \mu(ds),$$

从而

$$\int_{\Omega} |[K(x)](t)|^2 \mu(dt)$$
$$\leqslant \iint_{\Omega \times \Omega} |k(t,s)|^2 (\mu \times \mu)(dtds) \cdot \int_{\Omega} |x(s)|^2 \mu(ds).$$

由于后者为有限数，故知 $K(x) \in L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，$\forall x \in L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$．当再令

$$\iint_{\Omega \times \Omega} |k(t,s)|^2 (\mu \times \mu)(dtds) = \beta^2 \quad (\beta > 0)$$

时，由以上论述推得

$$\|K(x)\| \leqslant \beta \|x\|, \qquad \forall x \in L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mu).$$

此外，K 显然是分配算子，所以当注意到前面定理 2 时即知，K 必为 $L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上的连续线性算子．验毕．

例 2′．如果在 (l^2) 中，定义算子 T

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \cdots)$$
$$\xrightarrow{T} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k}\xi_k, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}\xi_k, \cdots, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k, \cdots\right), \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (l^2)$$

（其中 $\sum_{i,k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 < \infty$），那么，T 是从 (l^2) 到其自身中的连续线性算子．

由以上得

$$
T=\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots & \alpha_{1n}\cdots \\
\alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots & \alpha_{2n}\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2}\cdots & \alpha_{nn}\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{pmatrix}.
$$

验. 此即例 2 的特殊情况,因为当取 $\Omega=(1,2,\cdots,n,\cdots)$, $\mu(\{n\})=1(n=1,2,\cdots)$ 时,当然空间 $L^2(\Omega,B,\mu)$ 中的元即成为一数列 $x=\{\xi_n\}$,其满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$,而范数为

$$
\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall x=\{\xi_n\}.
$$

因此就化成了空间 (l^2),从例 2 便可得到本例的结论. 验毕.

例 3. 设 E 是定义在具有"连续曲率"的平面闭曲线 Γ 上的连续函数全体所构成的赋范线性空间,那里定义范数

$$
\|x\|=\max_{t\in\Gamma}|x(t)|,\quad \forall x=x(t)\in E.
$$

又设 E_1 是定义在曲线 Γ 所包围的闭区域 $\bar{G}$ 上的二元连续函数所成的赋范线性空间,那里定义范数

$$
\|y\|=\max_{(\xi,\eta)\in\bar{G}}|y(\xi,\eta)|,\quad \forall y=y(\xi,\eta)\in E_1.
$$

在 E 上定义算子 T,使得

$$
x(t)\xrightarrow{T}y(\xi,\eta),\quad \forall x\in E;
$$

并且 $y(\xi,\eta)$ 是以 $x(t)$ 为边值所确定的偏微分方程中关于 Dirichlet 问题的解,则 T 为连续线性算子.

验. 首先,由数理方程的知识可知,在上面的假设下,Dirichlet 问题是可解的,且解是唯一的,从而知算子 T 是有定义的. 其次,又由该问题对边值条件是分配性依赖的,故知 T 为分配算子. 最后,由 Dirichlet 问题的解是对边值条件连续依赖的,故导出 T 为连续线性算子. 验毕.

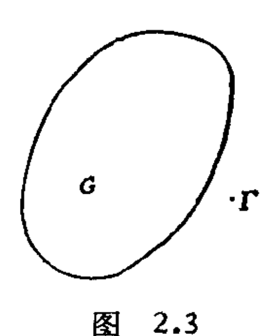


图 2.3

例 4. 如果在空间 $L^p(-\infty,+\infty)$ $(p>1)$ 上定义算子

$$[A(x)](t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(s)x(t-s)ds,\forall x=x(t)\in L^p(-\infty,+\infty),$$

其中，$a(t)\in L^1(-\infty,+\infty)$，那么，A 是从 $L^p(-\infty,+\infty)$ 到其自身内的连续线性算子.

验. 首先说明，$\forall x(t)\in L^p(-\infty,+\infty)$，函数 $[A(x)](t)$ 对于几乎所有的 t 均是存在的. 事实上，由 §1.2 的 Hölder 不等式可以得到

$$\begin{aligned}|[A(x)](t)|&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)|^{1/q}(|a(s)|^{1/p}|x(t-s)|)ds\\&\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)|ds\right)^{1/q}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)||x(t-s)|^pds\right)^{1/p}\\&=(\|a\|_{L^1})^{1/q}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)||x(t-s)|^pds\right)^{1/p}.\end{aligned}\tag{2}$$

而对于上式的后一积分，如果当“被积函数”对 t 来求积分时，则有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)||x(t-s)|^pdt&=|a(s)|\int_{-\infty}^{+\infty}|x(u)|^pdu\\&=|a(s)|\cdot\|x\|_{L^p},\end{aligned}$$

所以二重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}ds\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)||x(t-s)|^pdt$$

存在. 因此，根据 Fubini 定理，我们可知，交换积分次序后的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)||x(t-s)|^pds$$

也必存在. 从而得出积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)||x(t-s)|^pds$ 对于几乎所有的 t 都是存在的. 由此关系式(2)，也可导出函数 $[A(x)](t)$ 对几乎所有 t 均是存在的.

其次，由关系式(2)，并且再一次用 Fubini 定理，还可以得出

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}|[A(x)](t)|^pdt\\&\quad\leqslant(\|a\|_{L^1})^{p/q}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}|a(s)||x(t-s)|^pds\end{aligned}$$

$$=(\|a\|_{L^1})^{1+\frac{p}{q}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t-s)|^p dt=(\|a\|_{L^1})^p\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|x(u)|^p du<\infty.$$

即导出 $[A(x)](t)\in L^p(-\infty,+\infty)$，且有

$$\|A(x)\|\leqslant(\|a\|_{L^1})\cdot\|x\|,\qquad \forall x\in L^p(-\infty,+\infty).$$

最后，注意到算子 A 显然是分配的，因而由上面定理 2，即知其也是连续线性算子. 验毕.

例 5. 如果设 $C_{2\pi}$ 表示 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数全体，按范数

$$\|x\|=\max_{-\infty<t<\infty}|x(t)|$$

组成的 (B)-空间，考察其元 $x(t)$ 的 Fourier 级数的前 n 项部分和的算术平均值，

$$[\sigma_n(x)](t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x,t)\ \text{(Fejér 和)},\quad \forall x\in C_{2\pi},$$

则 σ_n 构成由 $C_{2\pi}$ 到其自身的连续线性算子.

验. 由 Fourier 展开定义，$\forall x\in C_{2\pi}$，我们有

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos ktdt,\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin ktdt,$$

且 $x(t)$ 的 Fourier 级数中前 k 项的部分和为

$$S_k(x,t)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i\cos it+\beta_i\sin it)\quad(k=1,2,\cdots).$$

因而必有

$$[\sigma_n(x)](t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x,t)$$
$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}[x(t+2s)+x(t-2s)]\left(\frac{\sin ns}{\sin s}\right)^2 ds.$$

上式显然亦属于 $C_{2\pi}$，故易知 σ_n 是空间 $C_{2\pi}$ 到自身的分配算子，并且由于

$$\|\sigma_n(x)\|\leqslant\frac{2}{n\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin ns}{\sin s}\right)^2 ds\right)\|x\|\leqslant\|x\|,\qquad\forall x\in C_{2\pi},$$

因而其为 $C_{2\pi}$ 上的连续线性算子. 验毕.

例 6. 如果设在空间 $L^1(-\infty,\infty)$ 上定义算子 T，使对任意

$x \in L^1(-\infty,\infty)$，有

$$[\mathrm{T}(x)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(t) dt \quad (-\infty < s < +\infty).$$

则T为从 $L^1(-\infty,\infty)$ 到空间 $C(-\infty,\infty)$ 内的连续线性算子.

验. 先验证 $T(x) \in C(-\infty,\infty)$. 事实上，由

$$|[\mathrm{T}(x)](s+\delta) - [\mathrm{T}(x)](s)|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)(e^{i\delta t}-1)e^{ist}dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,|e^{i\delta t}-1|\,dt$$

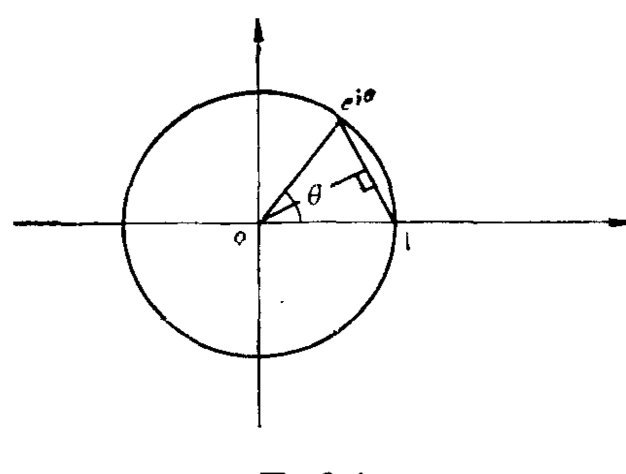


图 2.4

及

$$|e^{i\delta t}-1| = |\cos\delta t + i\sin\delta t - 1| = \left|i\sin\delta t - 2\sin^2\frac{\delta t}{2}\right|$$

$$= \left|2\sin\frac{\delta t}{2}\left(\cos\frac{\delta t}{2} + i\sin\frac{\delta t}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\frac{\delta t}{2}\right|,$$

有

$$|[\mathrm{T}(x)](s+\delta) - [\mathrm{T}(x)](s)| \leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\left|\sin\frac{\delta t}{2}\right|dt$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{-\beta}|x(t)|dt + 2\int_{\beta}^{\infty}|x(t)|dt + \delta\beta\int_{-\beta}^{\beta}|x(t)|dt.$$

先取 β 为足够大的一个正数，由于 $|x(t)|$ 的可和性，上式前两项均可以小于 $\frac{\varepsilon}{4}$ ($\varepsilon > 0$，预先任意选定)，然后再取 δ 足够小，使右边最末项也小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，从而即知，

$$|[T(x)](s+\delta)-[T(x)](s)|<\varepsilon,$$

即 $[T(x)](s)$ 是连续函数，也就是 $T(x)\in C(-\infty,\infty)$.

其次，T 为分配是显然的．最后，T 的有界性，可由

$$|[T(x)](s)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|e^{ist}||x(t)|dt\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt=\|x\|,$$

$$\forall s\in(-\infty,+\infty)$$

导出．因而有 $\sup\limits_{-\infty<s<\infty}|[T(x)](s)|\leqslant\|x\|$，即

$$\|T(x)\|\leqslant\|x\|,\quad\forall x\in L^1(-\infty,\infty),$$

由此则推得 T 为连续的线性算子．验毕．

由于在量子力学及许多有意义的理论问题和实际问题中，经常碰到不连续的线性算子．因此，我们下面举出一个常见的无界线性算子的例子．

例 7．如果设空间 $C_0^{(1)}[0,1]$ 为在 $[0,1]$ 上连续可微的函数的全体，且在范数定义为

$$\|x\|=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|,\ \forall x=x(t)\in C^{(1)}[0,1]$$

所成的赋范线性空间，那么不难看出"微分算子" $T(x)=\dfrac{d}{dt}x(t)$ 是把 $C^{(1)}[0,1]$ 映到空间 $C[0,1]$ 上的线性算子，但当取元列 $\{x_n\}=\{\sin n\pi t\}$ 时，显然有 $x_n\in C^{(1)}[0,1]$，$\|x_n\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$；而

$$\|T(x_n)\|=\left\|\frac{d}{dt}(\sin n\pi t)\right\|=\|n\pi\cos n\pi t\|=n\pi\to\infty\ (n\to\infty)$$

因而知 T 是无界的．

注意，这里的 $C^{(1)}[0,1]$ 是不完备的空间．虽然由 §1.2 的习题 5 及 §1.5 所述，我们已知，上面的函数集在范数定义为 $\|x\|_1=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|+\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|$ 或 $\|x\|_2=|x(a)|+\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|$ 时是 (B)-空间．

同样地，由于在近代物理，数理方程以及理论与实际的大量问题中，我们还常常遇到不少非线性的算子(它们的定义区域和连续性的研究往往是困难的)，因此，下面举出常见的两个非线性算子

的例子.

例 8. Урысон 算子 Y,

$$[Y(x)](s)=\int_a^b k(s,t,x(t))dt,\ \forall x=x(t)\in\bar{S}(r)\subset C[a,b],$$

其中, $\bar{S}(r)=\{x\,|\,\|x\|\leqslant r,\ x\in C\}$; $k(s,\ t,\ u)(a\leqslant s,\ t\leqslant b,\ -\infty<u<\infty)$是(对 u 非线性的)三变量的函数,并且在有界闭域 $\bar{D}: a\leqslant s,\ t\leqslant b,\ |u|\leqslant r$ 上是三元连续函数.)那么,Y 为从 C 中球$\bar{S}(r)$ 变到 C 内的非线性连续算子.

验. Y 的非线性是显然的. 下面我们再来说明: $Y(x)\in C$, $\forall x\in\bar{S}(r)\subset C$. 事实上, 只要我们注意到 $k(s,t,u)$ 在有界闭域上的一致连续性即可导出. 最后,我们验证 Y 的连续性. 若设 $x_0=x_0(t)\in S(r)\subset C$, 则由

$$\begin{aligned}|[Y(x)](s)-[Y(x_0)](s)|&=\left|\int_a^b[k(s,t,x(t)-k(s,t,x_0(t))]dt\right|\\&\leqslant\int_a^b\left|k(s,t,x(t))-k(s,t,x_0(t)\right|dt,\ \forall s\in[a,b].\end{aligned}$$

同样注意到 $k(s,t,u)$ 在有界闭域 $\bar{D}$ 上的一致连续性,有: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $\forall(s',t',u'),(s'',t'',u'')\in\bar{D}$, 只要 $|s'-s''|<\delta$, $|t'-t''|<\delta$, $|u'-u''|<\delta$,就有 $|k(s',t',u')-k(s'',t'',u'')|<\varepsilon/(b-a)$ 成立. 这样, 只要元 $x\in C$, 满足条件 $\|x-x_0\|<\delta$(由范数的定义, 有 $\sup\limits_t|x(t)-x_0(t)|<\delta$), 则可导出

$$|[Y(x)](s)-[Y(x_0)](s)|<\varepsilon,\quad\forall s\in[a,b].$$

也即导出

$$\|Y(x)-Y(x_0)\|=\sup_{a\leqslant s\leqslant b}|[Y(x)](s)-[Y(x_0)](s)|<\varepsilon.$$

验毕.

例 9. Hammerstein 型算子 H,

$$[H(x)](s)=\int_a^b k(s,\ t)\varphi(t,x(t))\,dt,$$

其中,例如可设

$$\int_a^b\int_a^b|k(s,\ t)|^2dsdt<\infty,\ k(s,t)=k(t,s);$$

而 $\varphi(t,u)$ $(a\leqslant t\leqslant b,-\infty<u<\infty)$ 为二元连续函数. 那么,

H 则为定义在 $L^2[a,b]$ 中某一子集上的算子.

（三）

本节最后，我们举几个泛函的例子.

例 1. 如果在 $C[a,b]$ 上定义泛函

$$f(x)=\int_a^b x(t)dt,\quad \forall x\in C[a,b],$$

则 f 为连续线性泛函.

验. 这是较简单的，由于

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)dt\right|\leqslant\int_a^b |x(t)|dt\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\cdot(b-a),$$

故可导出

$$|f(x)|\leqslant(b-a)\|x\|,\quad \forall x\in C[a,b],$$

从而知 $f(x)$ 为有界泛函. 再由其分配性，推得它是连续线性泛函. 验毕.

例 2. 如果在 §1.2 例 4 的空间 $C(\Omega)$ 上定义泛函 f,

$$f(x)=\int_\Omega x(t)y_0(t)\mu dt,\ \forall x=x(t)\in C(\Omega).$$

（其中，$y_0(t)$ 是紧距离空间 Ω 上的某一固定连续函数），则 f 是连续线性泛函.

验. 易见 f 是分配的. 下面仅验证其连续性. 由前面所知，仅需说明它有界即可，而这可由

$$|f(x)|=\left|\int_\Omega x(t)y_0(t)\mu(dt)\right|\leqslant\int_\Omega |x(t)||y_0(t)|\mu(dt)$$

$$\leqslant\left(\int_\Omega|y_0(t)|\mu(dt)\right)\max_{t\in\Omega}|x(t)|=\left(\int_\Omega|y_0(x)|\mu(dt)\right)\|x\|,$$

例 3. 如果在空间 $L^p(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ $(p>1)$ 中定义泛函

推得. 验毕.

$$f(x)=\int_\Omega \left|x(t)y_0(t)\right|\mu(dt),\quad \forall x\in L^p;$$

（其中，$y_0=y_0(t)$ 是空间 $L^q(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 内的某一固定元，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,）则 f 是连续线性泛函.

验．首先，由 Hölder 不等式可知

$$f(x)=\int_\Omega |x(t)y_0(t)|\mu(dt)$$
$$\leqslant\left(\int_\Omega |x(t)|^p\mu(dt)\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |y_0(t)|^q\mu(dt)\right)^{1/q}$$
$$<\infty,\quad \forall x\in L^p.$$

因而 $f(x)$ 确为 L^p 上的一个泛函，其分配性是显然的．由上式有

$$|f(x)|\leqslant\left(\int_\Omega |y_0(t)|^q\mu(dt)\right)^{1/q}\|x\|,\quad \forall x\in L^p,$$

故知 $f(x)$ 为有界线性泛函，也即连续线性泛函．验毕．

例 3′．如果在例 3 中我们取 $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$，$\mu(\{n\})=1(n=1,2,3,\cdots)$，空间 (l^p) 上的泛函

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k^0,\quad \forall x=(\xi_k)\in(l^p);$$

$\left(\text{其中，} y_0=(\eta_k^0) \text{为空间} (l^q) \text{内的某一固定元，} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，

则 f 是连续线性泛函．

下面，举一个不连续的线性泛函的例子，它在概率论中是经常要用到的．

例 4．设 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是"概率空间"（即 $\mu(\Omega)=1$ 的测度空间），其中可测函数 $x(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ 叫做"随机变量"，Ω 中的可测集称"事件"，可测集的测度称为相应事件的"概率"．特别地，对任意随机变量 $x(\omega)\in L^1(\Omega,\mathscr{B},\mu)$，我们定义泛函数

$$E(x)=\int_\Omega x(\omega)\mu(d\omega)$$

（称随机变量 x 的"数学期望"（中值）），则 E 是定义在可测函数空间的线性子空间 $L^1(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上的不连续分配泛函．

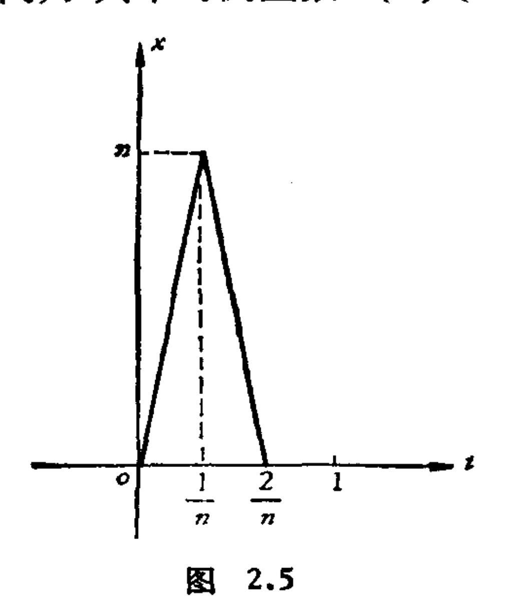


图 2.5

验. 其分配性是显然的,下仅证其不连续性. 例如,当设 $\Omega=[0,1]$, μ 表示平常 Lebesgue 测度时, 我们取一列随机变量 $\{x_n\}\subset L^1(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ (参看图 2.5),

$$x_n(t)=\begin{cases}n^2t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n};\\ 2n-n^2t, & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{2}{n};\\ 0, & \frac{2}{n}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

则按测度有 $x_n(t)\to 0\ (n\to\infty)$. 但由于 $E(x_n)=1\ (n=1,2,\cdots)$, $E(\theta)=0$, 故知 $E(x)$ 不是连续泛函. 验毕.

最后,我们再举出一个非线性泛函的例子.

例 5. 在变分法中常考查定义在 $C^{(n)}[0,1]$ (见 §1.2 习题 5) 上的泛函

$$f(x)=\int_0^1 F(t,x(t),x^1(t),\cdots,x^{(n)}(t))dt.$$

(其中, F 是 $n+2$ 个变量的连续函数.) 容易验证, f 为非线性的连续泛函.

习　　题

1. 试证明本节定义 2 中 (V) 对于"可加"算子有界性的等价命题.

2. 试证明本节的定理1.

3. 试举例说明,在定理 1 中,对于复线性赋范空间而言,从可加算子的连续性未必能推出它是"复齐性"(即对复数是齐性)的.

4. 设 T 为赋范线性空间 E 到 E_1 内的可加算子, 试证明: 只要 T 在 E 中某一点 x_0 连续,则 T 就在整个空间 E 上连续.

5. 试证明本节定理 2 后面的三个推理.

6. 试证明: 实赋范线性空间 E 上的非零实分配泛函 $f(x)$,其在 E 中任意一点 x_0 均不可能取到"局部极小"值(即存在 x_0 点的某个开球域 $S(x_0,\delta_0)\subset E$, 使 $f(x_0)$ 为泛函 $f(x)$ 在 $S(x_0,\delta_0)$ 中的极小值) 或"局部极大"值. 由此导出: 对于任何数 α, $f(x)\neq\alpha$ 的点所成的集必稠于空间 E.

7. 设在空间 $C[a,b]$ 上定义算子 T 如下:

$$[T(x)](s) = x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)dt, \quad \forall x = x(t) \in C,$$

其中，$k(s,t)$ 为 $a \leqslant s, t \leqslant b$ 上的二元连续函数.

试证明：T 必为 $C[a,b]$ 到其自身内的连续线性泛函.

8．设在空间 $L^1[0,2\pi]$ 上定义算子 T 如下：

$$[T(x)](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(t)}{1 - ze^{it}}\, dt, \quad \forall x = x(t) \in L^1.$$

试证明：T 将 $L^1[0, 2\pi]$ 上的函数变为在复单位圆 $|z|<1$ 内为解析的函数，并当令 A_{ρ_0} $(\rho_0<1)$ 表示在 $|z| \leqslant \rho_0$ 内解析，范数为 $\|y\| = \max\limits_{|z| \leqslant \rho_0} |y(z)|$, $(\forall y \in A_{\rho_0})$ 的复函数所构成的赋范线性空间时，那么，上面 T 则为从 $L^1[0,2\pi]$ 到 A_{ρ_0} 内的连续线性算子，此外 T^{-1} 不存在.

9．设 E 为一赋范线性空间，$f(x)$ 为 E 上的非零分配泛函，并设"零点集"

$$N_f = \{x | f(x) = 0, x \in E\}.$$

试证明：(i) 如果元 $x_1 \in E$，使得 $f(x_1) \neq 0$，那么，$\forall x \in E$，均有分解式

$$x = \alpha x_1 + y \quad (\text{其中，} y \in N_f, \alpha \in \boldsymbol{K}).$$

(ii) 当取定 x_1 时，上述分解式是唯一的.

10．如果设 f_1、f_2 为 E 中两不相同的分配泛函，那么，为了（"零点集"）$N_{f_1} = N_{f_2}$，必须且只须存在一数 $\lambda \neq 0$，使得 $f_1(x) = \lambda f_2(x)$，$\forall x \in E$.

11．如果 f_1, f_2 与上题假设同，并设集（"超平面"）

$$H_{f_1} = \{x | f_1(x) = c_1, x \in E\}, H_{f_2} = \{x | f_2(x) = c_2, x \in E\},$$

那么，为了（"超平面"）$H_{f_1} = H_{f_2}$，必须且只须存在一数 $\lambda \neq 0$，使得 (i) $f_1(x) = \lambda f_2(x), \forall x \in E$；(ii) $c_1 = \lambda c_2$.

§2.2. 有界线性算子空间与全连续算子

（一）

我们考察由赋范线性空间 E（不必完备）到赋范线性空间 E_1（也不必完备）中的所有的有界线性算子全体，记为 $B(E \to E_1)$，如果规定它们之间的加法和数乘运算为

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha T x, \quad \forall x \in E, \alpha \in \boldsymbol{K}.$$

则易知 $B(E\to E_1)$ 构成一线性空间，而且下面可以看到我们还能对其每个元规定范数，使其成为赋范空间.

注 1. 这里及以后的讨论中，我们所讲的空间 E 是指含有"非 θ 元"的空间.

定义 1. 对于赋范线性空间 E 到 E_1 中的有界（不限于分配）算子 T，定义

$$\|T\|=\inf\{\alpha \mid \|T(x)\|\leqslant\alpha\|x\|, \forall x\in E\}$$

为算子 T 的范数.

下面，我们介绍一个基本命题：

引理. 如果上述 T 是有界齐性算子，则有

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T(x)\|.$$

证. 事实上，由 $\|T\|$ 的定义可知

$$\|T(x)\|\leqslant\|T\|\cdot\|x\|,\quad \forall x\in E.$$

从而有

$$\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T(x)\|\leqslant\|T\|. \tag{1}$$

而另一方面，同样由 $\|T\|$ 的定义可知，$\forall\varepsilon>0, \exists\bar{x}\in E, \bar{x}\neq\Theta$，使得

$$\|T(\bar{x})\|>(\|T\|-\varepsilon)\|\bar{x}\|,$$

注意到 T 的齐性，上面即推得 $\left\|T\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right)\right\|>(\|T\|-\varepsilon)$，

而由于 ε 的任意性及 $\left\|\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right\|=1$，故可推得

$$\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|\geqslant\|T\|. \tag{2}$$

结合 (1), (2) 式便得到命题，证毕.

对于有界线性算子空间 $B(E\to E_1)$，有以下两个定理：

定理 1. 从赋范线性空间 E 到 E_1 中的所有有界线性算子所构成线性空间 $B(E\to E_1)$，对于算子范数 $\|T\|$ 构成一个赋范线性空间.

证. 这里，我们首先要说明一下，空间 $B(E\to E_1)$ 内是必含

有非零有界线性算子的(否则,讨论是毫无意义的). 为此,我们先得承认一个事实: 对于任何赋范线性空间 E 必定存在着非零的有界线性泛函 (§3.1 将予以证明). 这样,当设 f_0 为 E 上一非零有界泛函时,我们只要再取 E_1 中的一个非零元 z_0,那么,当定义

$$T_0(x)=f_0(x)z_0, \quad \forall x\in E$$

时,由

$$\|T_0(x)\|=|f_0(x)|\|z_0\|\leqslant\|f_0\|\cdot\|x\|\cdot\|z_0\|=(\|f_0\|\cdot\|z_0\|)\|x\|,$$

显然可知 T_0 是从 E 到 E_1 内的非零有界线性算子,即 $T_0\in B(E\to E_1)$.

下面, 我们验证 $B(E\to E_1)$ 是以 $\|T\|$ 为范数的赋范线性空间. 为此,我们先验证 $\|T\|$ 满足范数定义的三个性质.

1) $\|T\|>0, \|\Theta\|=0$ (Θ 为零算子)均是明显的.

而如果 $\|T\|=0$,则由 $\|T(x)\|\leqslant\|T\|\cdot\|x\|=0$,即 $T(x)=\Theta$. 对任意 $x\in E$ 成立, 即 $T=\Theta$, 因而性质 (i) 验得.

2) $\|T_1+T_2\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|[T_1+T_2](x)\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|T_1(x)+T_2(x)\|\leqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|T_1(x)\|+\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|T_2(x)\|=\|T_1\|+\|T_2\|$. 从而范数性质 (ii) 验得.

3) $\|\alpha T\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|(\alpha T)(x)\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|\alpha T(x)\|=|\alpha|\cdot\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|T(x)\|=|\alpha|\|T\|$. 从而范数性质 (iii) 验得. 证毕.

定理 2. 在定理 1 中,为了有界线性算子空间 $B(E\to E_1)$ 是 Banach 空间必须且只须 E_1 是 Banach 空间.

证. 1)"$\Longrightarrow$" 如果设 $\{z_n\}\subset E_1$ 为任一 Cauchy 列. 那么,当设 f_0为 E 上的某一非零有界线性泛函时,我们则可取到一元 $x_0\in E$,使得 $f_0(x_0)\neq0$. 与定理 1 的证明中的假设类似, 我们做一个从 E 到 E_1 内的算子列

$$T_n(x)=\frac{f_0(x)}{f_0(x_0)}z_n, \quad \forall x\in E(n=1,2,\cdots).$$

那么,从关系式

$$\|T_n-T_m\|=\sup_{\|x\|\leqslant1}\|(T_n-T_m)(x)\|$$

$$= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \frac{\|f_0(x)(z_n - z_m)\|}{|f_0(x_0)|}$$

$$= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \frac{|f_0(x)|\|z_n - z_m\|}{|f_0(x_0)|} = \frac{\|z_n - z_m\|}{|f_0(x_0)|} \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_0(x)|$$

$$= \frac{\|z_n - z_m\|}{|f_0(x_0)|} \|f_0\| \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

可推得 $\{T_n\}$ 为空间 $B(E \to E_1)$ 内的一 Cauchy 列，从而，由此空间的完备性假设则应有 $T \in B(E \to E_1)$，使得 $T_n \to T(n \to \infty)$，这样，我们就可导出，特别地，对于元 $x_0 \in E$，必有

$$z_n = T_n(x_0) \to T(x_0) \in E_1(n \to \infty).$$

从而导出空间 E_1 也是完备的，此即证得本定理的必要性.

2）"$\Longleftarrow$" 如果设 $\{T_n\} \subset B(E \to E_1)$ 为一 Cauchy 列，即

$$\|T_n - T_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

则 $\forall x \in E$，且必有

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\|$$
$$\leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

此即说明 $\{T_n(x)\}$ 是 E_1 中的一 Cauchy 列，而由假设 E_1 是完备的，因而在 E_1 中存在唯一的一个元记为 $T(x)$，使得

$$T_n(x) \to T(x) \quad (n \to \infty).$$

于是 T 就是从 E 到 E_1 中的一个算子，其分配性显然可由 $\{T_n\}$ 的相应性质推得. 又由于

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\| \to 0 \ (n, m \to \infty).$$

因而知数列 $\{\|T_n\|\}$ 收敛，即有数 β，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\| = \beta$，由此推得

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| = \beta\|x\|, \ \forall x \in E.$$

故 T 为有界线性算子，也即推得 $T \in B(E \to E_1)$.

由于 $\|T_n - T_m\| \to 0 \ (n, m \to 0)$，故知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_0$（自然数），使得只要 $m, n > N_0$，就有 $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. 于是，$\forall x \in E$，$\|x\| \leqslant 1$，则有

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\| \leqslant \varepsilon.$$

固定上述元 x，令 $m\to\infty$，可得出

$$\|T_n(x)-T(x)\|\leqslant\varepsilon,\quad \forall x\in E,\|x\|\leqslant 1.$$

又由于 $T\in B(E\to E_1)$，因而有 $(T_n-T)\in B(E\to E_1)$，且由以上不等式可推出，当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon$，即 $\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$. 所以空间 $B(E\to E_1)$ 是完备的. 此即导出本定理的充分性. 证毕.

注 2. 在上面定理的证明中，我们提到了关于算子的两个收敛概念，这在以后是常用的. 现在我们叙述一下这两个基本概念.

定义 2. 算子列 $\{T_n\}\subset B(E\to E_1)$，称为一致收敛于算子 T，是指

$$\|T_n-T\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

$\{T_n\}$ 称为(强)收敛于 T，是指

$$\|T_n(x)-T(x)\|\to 0\ (n\to\infty);\ \forall x\in E.$$

(二)

下面，我们将举出求某些有界线性算子的范数的例子.

例 1. 如果设 T 是从 n 维有界数列所组成的赋范线性空间 (m_n) (范数如空间 (m) 定义)到其自身内的有界线性算子

$$z=T(x),\ \forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in(m_n)$$

$\left(\text{其中}，z=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)，\eta_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\ (1\leqslant i\leqslant n)\right)$，

那么

$$\|T\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\text{(相应矩阵“行”元的绝对值和中之最大者)}.$$

验. 由于

$$\|T(x)\|=\|z\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\eta_i|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\right|$$

$$\leqslant\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\right)\cdot\|x\|,\quad\forall x\in(m_n)$$

故有

$$\|T\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right|. \tag{3}$$

但另一方面，当设上式后者的最大值取在第 i_0 行，且不为零时，即有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_{i_0k}| \neq 0$；当我们取元 $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_n^0)$，其中，

$$\xi_j^0 = \frac{\overline{\alpha_{i_0j}}}{|\alpha_{i_0j}|} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

(这里及以后，当如上式形式的分母为 0 时，定义其为 0. 上式右端项有些书上记为 $\mathrm{sgn}(\alpha_{i_0j})$) 时，我们知

$$\|x_0\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j^0| = 1,$$

而

$$\|T(x_0)\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \frac{\overline{\alpha_{i_0j}}}{|\alpha_{i_0j}|} \right| \geqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i_0j}|。$$

由此得知

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T(x)\| \geqslant \|T(x_0)\| \geqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i_0j}| \tag{4}$$

(上式右端为 0 时亦对). 结合上面 (3),(4) 式便推出结论. 验毕.

例 2. 设 T 是从空间 $C[a,b]$ 到其自身内的有界线性算子

$$(T(x))(s) = \int_a^b k(s,t)\, x(t)dt, \quad \forall x \in C[a,b],$$

其中，$k(s,t)$ 在 $[a \leqslant s, t \leqslant b]$ 连续(上式亦称具有"连续核"的积分算子)，那么，

$$\|T\| = \max_{a\leqslant s\leqslant b} \int_a^b |k(s,t)| dt.$$

验. 首先我们由

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \max_{a\leqslant s\leqslant b} \left| \int_a^b k(s,t)\, x(t)dt \right| \\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)| \cdot \max_{a\leqslant s\leqslant b} \int_a^b |k(s,t)| dt\end{aligned}$$

$$= \left(\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |k(,s\,t)|\,dt\right)\|x\|, \forall x\in C[a,b].$$

可得

$$\|T\| \leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |k(s,t)|\,dt. \tag{5}$$

另一方面，由数学分析知识我们知道这里的积分$\int_a^b \left| k(s,t)\right| dt$是$s$的连续函数，故它在闭区间$[a,b]$上某点$s_0$处达到最大值，令

$$x_0(t) = \operatorname{sgn} k(s_0,t) = \frac{\overline{k(s_0,t)}}{|k(s_0,t)|}$$

（当分母（分子）为0时，定义$x_0(t)=0$），则在$[a,b]$上$x_0(t)$是可测函数且$|x_0(t)|\leqslant 1$，故由函数论中的Лузин定理可知，对于每个正整数n，在$[a,b]$上存在连续函数列$\{x_n(t)\}$，使其满足

$$\mu(\{t\,|\,x_n(t)\neq x_0(t), t\in[a,b]\}) < \frac{1}{2nM},$$

$$|x_n(t)|\leqslant 1,\quad \forall t\in[a,b]\quad (n=1,2,\cdots).$$

（这里，$M=\max\limits_{a\leqslant s,t\leqslant b}|k(s,t)|$）．这样，我们有

$$\left|\int_a^b k(s,t)\,x_n(t)dt - \int_a^b k(s,t)\,x_0(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |k(s,t)|\,|x_n(x) - x_0(t)|\,dt$$

$$= \int_{\{t|x_n(t)\neq x_0(t)\}} |k(s,t)|\,|x_n(t) - x_0(t)|\,dt$$

$$\leqslant 2\max_{a\leqslant s,t\leqslant b}|k(s,t)|\,\mu(\{t\,|\,x_n(t)\neq x_0(t)\}) \leqslant 2M\frac{1}{2nM} = \frac{1}{n},$$

从而得到

$$\left|\int_a^b k(s,t)\,x_0(t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^b k(s,t)x_n(t)dt\right| + \frac{1}{n}$$

$$\leqslant \|T\|\cdot\|x_n\| + \frac{1}{n} \leqslant \|T\| + \frac{1}{n}\quad (n=1,2,\cdots).$$

上式特别当$s=s_0$时亦成立，从而有

$$\int_a^b |k(s_0,t)|\,dt \leqslant \|T\| + \frac{1}{n}\quad (n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$,以及注意到上面 s_0 的假设,我们则可推得

$$\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |k(s,t)|\,dt \leqslant \|T\|. \tag{6}$$

结合上面 (5),(6) 两式即得所需结论. 验毕.

(三)

在上面有界线性算子空间 $B(E\to E_1)$ 中,有一个非常重要的闭线性子空间,即“全连续线性算子”的全体所组成的空间 l. 下面,我们就来介绍全连续算子的定义.

定义 3. 从赋范线性空间 E 到 E_1 中的算子 A 称为是全连续算子,是指 A 将 E 中的任一有界集均变为 E_1 中的一列紧集.

关于全连续算子,我们有以下两个简单的命题:

定理 3. 如果 A,A′ 均为从赋范线性空间 E 到 E_1 内的全连续算子,那么,对于任何的数 α,α',算子 $\alpha A+\alpha' A'$ 也是全连续算子.

证. 事实上,从全连续算子的定义我们可以知道,如果 B 为 E 中的任一有界集,那么,首先由于 $\{A(x)\,|\,x\in B\}$ 是 E_1 中的列紧集,故必有一子列 $\{A(x_n)\,|\,x_n\in B\}$及 E_1 中一元 z,使得

$$A(x_n)\to z\quad (n\to\infty).$$

其次,又由 $\{x_n\}$ 亦为 E 中的有界集,故从 $\{A'(x_n)\}$ 也是 E_1 中的列紧集,故必有一子列 $\{A'(x_{n_k})\}\subset\{A'(x_n)\}$,及 E_1 中一元 z',使得

$$A'(x_{n_k})\to z'\qquad (k\to\infty).$$

这样,由上面两个关系式就可导出,在 E_1 的集 $\{[\alpha A+\alpha' A'](x)\,|\,x\in B\}$ 内选出的子列 $\{[\alpha A+\alpha' A'](x_{n_k})\}$ 满足

$$[\alpha A+\alpha' A'](x_{n_k})=\alpha\cdot A(x_{n_k})+\alpha' A'(x_{n_k})\to\alpha Z+\alpha' Z'\ (k\to\infty).$$

从而知 $\alpha A+\alpha' A'$ 亦为全连续算子. 证毕.

定理 4. 设 $\{A_n\}$ 是从赋范线性空间 E 到 Banach 空间 E_1 内的全连续算子列,那么,只要存在一个从 E 到 E_1 内的算子 A_0,使得 $\|A_k-A_0\|\to 0$, $(k\to\infty)$, 则 A_0 也是全连续算子.

证. 设 D 为 E 内任一有界集,那么,首先由 $\{A_1(x)\,|,\ x\in D\}$

是 E_1 中的列紧集，故知必有一收敛子列 $\{A_1(x_{1,n})\}$. 这里，$\{x_{1,n}\}\subset D$；其次，由 $\{A_2(x_{1,n})\}$ 是 E_1 中的列紧集，故知必有一收敛子列 $\{A_2(x_{2,n})\}$. 这里，$\{x_{2,n}\}\subset\{x_{1,n}\}$；···如此下去，对任何自然数 k，由 $\{A_k(x_{k-1,n})\}$ 是 E_1 中的列紧集，故知必有一收敛子列 $\{A_k(x_{k,n})\}$，这里，$\{x_{k,n}\}\subset\{x_{k-1,n}\}$，下面，我们证明，在上面选出的子列中，如果取"对角线"元列 $\{x_{n,n}\}$，则 $\{A_0(x_{n,n})\}$ 必为 E_1 内的一收敛列.

事实上，由 $\{x_{n,n}\}\subset D$，而 D 是 E 中的有界集，故 $\exists\beta>0$，使得 $\|x_{n,n}\|\leqslant\beta\ (n=1,2,\cdots)$. 此外，注意到 $\{A_k\}$ 的假设，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_0$（自然数），使得，只要 $k\geqslant k_0$，就有 $\|A_k-A_0\|<\dfrac{\varepsilon}{3\beta}$，这样，我们就可得到

$$\begin{aligned}\|A_0(x_{n,n})-A_0(x_{m,m})\|&\leqslant\|A_0(x_{n,n})-A_{k_0}(x_{n,n})\|\\&\quad+\|A_{k_0}(x_{n,n})-A_{k_0}(x_{m,m})\|+\|A_{k_0}(x_{m,m})-A_0(x_{m,m})\|\\&\leqslant\|A_{k_0}-A_0\|(\|x_{n,n}\|+\|x_{m,m}\|)+\|A_{k_0}(x_{n,n})-A_{k_0}(x_{m,m})\|\\&<\frac{2}{3}\varepsilon+\|A_{k_0}(x_{n,n})-A_{k_0}(x_{m,m})\|.\end{aligned}$$

于是，由 $\{x_{n,n}\}$ 的取法可知，$\{A_{k_0}(x_{n,n})\}$ 为 E_1 中的收敛列，因而必存在自然数 N，使当 $n>N$，$m>N$ 时，$\|A_{k_0}(x_{n,n})-A_{k_0}(x_{m,m})\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，由此导出

$$\|A_0(x_{n,n})-A_0(x_{m,m})\|<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon,$$

此即 $\{A_0(x_{n,n})\}$ 为 E_1 内的一 Cauchy 列. 最后，由于 E_1 的完备性，即知 $\{A_0(x_{n,n})\}$ 为 E_1 内的一收敛列，也即导出 A_0 亦全连续算子. 证毕.

注 3. 全连续的线性算子必为有界线性算子. 从赋范线性空间 E 到 Banach 空间 E_1 内的全连续线性算子的全体 I 组成空间 $B(E\to E_1)$ 内的一个（闭）线性子空间，因而也是一个 Banach 空间.

事实上，只要注意到全连续算子的定义，以及 §1.1 习题 9 关于列紧集必为有界集的结果，就可得出：全连续线性算子将 E 中

的有界集变为 E_1 中的有界集，从而由 §2.1 定理 2 的推理 1，即知其为有界线性算子. 至于后一结论只要注意到上面定理 3,4 以及前面定理 2 则可导出.

注 4. 对于"无穷维"的完备赋范线性空间 E 而言，空间 $B(E\to E)$ 内由"全连续"线性算子所组成的(闭)线性子空间 I 又有一个与"有限维"空间不相同的特点：其内没有"单位元."也即"么算子"(恒等变换) $\mathscr{E}\notin I$，由此可知有界线性算子未必是全连续算子.

这个结论是明显的. 事实上，只要我们回忆一下 §1.1 中所叙述的关于赋范线性空间为有穷维的特征，我们就可知道，对于上述无穷维空间 E 而言，$\mathscr{E}$ 将其内单位球变为单位球，而其已不是列紧集了.

(四)

下面，为了说明一个常见的全连续算子的例子，我们先介绍一个关于距离空间中列紧集的特征性命题. 为此，先给出关于"ε-网"的定义.

定义 4. 设 E 为距离空间，N,M 为 E 中两个集. 我们称 N 构成 M 的 ε-网（ε 为某一正数)，是指 $\forall x\in M$，$\exists x_\varepsilon\in N$ 使得 $d(x,x_\varepsilon)<\varepsilon$.

引理 1(Hausdorff). 设 E 为距离空间. 那么，如果集 F 是 E 中的列紧集，则 $\forall\varepsilon>0$，必定存在由"有限元"组成的集 F 的 ε-网；当空间 E 完备时，逆命题亦成立.

证. 前半命题是容易的，并且该 ε-网可以由集 F 的元组成. 事实上，如果结论不成立，则对某一正数 ε_0，当取一点 $x_1\in F$ 时，(F 如为空集不足道)必存在点 $x_2\in F$，使 $\rho(x_1,x_2)>\varepsilon_0$ (否则 (x_1) 已构成 F 的 ε_0-网，矛盾)；同理必存在 $x_3\in F$，使得 $\rho(x_1,x_2)>\varepsilon_0$，$\rho(x_1,x_3)>\varepsilon_0$ (否则 (x_1,x_2) 已构成 F 的 ε_0-网)；…，如此进行下去，我们可得到彼此相距大于 ε_0 的一元列 $\{x_n\}\subset F$，此显然与 F 为列紧集的假设矛盾.

下面证明后半命题．首先由假设可知，对任何$\varepsilon_n=\frac{1}{n}>0$，在$E$中必有$F$的有限“$\varepsilon_n$-网”，

$$(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_{kn}^{(n)})\quad n=1,2,\cdots.$$

于是，当设F_1为F的任一无穷点所组成的子集时(F如为有限集，不足道)，由“网”的定义，我们有关系式$F_1\subset\bigcup_{i=1}^{k_1}\bar{S}(x_i^{(1)},\varepsilon_1)$．这样，上式中必有一闭球$\bar{S}(x_{i_1,0}^{(1)},\varepsilon_1)$包含有$F_1$中的一无穷子集$F_2$，同样由“网”的定义，我们根据$F_2\subset\bigcup_{i=1}^{k_2}\bar{S}(x_i^{(2)},\varepsilon_2)$又可推出，有一闭球$\bar{S}(x_{i_2,0}^{(2)},\varepsilon_2)$包含有$F_2$的一无穷子集$F_3$；$\cdots$，如此进行下去，我们可得到集列$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$．现在，从各$F_n$中任取一元$y_n\in F_n(n=1,2,\cdots)$，则$F_1$中的元列$\{y_n\}$．显然满足性质：当$m>n$时，有$y_m,y_n\in F_n\subset\bar{S}(x_{i_n,0}^{(n)},\varepsilon_n)$，从而有

$$\rho(y_m,y_n)<\rho(y_m,x_{i_n,0}^{(n)})+\rho(y_n,x_{i_n,0}^{(n)})<2\varepsilon_n=\frac{2}{n},$$

故导得$\rho(y_m,y_n)\to 0\ (n,m\to\infty)$．也即$\{y_n\}$是$E$中的一Cauchy列，因此，由$E$的完备性，即知，必有元$y_0\in E$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$，由此则导出$F$是$E$中的列紧集．证毕．

注5. 由引理1，我们显然可以直接得到下面结论：距离空间E中的列紧集一定是“可分的”和“有界的”．

为了导出§1.2例4之(列)紧距离空间Ω上连续函数全体所成(B)-空间$C(\Omega)$中列紧集的判别性定理(推广了的“Ascoli-Arzelà定理”)，我们还需给出下面的引理(注意前面§1.2习题关于“等度连续”的概念)：

引理2. 如果设$\{x_n(t)\}\subset C(\Omega)$是一个“等度连续”函数列，那么，只要存在一个函数$x_0(t)$，使得

$$x_n(t)\to x_0(t)\ \ (n\to\infty);\ \forall t\in\Omega\ (\text{逐点收敛}),$$

则有，$x_0(t)\in C(\Omega)$，且$\|x_n-x_0\|\to 0\ \ (n\to\infty)$

证．首先，由$\{x_n(t)\}$“等度连续”的假设可知，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，

使得 $\forall t', t'' \in \Omega$，只要 $|t'-t''|<\delta$，就有 $|x_n(t')-x_n(t'')|<\varepsilon/3\ (n=1,2,\cdots)$一致成立.此外,再由假设 $x_n(t')\to x_0(t')$，$x_n(t'')\to x_0(t'')(n\to\infty)$，故 $\exists N$（自然数),使得当 $n\geqslant N$ 时,有

$$|x_n(t')-x_0(t')|<\varepsilon/3,\quad |x_n(t'')-x_0(t'')|<\varepsilon/3,$$

这样,由上式可导出

$$\begin{aligned}|x_0(t')-x_0(t'')| &\leqslant |x_0(t')-x_N(t')|+|x_N(t')-x_N(t'')| \\ &\quad +|x_N(t'')-x_0(t'')| \\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

也即 $x_0(t)$ 在 Ω 上也是"一致连续"的,当然有 $x_0(t)\in C(\Omega)$.

其次,由于 Ω 是(列)紧距离空间,当然是列紧空间(§1.1 习题9),故由引理 1 可知,其必存在有限"δ-网"：$(t_1,t_2,\cdots,t_{k_0})\subset\Omega$，于是由假设可得 $x_n(t_i)\to x_0(t_i)\ (n\to\infty)$，$i=1,2,\cdots k_0$,所以,对上述正数 ε,$\exists N$,使得当 $n\geqslant N$ 时,有

$$|x_n(t_i)-x_0(t_i)|<\varepsilon/3\quad (i=1,2,\cdots,k_0)$$

一致成立.这样,$\forall t\in\Omega$,如果设 Ω 的"δ-网"中的点 t_{i_0} 满足 $|t-t_{i_0}|<\delta$,利用上面的关系式,我们就可导出

$$\begin{aligned}|x_n(t)-x_0(t)| &\leqslant |x_n(t)-x_n(t_{i_0})|+|x_n(t_{i_0})-x_0(t_{i_0})| \\ &\quad +|x_0(t_{i_0})-x_0(t)| \\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\quad (n>N).\end{aligned}$$

从而有 $$\max_{t\in\Omega}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0\quad (n\to\infty).$$
即导出了 $\|x_n-x_0\|\to 0\ (n\to\infty)$. 证毕.

有了上面两个引理,我们就可得到下面的定理:

定理 5（Ascoli-Arzelà 定理）. 设集 $F\subset C(\Omega)$，如果 F 中的所有函数 $x(t)$ 是"逐点有界"且"等度连续"的，那么，F 必为空间 $C(\Omega)$ 中的列紧集. 反之,如果 F 为 $C(\Omega)$ 中的列紧集，则 F 中的所有函数必是"一致有界"且"等度连续"的.

证. 我们仅证明前半段命题. 至于后半段命题由上面引理 1 是不难推出的,我们留作习题.

首先，由于Ω是紧(或列紧)距离空间，故由本节注 5 可知，其是"可分的"，因而在Ω中存在一稠于它的元列$\{t_k\}$.

其次，$\forall\{x_n(t)\}\subset F$，由$F$的假设可知，$\forall t\in\Omega$，$\{x_n(t)\}$是有界复数列.特别地，由$\{x_n(t_1)\}$有界及关于在数集中熟知的 Bolzano-Weierstrass 定理，可从中选出一个收敛子列 $\{x_{1,n}(t_1)\}\subset\{x_n(t_1)\}$；同样地，由于 $\{x_{1,n}(t_2)\}$ 仍是有界复数列，故又可从中选出一个收敛子列 $\{x_{2,n}(t_2)\}\subset\{x_{1,n}(t_2)\}$；$\cdots$，如此进行下去，$\forall k$(自然数)，我们可由$\{x_{k-1,n}(t_k)\}$是有界复数列，从而选出一收敛子列$\{x_{k,n}(t_k)\}\subset\{x_{k-1,n}(t_k)\}$，这样，类似前面(三)中定理 4 的方法，取"对角线"函数列$\{x_{n,n}(t)\}$，那么，根据上面的做法，我们显然可以看出，此函数列$\{x_{n,n}(t)\}\subset\{x_n(t)\}$，并且对于$\Omega$的稠集$\{t_k\}$上的各点均是收敛的.

其三，我们证明上面在$\{x_n(t)\}$中选出的子列$\{x_{n,n}(t)\}$对于Ω上的每一点均是收敛的．事实上，$\forall t_0\in\Omega$，由于$\{x_n(t)\}$的"等度连续"性的假设，可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得只要$|t'-t_0|<\delta$，就一致地有$|x_{n,n}(t')-x_{n,n}(t_0)|<\varepsilon/3(n=1,2,\cdots)$.

于是，当我们注意到点列$\{t_k\}$是稠于Ω的，因而对上述t_0，必有一点t_{k_0}，使得$|t_{k_0}-t_0|<\delta$，由此，应一致地有

$$|x_{n,n}(t_{k_0})-x_{n,n}(t_0)|<\varepsilon/3\quad(n=1,2,\cdots).$$

由已知，$\{x_{n,n}(t_{k_0})\}$是收敛数列，因而对上述正数ε，$\exists N$(自然数)，使得

$$|x_{n,n}(t_{k_0})-x_{m,m}(t_{k_0})|<\varepsilon/3\quad(n,m>N).$$

这样，由以上两式就可得到：

$$\begin{aligned}|x_{n,n}(t_0)-x_{m,m}(t_0)|&\leqslant|x_{n,n}(t_0)-x_{n,n}(t_{k_0})|\\&\quad+|x_{n,n}(t_{k_0})-x_{m,m}(t_{k_0})|+|x_{m,m}(t_{k_0})-x_{m,m}(t_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\quad(n,m>N).\end{aligned}$$

由熟知的关于数列极限存在的 Cauchy 准则，立即得出$\{x_{n,n}(t_0)\}$亦收敛数列.

最后，我们注意到引理 2，可得到

$$x_{n,n}(t) - x_{m,m}(t) \to 0 \quad (n, m \to \infty); \quad \forall t \in \Omega.$$

于是，便导出

$$\|x_{n,n} - x_{m,m}\| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

即 $\{x_{n,n}\}$ 是空间 $C(\Omega)$ 的一 Cauchy 列，从而由 $C(\Omega)$ 的完备性，我们则知在 $C(\Omega)$ 中必存在一元 x_0，使 $x_{n,n} \to x_0 (n \to \infty)$，此即得出 F 为 $C(\Omega)$ 中的列紧集. 证毕.

由定理 5 我们可以直接得到下面一个类似于古典的Osgood定理的有趣结果(它是与第四章所讨论的“共鸣定理”(或称“一致有界原理”)内容相关的):

推理. 对于空间$C(\Omega)$中的“等度连续”函数族$\{x_l(x) \mid l \in I\}$而言，只要有

$$\sup_{l \in I} |x_l(t)| < \infty, \ \forall t \in \Omega.$$

就可推得

$$\sup_{l \in I} \sup_{t \in \Omega} |x_l(t)| < \infty.$$

作为本节的结尾，我们利用定理 5 举出两个全连续算子的例子. 首先，与上面(二)段例 2 类似，我们给出下面的例 1:

例 1. 设 T 是从空间 $C(\Omega_0)$ 到其自身的线性算子，

$$[T(x)](s) = \int_{\Omega} k(s,t)x(t)\mu(dt), \forall x = x(t) \in C(\Omega)$$

其中，$k(s,t)$ 为“积”空间 $\Omega_0 \times \Omega_0$ (仍为紧距离空间)上的连续函数，那么，T 是 $C(\Omega_0)$上的全连续线性算子.

验. 由全连续算子的定义，我们只需证明T将 $C(\Omega)$ 内的任意有界集变为其内的列紧集则可. 事实上，首先由

$$\|T(x)\| = \max_{s \in \Omega} \left| \int_{\Omega} k(s,t)x(t)\mu(dt) \right| \leqslant \max_{s,t \in \Omega} |k(s,t)| \cdot \mu(\Omega) \cdot \|x\|,$$
$$\forall x \in C(\Omega).$$

我们显然可以看出，对于空间 $C(\Omega)$ 内的任一有界集 F，$T(F)$ 是该空间内的一个“一致有界”函数集. 其次，从

$$|[T(x)](s') - [T(x)](s'')| \leqslant \int_{\Omega_0} |k(s',t) - k(s'',t)| \, |x(t)| \mu(dt)$$

$$\leqslant \left(\int_{\Omega} |k(s',t)-k(s'',t)|\mu(dt) \right)\|x\|, \forall x\in C(\Omega), \forall s',s''\in \Omega_0$$

又可看出，对于上述有界集 F，注意到 $k(s,t)$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上的"一致连续"函数，又可推出 $T(F)$ 是空间 $C(\Omega)$ 中的一个"等度连续"函数集. 因此，直接利用上定理 5 就可推出 $T(F)$ 是 $C(\Omega)$ 内的列紧集，也即 T 是全连续线性算子. 证毕.

下面例 2，与例 3 的验证我们只谈"思路"，详细的论述作为习题留给读者来完成.

例 2. 上面例 1 中具有"连续核"的积分算子也是空间 $L^2(\Omega_0,\mathscr{B},\mu)$($\Omega_0$ 为紧距离空间)到其内的全连续算子.

验. 利用到 Schwarz 不等式就可看出：T 将 $L^2(\Omega_0,\mathscr{B},\mu)$ 内的任意有界集均变为连续函数空间 $C(\Omega_0)$ 内的列紧集，并且再由按 $C(\Omega_0)$ 的范数成为 Cauchy 列的元列也必为 $L^2(\Omega_0,\mathscr{B},\mu)$ 空间内的 Cauchy 列，因而不难导出：$C(\Omega_0)$ 中的列紧集也必为 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中的列紧集，由此即知 T 亦为 $L^2(\Omega_0,\mathscr{B},\mu)$ 上的全连续算子. 验毕.

例 3. 在空间 $L^2(\Omega_0,\mathscr{B},\mu)$ (Ω_0 为紧距离空间) 中定义积分算子

$$[T^*(x)](s) = \int_{\Omega_0} k^*(s,t)x(t)\mu(dt), \forall x = x(t)\in L^2(\Omega_0,\mathscr{B},\mu),$$

其中，"积分核" $k^*(s,t)$ 为可测函数并满足

$$\iint_{\Omega_0\,\Omega_0} |k^*(s,t)|^2\mu(ds)\mu(dt) < \infty$$

(称为 Hilbert-Schmidt 型核). 那么，T^* 亦为 $L^2(\Omega_0,\mathscr{B},\mu)$ 到其自身的全连续算子.

验. 与 §1.3 中证明 L^p 可分性的方法类似，对于上述平方绝对可积的积分核 $k^*(s,t)$，必可找到一列连续函数 $\{k_n(s,t)\}$，使其满足

$$\|k_n - k^*\| = \iint_{\Omega_0\,\Omega_0} |k_n(s,t) - k^*(s,t)|\mu(ds)\mu(dt) \to 0,$$

$$(n\to\infty).$$

同样利用到 Schwarz 不等式，我们还可得到

$$\|K_n(x) - K^*(x)\|$$

$$\leqslant \left(\int_{\Omega_0}\int_{\Omega_0} |k_n(s,t) - k^*(s,t)|^2 \mu(ds)\mu(dt)\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|,$$

从而导出 $\|K_n - K^*\| \to 0 \ (n \to \infty)$. 最后，注意到上面例 2 以及前面的定理 4，由算子 K^* 乃是一列全连续算子 $\{K_n\}$ 的"一致收敛"的极限，可导出 K^* 亦 $L^2(\Omega_0, \mathscr{B}, \mu)$ 上的全连续算子. 验毕.

习　　题

1．设 T 是从空间 (m) 到其自身的有界线性算子，

$$z = T(x), \forall x = \{\xi_j\} \in (m).$$

其中，$z = \{\eta_i\}$，$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_j \ (i = 1,2,\cdots)$，且 $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| < \infty$，

试证明：　$\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|$（"行向量"坐标绝对值和之上确界）.

2．设 T 是从空间 (l_n^1) 到其自身内的有界线性算子，

$$z = T(x), \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in (l_n^1).$$

其中，$z = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j (1 \leqslant i \leqslant n)$ 试证明：$\|T\|$

$= \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|$（"列向量"坐标绝对值和之最大者）.

3．将习题 2 中空间 (l_n^1) 改为 (l_n^2)，且设 $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji} \ (1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 试证明：$\|T\| = \max|$ 矩阵 (α_{ij}) 的固有值$|$.

4．设 E 为赋范线性空间，E_1 为 Banach 空间，而 T_0 为从 E 的子空间 E_0 到 E_1 内的有界线性算子. 试证明：只要 E_0 稠于 E，则 T_0 可以"保范扩张（延拓）"到整个空间 E（也即能够在全空间 E 上唯一地定义一个有界线性算子 T，使其满足条件：(i)$A(y) = A_0(y), \forall y \in E_0$，(ii)$\|A\| = \|A_0\|_{E_0}$）.

5．试证明：如果 $\{T_n\} \subset B(E \to E_1)$，$T_0 \in B(E \to E_1)$，且有 $\|T_n - T_0\| \to 0 \ (n \to \infty)$（一致收敛），则必导出

$\|T_n(x) - T_0(x)\| \to 0 \ (n \to \infty) \ \forall x \in E$，（强收敛）反之未必.

6. 利用本节(四)段关于列紧集的性质，并注意到前面 §1.3 中习题 3，试证明：如果 Ω 为距离空间，那么，为了连续函数空间 $C(\Omega)$ 是可分的必须且只须 Ω 是紧空间.

7. 设 T 为赋范线性空间 E 上定义的分配算子. 试证明：如果 T 将 E 中"单位球"变为 E_1 中的列紧集时，则 T 为 E 上的全连续算子.

8. 试验证本节(四)中的例 2.

9. 试验证本节(四)中的例 3.

§ 2.3. 共轭空间的定义及例(某些常用空间上有界线性泛函的一般形式)

在上节中，我们曾经介绍了有界赋范线性空间 $B(E\to E_1)$ 特别地，如果 $E_1=\boldsymbol{K}$ (数域)，由上节定理 2 可知，我们便得到一个 Banach 空间，称之为 E 的"共轭空间"，即有下面的定义：

定义 1. 赋范线性空间 E 上的一切有界线性泛函的全体，定义其上的加法，数乘及范数为

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\ (\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x);$$
$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|;\quad \forall x\in E,\alpha\in\boldsymbol{K}.$$

其构成一个 Banach 空间，称为 E 的**共轭空间**，记为 E^*，特别当 $E^*=E$ (按"等价"意义)时，则称 E 为**自共轭空间**.

(一)

为了解释 $\|f\|$ 的意义，下面给出一个定义.

定义 2. 由 E 上一非零线性(分配)泛函 f 所定义的集

$H_f=\{x\,|\,f(x)=c,\ x\in E\}$ (c 为一固定常数) 称为 E 中的**超平面**.

注 1. 我们由定义 2 不难看出，上面的"超平面"定义即为有限维时平面概念的推广. 类似于 §2.1 中习题9，我们可以推出

$$H_f=N_f+x_0,$$

其中，x_0 为 E 中使 $f(x_0)=c_0$ 的某一固定元，而 $N_f=\{x\,|\,f(x)=0,x\in E\}$ 显然是 E 内的某一线性子空间(不必"闭"!)，并且同样由

§2.1 中习题 9 的结果可知，如果当 $c_0 \neq 0$ 时，则空间

$$E = N_f + \{\alpha x_0\}, \ \forall \alpha \in \mathbf{C} \tag{1}$$

如果当 $c_0=0$ 时，则在(1)中用某元 $x_1 \in E \backslash N_f$ 来代替(上面的 x_0)，其仍然成立. 因此可以看出，H_f 的"维数"恰好比整个空间的"维数"少 1 (我们也常因此而说线性子空间 N_f 按空间 E 的"亏数"等于1)[7]. 而在有限维空间中，例如三维向量空间中，这样的集 H_f 正是空间平面的定义.

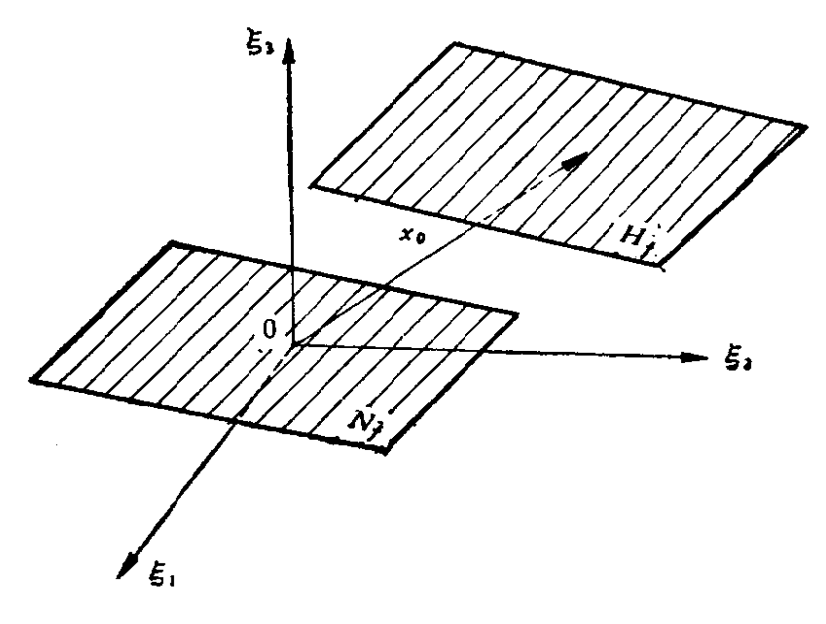


图 2.6

借助于注 1 中空间对于超平面 H_f 的"分解式"，我们容易导出下面命题:

引理. 为了超平面 $H_f = \{x \mid f(x) = c_0, x \in E\}$ 是闭集，必须且只须相应的线性子空间 $N_f = \{x \mid f(x) = 0, x \in E\}$ 是闭集.

利用该引理，我们给出一个有关超平面 H_f 与泛函 f 相互关系的一个命题，这个结果在第三章要用到.

定理 1. 为了超平面 $H_f = \{x \mid f(x) = c_0, x \in E\}$ 是闭的，必须且只须 f 是 E 上的"有界"线性泛函.

证. 由上面的引理可知，我们只需要对 N_f 来证明本命题就可以了.

1) "$\Longleftarrow$" 由于 f 的有界性此时可推出其连续性，从而定理的充分性是显然的.

2) "$\Longrightarrow$" 当 $N_f=E$ 时,有 $f(x)\equiv 0$, $\forall x\in E$,因而 f 为"零泛函",已得定理结论. 而当 $N_f\subsetneqq E$ 时,首先注意到 N_f 的假设,可知其为一闭线性子空间,从而由 §1.4 定理 2 推得商空间 E/N_f 亦为一赋范线性空间(其范数定义为 $\|[x]\|=\inf\limits_{x\in[x]}\|x\|$, $\forall[x]\in E/N_f$),且当定义其上一泛函

$$\hat{f}([x])=f(x),\quad \forall[x]\in E/N_f$$

时,由于 $x\longmapsto[x]$ 为典则映象,f 为 E 上的线性泛函,f 在 N_f 上恒取 0 值,故知 $\hat{f}$ 显然亦为空间 E/N_f 上的一意确定的线性泛函. 其次,由注 1 中的关系式(1)可知,E/N_f 是一个一维赋范线性空间,因此,直接由 §2.1 的注 3,可知 $\hat{f}$ 还是连续的. 这样由于 $\forall x\in E$, $\forall\{x_n\}\subset E$,如果 $x_n\to x$,则从 E/N_f 空间中范数定义知 $[x_n]\to[x]$ $(n\to\infty)$;因而有

$$f(x_n)=\hat{f}([x_n])\to\hat{f}([x])=f(x)\quad(n\to\infty).$$

此即 f 为 E 上的连续泛函. 由 f 的线性假设,我们可导出定理的必要性结论. 证毕.

有了上面超平面的定义,我们就可以得到关于 E 上有界线性泛函 f 的范数 $\|f\|$ 的几何意义的命题:

定理 2. 赋范线性空间 E 上非零有界线性泛函 $f(x)$ 的范数 $\|f\|$,即为 E 中零元 θ (可视为坐标原点)到(闭)超平面 $H_1=\{x\mid f(x)=1, x\in E\}$ 的距离的"倒数".

证. 我们先假设元 θ 到超平面 H_1 的距离是 d,则 $d=\inf\{\|x\|\mid x\in H_1\}$. 但注意到 $\forall x\in H_1$, 由于 $1=|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|$,故有 $\|x\|\geqslant\dfrac{1}{\|f\|}$. 从而导出 $d\geqslant\dfrac{1}{\|f\|}$.

但另一方面,由范数 $\|f\|$ 的定义,我们又知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$,使得

$$\|x_0\|=1, |f(x_0)|>\|f\|-\varepsilon.$$

于是,当令 $\bar{x}_0=\dfrac{x_0}{f(x_0)}$ 时,则有 $f(\bar{x}_0)=1$,且由此可得

$$1=\|x_0\|=\|f(x_0)\bar{x}_0\|=|f(x_0)|\,\|\bar{x}_0\|>(\|f\|-\varepsilon)\|\bar{x}_0\|.$$

注意到 $\bar{x}_0\in H_1$，故由上式有

$$d=\inf_{x\in H_1}\|x\|\leqslant\|\bar{x}_0\|<\frac{1}{\|f\|-\varepsilon},$$

最后，令 $\varepsilon\to 0$，由上式则可导出 $d\leqslant\frac{1}{\|f\|}$.

综合上面两个关于 d 的不等式，就得到本命题的结论. 证毕.

用类似证明定理 2 的方法，我们还可以较容易地得出一个命题，这个命题与以后第三章关于未知数是空间元素的方程的求解问题有关.

定理 3. 设 E 为一赋范线性空间，$f_1\in E^*$，那么，$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_1\in E$，使得 $f_1(x_1)=\|f_1\|$；$\|x_1\|<1+\varepsilon$.

证. 由设 f_1 为 E 中的有界线性泛函，并且我们可假定 f_1 为非零泛函(否则不足道)，故从 $\|f_1\|$ 的定义可知 $\exists x_0\in E$，使得

$$\|x_0\|=1,\ |f_1(x_0)|>\|f_1\|-\frac{\varepsilon\|f_1\|}{1+\varepsilon}\ (>0).$$

我们取元

$$x_1=\frac{\|f_1\|x_0}{f_1(x_0)},$$

那么，显然有 $f_1(x_1)=\|f_1\|$；并且从上式还可导出

$$\|x_1\|=\frac{\|f_1\|\|x_0\|}{|f_1(x_0)|}<\frac{\|f_1\|}{\|f_1\|-\frac{\varepsilon\|f_1\|}{1+\varepsilon}}=1+\varepsilon.$$

证毕.

在本段的最后，我们给出关于 E 中元列的“弱收敛”的定义. 关于它的详细讨论，特别是它与“强收敛”(即原来定义的“按范收敛”)的关系，我们将在第四章讨论. 这里，先给出它的定义.

定义 3. 设元列 $\{x_n\}\subset E$，我们称 x_n 当 $n\to\infty$ 时**弱收敛**于 $x_0\in E$，是指有

$$f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty);\quad \forall f\in E^*$$

成立，常简记为 $x_n\rightharpoonup x_0\ (n\to\infty)$.

注 2. 如果 $x_n\to x_0$，则必有 $x_n\rightharpoonup x_0\ (n\to\infty)$. (为了区别起见，我们常把元列的“按范”收敛称为“强收敛”，因而上面即说明，

一个强收敛的元列必然是弱收敛的).

注 3. 如果 $x_n \rightharpoonup x_0 (n \to \infty)$. 那么，未必有 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$.

为了说明这个事实，只要考查下面的反例就可以了:

反例. 在 (l^2) 空间中，取基底元列 $e_n = (0,\cdots,0,\underset{(\text{第}n\text{位})}{1},0,\cdots)$，那么，由 $\|e_n\| = 1 (n=1,2,\cdots)$，显然可知 $e_n \not\to \theta \ (n \to \infty)$. 然而从下面(二)中的例 3，我们将知道 (l^2) 空间上的所有有界线性泛函必可表为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi_n, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (l^2),$$

其中 $\{f_n\} \in (l^2)$，因而，可得

$$f(e_n) = f_n \to 0 (n \to \infty), \ \forall f = \{f_n\} \in (l^2)^* = (l^2).$$

即有 $e_n \rightharpoonup \theta (n \to \infty)$. 此即验得本反例(同样地，由后面(二)段的结果，我们将容易看出，如果将此反例中的空间 (l^2) 换为空间 (c) 或 $(l^p)(p > 1)$该结论仍是成立的).

(二)

下面给出几个常用空间的共轭空间的例子. 至于一般的赋范线性空间，是否除了 $f(x) \equiv 0, \forall x \in E$ (零泛函)外，还存在非零的有界线性泛函的问题，我们将在后面的第三章来回答. 在那里，答案是肯定的.

在下面的例中，我们还要回忆到 §1.5 关于两个赋范线性空间"等价"的概念，这里，我们说两个空间"相等"，就是说它们是等价的.

下面，我们先给出几个"数列"空间之共轭空间的例子. 为了得到第一个例子，我们给出下面的命题:

命题 1. 为了有界线性泛函 $f \in (\boldsymbol{K}^n)^*$，必须且只须有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \xi_k, \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{K}^n,$$

其中，$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 为 n 元有序数组.

证. 1) "$\Longleftarrow$" 如果泛函 f 如上述形式，显然其是"分配的，"又由 Cauchy 不等式，我们可以导出

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\xi_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f_k\xi_k|$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2}\,\|x\|,\quad \forall x\in \boldsymbol{K}^n.$$

故即 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{K}^n$ 上的有界线性泛函，也即 $f\in(\boldsymbol{K}^n)^*$.

2) "$\Longrightarrow$" 设 $f\in(\boldsymbol{K}^n)^*$, 即 f 为 $\boldsymbol{K}^n$ 上的一有界线性泛函，我们令 $e_k=(0,\cdots,0,\underset{(\text{第}k\text{位})}{1},0,\cdots,0)$, $f_k=f(e_k)(1\leqslant k\leqslant n)$ 于是，$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{K}^n$, 则有

$$f(x)=f\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(e_k)=\sum_{k=1}^{n}f_k\xi_k.$$

证毕.

例 1. $(\boldsymbol{K}^n)^*=\boldsymbol{K}^n$.

验. 由命题 1 可知，当我们将任意元 $f\in(\boldsymbol{K}^n)^*$ 与那里的 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 之一一对应关系记为 φ 时，显然 φ 是空间 $(\boldsymbol{K}^n)^*$ 与 $\boldsymbol{K}^n$ 的"线性同构"映象，并且，在命题的充分性证明中，我们还得出

$$\|f\|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2}=\|(f_1,f_2,\cdots,f_n)\|;$$

另一方面，当 f 非零时特别取元

$$x_0=\left(\frac{\bar{f}_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2}},\frac{\bar{f}_2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2}},\cdots,\frac{\bar{f}_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2}}\right)\in\boldsymbol{K}^n$$

时，显然有 $\|x_0\|=1$，且 $f(x_0)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2}$，由此，

$$\|f\|\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2}=\|(f_1,f_2,\cdots,f_n)\|.$$

即上述映象 φ 是"保范"的(对 f 为零元也对). 这样，便得到 $(\boldsymbol{K}^n)^*$ 与 $\boldsymbol{K}^n$ 是等价的. 验毕.

命题 2. 为了有界线性泛函 $f\in(c)^*$, 必须且只须有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\xi_n,\forall x=\{\xi_n\}\in(c),$$

其中，$f=\{f_n\}\in(l^1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$.

证．1)"$\Longleftarrow$" 如上面所设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n\xi_n$，$\forall x=\{\xi_n\}\in(c)$，由于 $\{f_n\}\in(l^1)$，故有

$$|f(x)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}f_n\xi_n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|f_n\xi_n|\leqslant(\sup_{0\leqslant n<\infty}|\xi_n|)\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|\right)\|x\|,\quad\forall x=\{\xi_n\}\in(c).$$

这里，我们注意：由于 $\xi_n\to\xi_0(n\to\infty)$，故不难导出 $\sup\limits_{0\leqslant n<\infty}|\xi_n|=\sup\limits_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n|=\|x\|$. 显然可知 f 是 (c) 上的有界泛函，至于其分配性则是明显的，即 $f\in(c)^*$.

2)"$\Longrightarrow$" 设 $f\in(c)^*$，类似上例，我们假设 (c) 中的元

$$e_0'=(1,1,\cdots);\ e_n=(0,\cdots,0,\underset{(\text{第}n\text{位})}{1},0,\cdots)\quad(n=1,2,\cdots).$$

并令 $f_0'=f(e_0')$，$f_n=f(e_n)$ $(n=1,2,\cdots)$. 那么，首先，对于 (c) 中任一元 $x=\{\xi_n\}$，当设 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$ 时，我们容易验证在"按范收敛"的意义下，有关系式

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$$

$$=[\xi_0+(\xi_1-\xi_0),\xi_0+(\xi_2-\xi_0),\cdots,\xi_0+(\xi_n-\xi_0),\cdots]$$

$$=\xi_0e_0'+\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)e_n.$$

其次，由于 f 是 (c) 上的有界线性泛函，因而是连续的线性泛函，故对上述元 x，有

$$f(x)=\xi_0f(e_0')+\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)f(e_n)$$

$$=f_0'\xi_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\xi_n-\xi_0)\tag{2}$$

下面，考查由泛函 f 所定的系数 f_0' 与 $f_n(n=1,2,\cdots)$所具有

的性质．为此我们取元 $x_N=\{\xi_n^{(N)}\}$，其中，

$$\xi_n^{(N)}=\begin{cases}\dfrac{\bar{f}_n}{|f_n|}, & \text{当 } n\leqslant N \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } n>N \text{ 时}\end{cases}\qquad (N=1,2,\cdots)$$

(这里,再次强调指出,与第一章一样,当 $|f_n|=0$ 时，我们“约定” $\frac{\bar{f}_n}{|f_n|}=0$，以后均不一一指明了．)易见,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{(N)}=0=\xi_0^{(N)}$，故知 $\forall N$ (自然数)，均有 $x_N\in(c)$，且有 $\|x_N\|\leqslant 1$， $f(x_N)=\sum\limits_{i=1}^{N}|f_i|$．于是,可以得到

$$|f(x_N)|\leqslant\|f\|\|x_N\|\leqslant\|f\|.$$

也即有

$$\sum_{i=1}^{N}|f_i|\leqslant\|f\|\quad(N=1,2,\cdots).$$

于是当令 $N\to\infty$ 时,可得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|\leqslant\|f\|.$$

这样，我们显然可以看出 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f_i|$ 是收敛的，从而(2)可以变换为

$$f(x)=f_0'\xi_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_n\xi_n-\xi_0\sum_{n=1}^{\infty}f_n.$$

而当设

$$f_0=f_0'-\sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

时,最后可以导得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\xi_n,\quad\forall x=\{\xi_n\}\in(c).$$

其中，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f_n|\leqslant|f_0|+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n|<\infty$，也即 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_n,\cdots)\in(l^1)$．证毕．

例 2． $(c)^*=(l^1)$．

验. 由命题 2 可以得到空间 $(c)^*$ 中的元 f 与空间 (l^1) 中的元 $(f_0,f_1,\cdots,f_n,\cdots)$ 之间的线性同构映象. 下面,证明此映象是"保范"的.

事实上,在上面命题 2 的充分性证明中,我们已经导得

$$|f(x)| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\right) \|x\|, \quad \forall x \in (c).$$

从而可得

$$\|f\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|; \tag{3}$$

而另一方面,如果取元 $x_N = \{\xi_n^{(N)}\}(N = 1,2,\cdots)$, 其中,

$$\xi_n^{(N)} = \begin{cases} \bar{f}_n/|f_n|, & \text{当 } n \leqslant N \text{ 时;} \\ \bar{f}_0/|f_0|, & \text{当 } n > N \text{ 时,} \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^{(N)} = \bar{f}_0/|f_0| = \xi_0^{(N)}(N = 1,2,\cdots)$,故知 $\forall N$(自然数),均有 $x_N \in (c)$. 所以,有

$$f(x_N) = \sum_{n=0}^{N} |f_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \cdot \bar{f}_0/|f_0|.$$

又由(注意到 $\|x_N\| \leqslant 1$)

$$|f(x_N)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_N\| = \|f\|,$$

故有

$$\left|\sum_{n=0}^{N} |f_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \cdot \bar{f}_0/|f_0| \right| \leqslant \|f\| \quad (N = 1,2,\cdots).$$

因此,当取 $N \to \infty$ 时, 注意到 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |f_n \cdot f_0/|f_0||$ 乃是收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ 的余项, 从而又可推得

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \leqslant \|f\|. \tag{4}$$

综合(3),(4)式,便导出该映象是"保范"的,也即$(c)^*$与(l^1)是等价的. 验毕.

注 4. 为了以后的需要,我们还要指出: 对于空间(c)中所有

极限为 0 的收敛数列全体所成的闭线性子空间(c_0)而言，类似于上面的命题 2 及例 2 不难导出 $(c_0)^*=(l^1)$.

命题 3. 为了有界线性泛函 $f\in(l^p)^*(p\geqslant 1)$，必须且只须有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\xi_n,\quad \forall x=\{\xi_n\}\in(l^p),$$

其中，$f=\{f_n\}\in(l^q)$（这里，当 $p>1$ 时，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$；当 $p=1$ 时，$q=\infty$，$(l^\infty)=(m)$）.

证. 1)“$\Longleftarrow$” 由 §1.2 的 Hölder 不等式并注意到那节后面的注 8（即此不等式对于 $p=1$ 也成立），我们得知，从上面命题中的泛函的表达式中，我们可以导出

$$|f(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\xi_n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n\xi_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|x\|,\quad \forall x=\{\xi_n\}\in(l^p).$$

从而由设 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$（当 $q=\infty$ 时，上式理解为 $\sup_n|f_n|$），可知 f 为 (l^p) 上的有界线性泛函，也即 $f\in(l^p)^*$.

2)“$\Longrightarrow$” 设已给 $f\in(l^p)^*$，我们先令 $e_n=(0,\cdots,\underset{(第n位)}{0,1,0},\cdots)$ $(n=1,2,\cdots)$，那么，由 §1.3 可知，上述可列元构成空间的可数基，即有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n,\quad \forall x=\{\xi_n\}\in(l^p).$$

再注意到 f 为空间 (l^p) 上的连续线性泛函，故当令

$$f_n=f(e_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

时，显然可得

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\xi_n,\quad \forall x=\{\xi_n\}\in(l^p).$$

下面，分别对 $p>1$ 与 $p=1$ 的情况来考查，这里由泛函 f 所得数列 $\{f_n\}$ 的性质:

i. 当 $p>1$ 时，我们取 (l^p) 中一列元 $x_N=\{\xi_n^{(N)}\}$，其中，

$$\xi_n^{(N)}=\begin{cases}|f_n|^{q-1}\dfrac{\bar{f}_n}{|f_n|}, & 当\ n\leqslant N\ 时\\ 0, & 当\ n>N\ 时\end{cases}\quad (N=1,2,\cdots).$$

那么，可得到 $f(x_N)=\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n|^q$，从而导出(注意 $p(q-1)=q$)

$$\sum_{n=1}^{N}|f_n|^q=f(x_N)\leqslant\|f\|\|x_N\|=\|f\|\left[\sum_{n=1}^{N}(|f_n|^{q-1})^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{n=1}^{N}|f_n|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

$\left(当\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n|^q\neq 0\ 时\right)$将上式两边同除以$\left(\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}$，从而得到

$\left(再次注意\ 1-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{q}\right)$，$\left(\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|\quad(N=1,2,\cdots)$

$\left(此式当\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n|^q=0\ 时也成立\right)$. 最后，令 $N\to\infty$，由上式可导

出 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$，即 $\{f_n\}\in(l^q)$.

ii. 当 $p=1$ 时，我们取 (l^1) 中的一列元 $x_N=\{\xi_n^{(N)}\}$，其中，

$$\xi_n^{(N)}=\begin{cases}\dfrac{\bar{f}_N}{|f_N|}, & 当\ n=N\ 时\\ 0, & 当\ n\neq N\ 时\end{cases}\quad (N=1,2,\cdots).$$

那么，可得到 $f(x_N)=|f_N|(N=1,2,\cdots)$，从而有

$$|f_N|=f(x_N)\leqslant\|f\|\|x_N\|=\|f\|\quad(N=1,2,\cdots).$$

由此可以导出 $\sup\limits_N|f_N|\leqslant\|f\|$. 也即 $\{f_n\}\in(l^\infty)=(m)$. 证毕.

例 3. $(l^p)^*=(l^q)$ (其中，$p>1$ 时，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$；$p=1$ 时，$q=\infty$，$(l^\infty)=(m)$).

验. 由命题 3 可以得到空间 $(l^p)^*$ 中的元 f 与空间 (l^q) 中的元 $\{f_n\}$ 之间的线性同构映象. 并且可证明此映象是"保范"的. 验毕.

注 5. 特别地，由例 3 我们可以导出空间 (l^2) 是自共轭空间.

下面，我们举几个“函数”空间的例子．为此先给出一个著名的命题如下：

命题 4 (Riesz 定理). 为了有界线性泛函 $f\in C^*[a,b]$，必须且只须有

$$f(x)=\int_a^b x(t)df(t),\ \forall x=x(t)\in C[a,b],$$

其中，$f(t)\in V[a,b]$ ($V[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上以“全变差”为范数的“左连续”的囿变函数全体所成的赋范线性空间．其中，相差常数者视为同一元).

证．1)“$\Longleftarrow$” 这是较明显的，因为当 $C[a,b]$ 上的泛函 f 表成

$$f(x)=\int_a^b x(t)df(t),\quad \forall x=x(t)\in C[a,b]$$

(其中，$f(t)\in V[a,b]$)时，显然它是分配的．再由“Riemann-Stieltjes 积分”的定义，直接可以导出

$$|f(x)|\leqslant \bigvee_a^b(f)\cdot\|x\|,\quad \forall x\in C[a,b].$$

即

$$\|f\|\leqslant \bigvee_a^b(f)\quad (\bigvee_a^b(f) \text{ 为 } f(t) \text{ 在}[a,b]\text{上的“全变差”}).$$

因此 $f\in C^*[a,b]$.

2)“$\Longrightarrow$” 设已给 $f\in C^*[a,b]$．考察空间 $C[a,b]$，我们可以看出，$\forall x(t)\in C[a,b]$，由于

$$\inf_{E\in[a,b]}\{\sup|x(t)|\,|\,t\in[a,b]\backslash E,\mu(E)=0\}=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|,$$

因而亦有 $x(t)\in M[a,b]$，并且 $\|x\|_C=\|x\|_M$，于是，我们当然可以将空间 $C[a,b]$ 视为空间 $M[a,b]$ 内的一个闭线性子空间.

其次，对上述在 $C[a,b]$ 上定义的有界线性泛函 f，我们必能保持其“范数”不变地扩张为 $M[0,1]$空间上的有界线性泛函 $\hat{f}$(此“保范扩张”是可以做到的，理论上的证明我们将在下面第三章给出)．即有 $\|\hat{f}\|_{M^*}=\|f\|$.

这里，讨论空间 $M[a, b]$ 内的一族函数 $\{z_t(\lambda) | a \leqslant t \leqslant b\}$（参看图 2.7）.

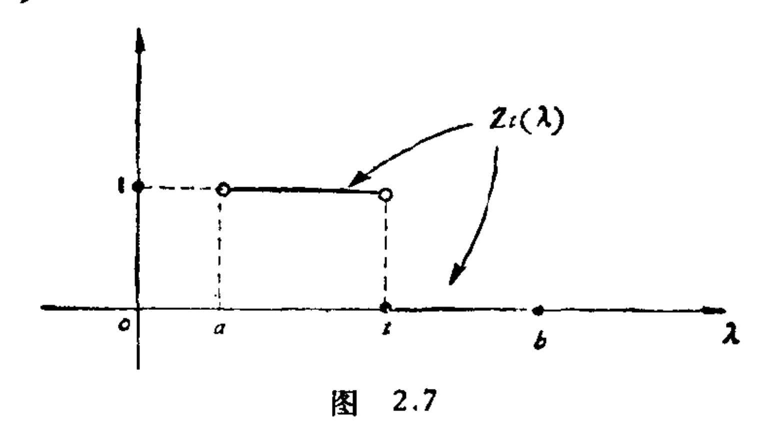


图 2.7

$$z_t(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a \leqslant \lambda < t \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } t \leqslant \lambda \leqslant b \text{ 时} \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

并且令

$$f^\circ(t) = \hat{f}(z_t) \ (a \leqslant t \leqslant b).$$

下面证明以上定义的函数 $f^\circ(t)$ 在 $[a,b]$ 上是囿变函数. 为此，我们先把 $[a,b]$ 区间任意分割为 n 个小区间，设其分点表为

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

那么，当设复数

$$\xi_k = \overline{f^\circ(t_k) - f^\circ(t_{k-1})} / |f^\circ(t_k) - f^\circ(t_{k-1})| \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

时，由于泛函 $\hat{f} \in M^*[a,b]$，因此，我们可以得到关系式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f^\circ(t_k) - f^\circ(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k [f^\circ(t_k) - f^\circ(t_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k [\hat{f}(z_{t_k}(\lambda)) - \hat{f}(z_{t_{k-1}}(\lambda))] \\ &= \hat{f}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k (z_{t_k} - z_{t_{k-1}}\right], \end{aligned}$$

根据 z_{t_k} $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的取法，由上式我们则可推出

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f^\circ(t_k) - f^\circ(t_{k-1})| &\leqslant \|\hat{f}\|_{M^*} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k (z_{t_k} - z_{t_{k-1}}) \right\|_M \\ &\leqslant \|\hat{f}\|_{M^*} = \|f\|. \end{aligned}$$

由于上面 $[a,b]$ 区间分法的任意性，由此可导得

$$\bigvee_a^b (f^\circ) \leqslant \|f\|.$$

于是，由 $\forall x = x(t) \in C[a,b]$，当令 $\mathfrak{z}_k(\lambda) = \mathfrak{z}_{a+\frac{k}{n}(b-a)}(\lambda)$，$\forall \lambda \in [a,b]$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 时，便可以构造出空间 $M[a,b]$ 内的一元列 $\{z_n\}$，

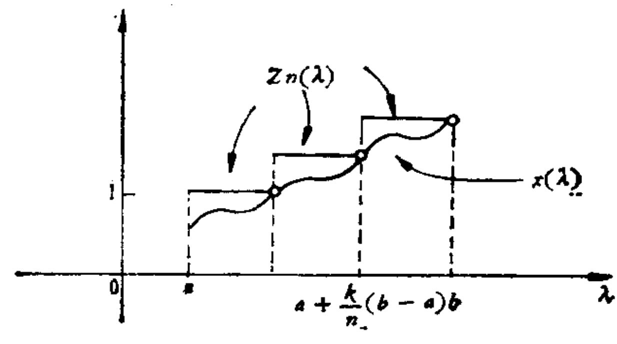


图 2.8

$$z_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} x\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)[\mathfrak{z}_k(\lambda) - \mathfrak{z}_{k-1}(\lambda)],$$

$\forall \lambda \in [a,b]$ $(n = 1,2,\cdots)$. 由图 2.8 可见，$z_n(\lambda)$ 即为 $x(\lambda)$ 在 $[a,b]$ 上的一个“简单函数”(阶梯函数)，并且有关系式

$$\begin{aligned}\hat{f}(z_n) &= \sum_{k=1}^{n} x\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)[\hat{f}(\mathfrak{z}_k) - \hat{f}(\mathfrak{z}_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^{n} x\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\left[f^\circ\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right. \\ &\qquad \left. - f^\circ\left(a + \frac{k-1}{n}(b-a)\right)\right],\end{aligned}$$

因而注意到 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数，从而由“R-S 积分”的性质，可以导出

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(z_n) = \int_a^b x(t)\,df^\circ(t). \tag{5}$$

而另一方面，由函数列 $\{z_n(t)\}$ 的做法，我们可知

$$\|z_n - x\|_M = \sup_{t\in[a,b]} |z_n(t) - x(t)| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

从而由泛函 $\hat{f}$ 的连续性，又可导出

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(z_n) = \hat{f}(x). \tag{6}$$

因此，由极限的唯一性我们由式(5)，(6)可导出

$$\hat{f}(x)=\int_a^b x(t)df^{\circ}(t),\quad \forall x=x(t)\in C[a,b].$$

同样，由于 $\hat{f}$ 乃是泛函 $f\in C^*[0,1]$ 的“扩张”泛函，所以，便导出

$$f(x)=\int_a^b x(t)df^{\circ}(t),\quad \forall x=x(t)\in C[a,b].$$

最后，由“R-S”积分的性质，我们可知，上述囿变函数 $f^{\circ}(t)$ 是可以对应于唯一的一个“左连续”的囿变函数 $f(t)\in V[a,b]$（从而显然有

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(f^{\circ})\leqslant\|f\|)$$

使其恒满足关系式

$$\int_a^b x(t)\,df(t)=\int_a^b x(t)df^{\circ}(t),\quad \forall x(t)\in C[a,b].$$

由此导出了关系式

$$f(x)=\int_a^b x(t)df(t),\quad \forall x=x(t)\in C[a,b],$$

其中，$f(t)\in V[a,b]$. 证毕

例 4. $C^*[a,b]=V[a,b]$.

本节最后，我们再给出一个命题并导出一个 L^p $(p\geqslant 1)$ 空间的共轭空间例子.

命题5. 为了有界泛函 $f\in(L^p[a,b])^*(p\geqslant 1)$，必须且只须有

$$f(x)=\int_a^b x(t)f(t)dt,\quad \forall x=x(t)\in L^p[a,b],$$

其中，$f(t)\in L^q[a,b]$（这里，当 $p>1$ 时，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$；当 $p=1$ 时，$q=\infty$，$L^{\infty}[a,b]=M[a,b]$）.

证. 1)“$\Longleftarrow$” 同样由§1.2 的 Hölder 不等式和那里的注 8，我们可以从上面的表达式中导出（$p\geqslant 1$均对）

$$\|f\|\leqslant\left(\int_a^b|f(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

从而我们不难看出 f 为 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函，也即有 $f\in(L^p[a,b])^*$.

2)"$\Longrightarrow$" 设已知 $f\in(L^p[a,b])^*$，类似证明命题 4 的必要性的方法，在空间 $L^p[a,b]$ 内取一族函数 $\{z_t(\lambda)\,|\,a\leqslant t\leqslant b\}$,

$$z_t(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{当 } a\leqslant\lambda<t \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } t\leqslant\lambda\leqslant b \text{ 时}\end{cases}\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$

并且设

$$g(t)=f(z_t)\quad(a\leqslant t\leqslant b).$$

我们可以看出 $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上是"绝对连续"的，事实上，$\forall\varepsilon>0$，只要取正数 $\delta=\left(\dfrac{\varepsilon}{1+\|f\|}\right)^p$，那么，对于 $[a,b]$ 上任意 n 个互不相交的区间 $\Delta_k=(\alpha_k,\beta_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，只要有 $\sum\limits_{k=1}^n|\Delta_k|<\delta$，并设

$$\xi_k=\overline{\frac{g(\beta_k)-g(\alpha_k)}{|g(\beta_k)-g(\alpha_k)|}}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

时，则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n|g(\beta_k)-g(\alpha_k)|&=\sum_{k=1}^n\xi_k[g(\beta_k)-g(\alpha_k)]\\&=\sum_{k=1}^n\xi_k[f(z_{\beta_k})-f(z_{\alpha_k})]=f\left[\sum_{k=1}^n\xi_k(z_{\beta_k}-z_{\alpha_k})\right]\\&\leqslant\|f\|\cdot\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k(z_{\beta_k}-z_{\alpha_k})\right\|,\end{aligned}$$

注意到 $z_t(\lambda)$ 的取法，我们又有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n\xi_k(z_{\beta_k}-z_{\alpha_k})\right\|&=\left(\int_a^b\left|\sum_{k=1}^n\xi_k[z_{\beta_k}(\lambda)-z_{\alpha_k}(\lambda)]\right|^pd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^n\int_{\alpha_k}^{\beta_k}d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^n|\Delta_k|\right)^{\frac{1}{p}}<\delta^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{\varepsilon}{1+\|f\|}.\end{aligned}$$

从而可得:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \|f\|} \leqslant \varepsilon.$$

于是由函数论的知识可知，$g(t)$ 必在 $[a,b]$ 区间上"概"存在着 L-可积的导函数，当令

$$f(t) = g'(t) \quad (t \in [a,b])$$

时，有

$$g(t) = g(a) + \int_a^t g'(\lambda)\, d\lambda = g(a) + \int_a^t f(\lambda) d\lambda, \ \forall t \in [a,b]$$

但由泛函 f 的分配性，可知，由于 $\mathfrak{z}_a = \theta$（注意：在 L^p 空间中，"概"为 0 的函数即为零元 θ），因此，由函数 $g(t)$ 的取法有

$$g(a) = f(\mathfrak{z}_a) = f(\theta) = 0,$$

从而我们导出

$$g(t) = \int_a^t f(\lambda) d\lambda, \quad \forall t \in [a,b].$$

这样，对于 $L^p[a,b]$ 空间内所取的上述函数族 $\{\mathfrak{z}_t | a \leqslant t \leqslant b\}$ 中的每一函数 $\mathfrak{z}_t$，可得到泛函表达式

$$f(\mathfrak{z}_t) = g(t) = \int_a^t f(\lambda)\, d\lambda = \int_a^t f(\lambda) d\lambda = \int_a^b \mathfrak{z}_t f(\lambda) d\lambda.$$

并由 f 的分配性可知，对于空间 $L^p[a,b]$ 中，形如

$$z_{n,\alpha}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [\mathfrak{z}_{t_k}(\lambda) - \mathfrak{z}_{t_{k-1}}(\lambda)] + \mathfrak{z}_{t_n}(b)$$

的右连续简单函数（其中，$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ 为 $[a,b]$ 的任意分点，α_k 为任意复数 $(k = 1, 2, \cdots, n)$；$n = 1, 2, \cdots$）均有泛函表达式

$$f(z_{n,\alpha}) = \int_a^b z_{n,\alpha}(\lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

其次，对于 $L^p[a,b]$ 中的任一有界可测函数 $y(t)$，从函数论的知识还知，必有一列"一致有界"右连续的简单函数 $\{z_n(t)\}$，使得 $z_n(t) \to y$（概）$(n \to \infty)$. 于是，由 Lebesgue 控制收敛定理，就可得到

$$\|z_n - y\| = \left(\int_a^b |z_n(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (n \to \infty);$$

和

$$f(z_n) = \int_a^b z_n(t)f(t)dt \to \int_a^b y(t)f(t)dt \quad (n \to \infty).$$

所以，由泛函 f 的连续性，我们就可导出

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \int_a^b y(t)f(t)dt. \tag{7}$$

其三，为了证明上述泛函的积分表达式对整个空间 $L^p[a,b]$ 均成立，我们需要先讨论上面由泛函 f 所确定的函数 $f(t)$ 的性质.

i. 当 $p>1$ 时，有 $f(t)\in L^q[a,b]$.

事实上，取空间 $L^p[a,b]$ 的一元列 $\{y_n\}$,

$$y_n(t) = \begin{cases} |f(t)|^{q-1}\dfrac{\overline{f(t)}}{|f(t)|}, & 当\ |f(t)|^{q-1} \leqslant n\ 时; \\ n\cdot\dfrac{\overline{f(t)}}{|f(t)|}, & 当\ |f(t)|^{q-1} > n\ 时\ (n=1,2,\cdots), \end{cases}$$

那么，显然可以看出 $\{y_n(t)\}$ 是一列有界可测函数，因此，由式(7)，应有泛函表达式

$$f\{y_n\} = \int_a^b y_n(t)f(t)dt \quad (n=1,2,\cdots).$$

于是，一方面我们有

$$|f(y_n)| \leqslant \|f\|\|y_n\| = \|f\|\left(\int_a^b |y_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (n=1,2,\cdots);$$

另一方面又有（注意到 $|f(t)|^{q-1} \geqslant |y_n(t)|$）

$$\begin{aligned} |f(y_n)| &= \int_a^b y_n(t)f(t)dt = \int_a^b |y_n(t)|\,|f(t)|dt \\ &\geqslant \int_a^b |y_n(t)|\,|y_n(t)|^{\frac{1}{q-1}} dt = \int_a^b |y_n(t)|^{\frac{q}{q-1}} dt \\ &= \int_a^b |y_n(t)|^p dt \quad (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

综合起便有

$$\int_a^b |y_n(t)|^p dt \leqslant \|f\|\left(\int_a^b |y_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (n=1,2,\cdots),$$

由此导出

$$\left(\int_a^b |y_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\| \qquad (n=1,2,\cdots).$$

注意到由 $f(t)$ 是 L 可积的，所以由 $y_n(t)$ 的取法可知

$$|y_n(t)| \to |f(t)|^{q-1}\ (\text{概}) \qquad (n\to\infty).$$

因此，由 Fatou 引理，我们导出

$$\left[\int_a^b \left(|f(t)|^{q-1}\right)^p dt\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

此即有

$$\left(\int_a^b |f(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|,$$

也即导出 $f(t)\in L^q[a,b]$.

ii. 当 $p=1$ 时，有 $f(t)\in L^\infty[a,b]=M[a,b]$.

事实上，注意到在证明此处必要性的时候，我们所假设的函数 $g(t)$ 不仅在 $[a,b]$ 上绝对连续而且还满足 Lipschitz 条件. 因为，$\forall t_1,t_2\in[a,b]$，由假设有

$$\begin{aligned}|g(t_2)-g(t_1)| &= |f(z_{t_2})-f(z_{t_1})| = |f(z_{t_2}-z_{t_1})| \\ &\leqslant \|f\|\|z_{t_2}-z_{t_1}\| = \|f\|\left|\int_{t_1}^{t_2} |z_{t_2}(\lambda)-z_{t_1}(\lambda)|d\lambda\right| \\ &= \|f\|\cdot|t_2-t_1|,\end{aligned}$$

从而可知相应的函数

$$|f(t)| = |g'(t)| \leqslant \|f\|\ (\text{概})\ t\in[a,b].$$

由此导出

$$\inf_{E\subset[a,b]}\{\sup|f(t)|\,|\,t\in[a,b]\setminus E,\mu(E)=0\}\leqslant\|f\|,$$

也即 $f(t)\in L^\infty[a,b]=M[a,b]$.

最后，由上面关于 $f(t)$ 的性质，可将式(7)所得的泛函积分表达式推广到整个 $L^p[a,b]$ 空间上去. 事实上，$\forall x(t)\in L^p[a,b]$，在 §1.3 L^p 可分性的证明中，我们已经知道，在 $L^p[a,b]$ 中必有一有界可测函数列 $\{y_n(t)\}$，使得

$$\|y_n - x\| \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

因而，由泛函 f 的连续性，我们可以导出

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n(t)f(t)dt.$$

另一方面,注意到上面关于函数 $f(t)\in L^q[a,b]$ 的结果,由 Hölder 不等式($p=1$ 也在内)就可得到

$$\left|\int_a^b [y_n(t)-x(t)]f(t)dt\right|\leqslant\int_a^b |y_n(t)-x(t)||f(t)|dt$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |y_n(t)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |f(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\int_a^b |f(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|y_n-x\|\to 0\ (n\to\infty).$$

结合上式也可导出:

$$f(x)=\int_a^b x(t)f(t)dt,\ \forall x=x(t)\in L^p[a,b],$$

由上面的结果,可知 $f(t)\in L^q[a,b]$. 证毕

例 5. $(L^p[a,b])^*=L^q[a,b]\left(p\geqslant 1;\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;p=1\right.$ 时 $\left.q=\infty\right)$.

注 6. 从例 5 可知,空间 $L^2[a,b]$ 亦为自共轭空间.

注 7. 在例 3 与例 5 的结果 $(l^p)^*=(l^q)$, $(L^p)^*=L^q$ 中,数 p 与 q 有关系: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ($p=1$ 时,约定 $q=\infty$),由于上式中 p 与 q 是对称的,人们自然要问,如果当 $p=\infty$ 时,也约定 $q=1$,那么,上式是否也正确呢? 其实,这是不正确的. 在下节我们将不严格地说明 $(l^\infty)^*=(m^*)\supsetneqq(l^1)$, $(L^\infty)^*=(M)^*\supsetneqq L^1$,而只有在第三章,我们才能严格地验证它.

习　　题

1. 设在 K^2 中引入范数

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|,\quad \forall x=(\xi_1,\xi_2)\in K^2.$$

其所构成的赋范线性空间记为 $K^2_{(1)}$, 在 $K^2_{(1)}$ 上定义一泛函 f,

$$f(x)=\alpha\xi_1+\beta\xi_2,\qquad \forall x=(\xi_1,\xi_2)\in K^2_{(1)}.$$

(其中 α,β 为两固定复数). 试证明 $f\in(K^2_{(1)})^*$, 并求 $\|f\|=?$

2. 试对"所有数列"所构成的空间(S)(其中,"收敛"定义为"按坐标收

敛”),求出其连续线性泛函的一般形式.

3. 设空间 $D^{(k)}[0,1]$ 表示(§1.2 习题)空间 $C^{(k)}[0,1]$ 内的元按范数

$$\|x\| = \max_{0\leq t\leq 1}\{|x(t)|,|x'(t)|,\cdots,|x^{(k)}(t)|\}$$

所成的赋范线性空间,试证明:

(i) $D^{(k)}[0,1] = E_k \overset{\circ}{+} C[0,1]$. (其中,$E_k$ 为一 k 维空间;“$\overset{\circ}{+}$”表示“直接和”.)

(ii) $D^{(k)}[0,1]$ 上有界线性泛函的一般形式为

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i x^{(i)}(0) + \int_0^1 x^{(k)}(t)d\,f(t),\quad \forall x\in D^{(k)}[0,1].$$

(其中,函数 $f(t)\in V[0,1]$ 由泛函 f 唯一确定.)

4. 设 E_1,E_2 均为赋范线性空间,试证明:对于积空间 $E_1\times E_2$(范数定义为 $\|(x_1,x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$)有关系式

$$(E_1\times E_2)^* = E_1^*\times E_2^*.$$

(这里,积空间 $E_1^*\times E_2^*$ 范数定义为 $\|(f_1,f_2)\| = \max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.)

5. 设 $E = \prod_{\iota\in I}(E_\iota)$ 如§1.4 习题所定义,并设 E 中的范数定义为

$$\|(x_\iota)\| = \left(\sum_\iota \|x_\iota\|^p\right)^{\frac{1}{p}},\qquad \forall (x_\iota)\in E\ (p\geq 1)$$

试证明: $E^* = \prod_{\iota\in I}(E_\iota^*)$, 且具有范数

$$\|(f_\iota)\| = \left(\sum_\iota \|f_\iota\|^q\right)^{\frac{1}{q}},\quad \forall (f_\iota)\in E^*.$$

§ 2.4. 自反空间与共轭算子的概念

(一)

上一节,我们已经给出了几个具体空间的共轭空间的例子,讨论了对于任何赋范线性空间 E 而言,其共轭空间 E^* 总是存在的,而且不仅只含一个零元(零泛函).并且我们还知道,对于任何赋范线性空间 E 来说,其共轭空间 E^* 也构成一个赋范线性空间(且还是 Banach 空间). 自然,我们也可对于 E^* 来讨论它的共轭空间,也即 $(E^*)^*$(记为 E^{**}).常称为 E 的“二次共轭空间”. 并且由此

我们还可以引出下面的定义:

定义 1. 赋范线性空间 E 称为自反空间，是指存在一个由 E 到 E^{**} 上的如下的等价映象 φ:

$$x \longleftrightarrow \varphi_x, \qquad \forall x \in E.$$

(其中,$\varphi_x \in E^{**}$, 有时简记为 X),使得

$$\varphi_x(f) = f(x), \qquad \forall f \in E^*. \tag{1}$$

这时,我们常将相互等价的空间 E, E^{**} 记为 $E = E^{**}$.

注 1. 上面(1)定义的从空间 E 到 E^{**} 的映象 φ，通常称为"自然(或典则)映象"(由后 §3.1 定理 3，我们将可知其确为一"等价"映象,也即上述线性同构的映象是"保范"的). 并且由此我们又可得到关于一个赋范线性空间的完备化的方法,即,那时只要在 E^{**} 空间中取包含 $\varphi(E)$ 的最小闭子空间就可以了(注意，由上节结论我们可知 E^{**} 必为 Banach 空间).

注 2. 由以上定义我们还须注意，"自反空间"并不是简单地定义为一般的 E 与其二次共轭空间 E^{**} 的"等价"(§1.5 中定义1)，而必须附加它们与 E^* 中的元具有式(1)而得. 由此，人们自然会提出一个问题：空间 E 和其二次共轭空间 E^{**} 对于一般映象下的"等价"与上述的"自然映象"下的"等价"是否真的不同？其实，1951 年 R. C. James 已经举例说明确实不同[75]. 由此可知，自共轭空间也未必是自反空间. 这里,我们都不详细叙述了.

关于自反空间的一般特性,我们在下面第三章讨论. 这里,借助于上节有关共轭空间的结果,给出有关自反空间的例子.

例 1. 空间 $\boldsymbol{K}^n$, (l^2), $L^2[a,b]$ 均是自共轭的自反空间.

验. 从上节关于上述空间有界线性泛函的一般表达式中不难验得. 验毕.

例 2. 空间 (l^p), $L^p[a,b]$ $(p > 1)$, 当 $p \neq 2$ 时均是非自共轭的自反空间.

验. 下面我们只对 (l^p) 验证结论 (L^p 是完全可以类似地说明的). 首先,由上节已知,当设 q 为满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的数时，我

们有

$$(l^p)^{**} = [(l^p)^*]^* = (l^q)^* = (l^p).$$

即知 $(l^p)^{**}$ 与 (l^p) 是等价的，并且，对此等价映象 φ，我们有 $x = \{\xi_n\} \longleftrightarrow \{\varphi_{\xi_n}\} = \varphi_x$，故有

$$\varphi_x(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\xi_n} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi_n = f(x),$$

$$\forall x = \{\xi_n\} \in (l^p),$$

其中，$\{f_n\} \in (l^q)$，$\varphi_x = \{\varphi_{\xi_n}\} = \{\xi_n\}$. 由此则知 φ 为(l^p)到$(l^p)^{**}$的自然映象，即(l^p)是自反空间. 至于 $p \neq 2$ 时，(l^p) 不是自共轭空间，这是明显的. 验毕.

注 3. 并非所有赋范线性空间均是自反的. 下面，我们举出两组非自反空间的例子.

反例 1. 空间 (c) 不是自反空间.

请读者自己验证.

反例 1′. 空间 $C[a,b]$ 不是自反空间.

验. 首先，让我们考查囿变函数空间 $V[a,b]$（即 $C^*[a,b]$）上定义的一个泛函 F，

$$F(f) = \sum_{t \in [a,b]} [f(t+0) - f(t-0)]$$

（函数 $f(t)$ 在 $[a, b]$上"跃度"之和）. 我们从囿变函数的定义容易看出，F 乃是空间$V[a,b]$ 上的（非零）有界线性泛函. 即有 $0 \neq F \in V^*[a,b]$. 因此，如果设 $C[a,b]$ 为自反空间，那么，对上述 $(C[a,b])^{**}$ 中的元F，$\exists x_F \in C[a,b]$，使得

$$F(f) = f(x_F), \qquad \forall f \in V[a,b].$$

注意到上节关于 $C[a, b]$ 上有界线性泛函的一般表达式，由上两式可得到

$$\int_a^b x_F(t) df(t) = \sum_{t \in [a,b]} [f(t+0) - f(t-0)],$$

$$\forall f(t) \in V[a,b]. \qquad (2)$$

于是，特别地，当取 $V[a,b]$ 中的元f_λ 为（参看图 2.9）

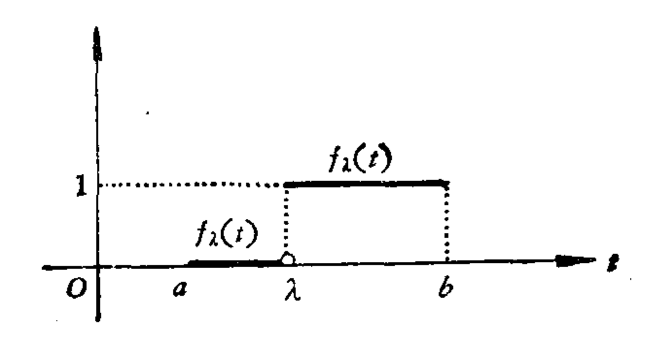


图 2.9

$$f_\lambda(t)=\begin{cases}0, a\leqslant t<\lambda\\1, \lambda\leqslant t\leqslant b\end{cases}\quad (a\leqslant\lambda\leqslant b)$$

时，由式(2)有

$$x_F(\lambda)=\int_a^b x_F(t)df_\lambda(t)=1\qquad (a\leqslant\lambda\leqslant b).$$

即 $x_F(\lambda)\equiv 1(a\leqslant\lambda\leqslant b)$，由此导出

$$\int_a^b x_F(t)df(t)=\int_a^b df(t)=f(b)-f(a),\forall f(t)\in V[a,b].$$

这样，注意到式(2)，最后可得

$$\sum_{t\in[a,b]}[f(t+0)-f(t-0)]=f(b)-f(a),\quad \forall f(t)\in V[a,b].$$

但此结果显然不能对所有的囿变函数 $f(t)$ 均成立，故矛盾．验毕．

反例 2．　空间 (l^1) 不是自反空间．

验．首先，我们考查在 (m) 空间的闭线性子空间 (c) 上定义的泛函

$$F_0(f)=\lim_{n\to\infty}f_n,\qquad \forall f=\{f_n\}\in(c).\qquad (3)$$

显然易见，F_0 为空间 (c) 上的有界线性泛函（且有 $\|F_0\|=1$），于是，与上节命题 4 的证明中用过的方法一样，我们可以将 F_0"保范扩张"为整个空间 (m) 上的有界线性泛函 F（第三章给出严格证明）．

因此，如果假设空间 (l^1) 是自反的，则有 $(l^1)^{**}=(m)^*=(l^1)$．

从而，对上述元 $F\in(m)^*=(l^1)^{**}$. 我们知道必唯一对应地有一元 $x_F\in(l^1)$，使得

$$F(f)=f(x_F),\qquad \forall f\in(m).$$

这样，由上节关于空间 (l^1) 的有界线性泛函的一般表达式及上式可导出

$$F(f)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\xi_n^{(F)},\qquad \forall f=\{f_n\}\in(m),$$

其中，$x_F=\{\xi_n^{(F)}\}\in(l^1)$. 于是，注意到泛函 F 乃是空间 (c) 上泛函 F_0 的扩张，由式(3)，可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\xi_n^{(F)}=F(f)=F_0(f)=\lim_{n\to\infty}f_n,\forall f=\{f_n\}\in(c)\subset(m).\quad(4)$$

然而上式显然是不对的. 事实上，当我们取空间(c)中一元列 $f^{(k)}$，

$$f^{(k)}=(0,\cdots,\underset{(\text{第 }k\text{ 位})}{0,1},1,\cdots)$$

时，我们由式 4 可得到

$$\sum_{n=k}^{\infty}\xi_n^{(F)}=1\qquad(k=1,2,\cdots).$$

但此显然与元 $x_F=\{\xi_n^{(F)}\}\in(l^1)$ 矛盾. 验毕.

反例 2′. 空间 $L^1[a,b]$ 不是自反空间.

验. 类似上面例 2，我们首先考查在 $M[a,b]$ 空间的闭线性子空间 $C[0,1]$ 上定义的泛函

$$F_0(f)=f(t_1)(\delta\text{-函数})\ \forall f=f(t)\in C[0,1],\qquad(5)$$

其中，t_1 为 $[a,b]$ 内的某一固定点. 显然，F_0 为空间 $C[0,1]$ 上的有界线性泛函（且有 $\|F_0\|=1$），于是，与上节命题 4 证明方法一样，我们可以将 F_0“保范扩张”为整个空间 $M[a,b]$ 上的有界线性泛函 F.

因此，如果设空间 L^1 是自反的，则有 $(L^1)^{**}=(M)^*=L^1$，从而，对上述元 $F\in(M)^*=(L^1)^{**}$，必唯一对应地有一元 $x_F\in L^1$，使得

$$F(f)=f(x_F),\quad \forall f\in M[a,b].$$

这样，注意到上节关于空间 $L^1[a,b]$ 的有界线性泛函的一般

表达式，由上式可得

$$F(f)=\int_a^b x_F(t)f(t)dt, \quad \forall f=f(t)\in M[a,b].$$

由于泛函 F 乃是空间 $C[a,b]$ 上泛函 F_0 的扩张，因而由式(5)可导出

$$\int_a^b x_F(t)f(t)dt=F(f)=F_0(f)=f(t_1),$$

$$\forall f=f(t)\in C[0,1], \tag{6}$$

显然上式是不对的. 事实上，当在空间 $C[0,1]$ 中取一元列（参看图 2.10）

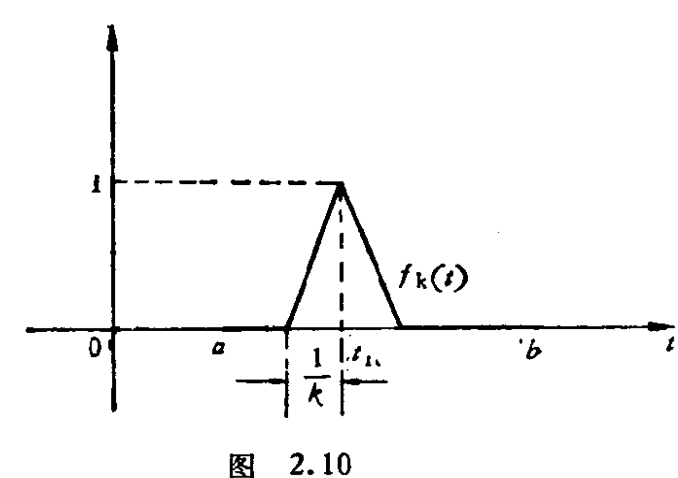


图 2.10

$$f_k(t)=\begin{cases}1+k(t-t_1), & t\in\left[t_1-\frac{1}{k},\ t_1\right];\\ 1-k(t-t_1), & t\in\left[t_1, t_1+\frac{1}{k}\right];\\ 0, & \text{在 } [a,b] \text{ 其它点}\end{cases}$$

$(k=n_0, n_0+1,\cdots)$时，这里，n_0 为使$\left[t_1-\frac{1}{n_0},\ t_1+\frac{1}{n_0}\right]\subset[a,b]$的某一自然数，由式(6)可得到

$$1=f_k(t_1)=\int_a^b x_F(t)f_k(t)dt\leqslant\int_{t_1-\frac{1}{k}}^{t_1+\frac{1}{k}}|x_F(t)|dt$$

$$(k=n_0, n_0+1,\cdots).$$

显然，其与（元 $x_F(t)\in L^1[a,b]$）$|x_F(t)|$ 积分的绝对连续性矛盾.

验毕.

注 4. 由上面例子我们导出了一个在实际应用中十分有用

的结果，即“δ-函数”是不能用 L-积分的形式来表出的.

（二）

有了§2.3关于共轭空间的概念，就可引出共轭算子的定义.

定义 2. 设T是从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的“稠定”(§2.1，定义2)分配算子，F_1^* 为 E_1^* 的一线性子空间；如果对每一 $g\in F_1^*$，相应的

$$g^*(x)=g[\mathrm{T}(x)]$$

均为 $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 上的有界线性泛函，那么，我们可知（§2.2，习题4），此时 g^* 将唯一确定 E 上的一有界线性泛函（仍记为 g^*），故当定义

$$g^*=\mathrm{T}^*(g),\quad \forall g\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)=F_1^*\subset E_1^*$$

时，则 T^* 是一意确定的从 E_1^* 内到 E^* 内的一分配算子，称为T的**共轭算子**.

注 5. T^* 是 E_1^* 内的分配算子.

事实上，$\forall g_1,g_2\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)\subset E_1^*$，由定义一方面可以得到

$$\begin{aligned}(g_1+g_2)[\mathrm{T}(x)]&=g_1[\mathrm{T}(x)]+g_2[\mathrm{T}(x)]\\&=[\mathrm{T}^*(g_1)](x)+[\mathrm{T}^*(g_2)](x)\\&=[\mathrm{T}^*(g_1)+\mathrm{T}^*(g_2)](x),\quad\forall x\in\mathscr{D}(\mathrm{T});\end{aligned}$$

另一方面又可以得到

$$(g_1+g_2)[\mathrm{T}(x)]=[\mathrm{T}^*(g_1+g_2)](x),\quad\forall x\in\mathscr{D}(\mathrm{T}).$$

因此由T是稠定的假设，同样由前面§2.2习题4可知

$$\mathrm{T}^*(g_1+g_2)=\mathrm{T}^*(g_1)+\mathrm{T}^*(g_2),\qquad\forall g_1,g_2\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*).$$

也即导出了 T^* 的可加性. 其次，同样由共轭算子的定义，对于任意的元 $g\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$ 及数 $\alpha\in\boldsymbol{K}$，我们又可得到

$$\begin{aligned}(\alpha g)[\mathrm{T}(x)]&=\alpha\cdot g[\mathrm{T}(x)]=\alpha\cdot[\mathrm{T}^*(g)](x)\\&=[\alpha(\mathrm{T}^*(g))](x),\qquad\forall x\in\mathscr{D}(\mathrm{T})\end{aligned}$$

及

$$(\alpha g)[\mathrm{T}(x)]=[\mathrm{T}^*(\alpha g)](x),\qquad\forall x\in\mathscr{D}(\mathrm{T}),$$

因而同样可导出

$$\mathrm{T}^*(\alpha g)=\alpha\cdot\mathrm{T}^*(g),\qquad\forall g\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*),\alpha\in\boldsymbol{K}.$$

下面给出共轭算子的两个简单命题(以下均设$F_1^* = E_1^*$):

定理 1. 在上面定义 2 中，如果T为整个E上定义的有界线性算子,那么,相应的泛函g^*必为E上的有界线性泛函,相应的共轭算子T^*必为E_1^*上的有界线性算子，而且，$\|T^*\| \leqslant \|T\|$(在后面第三章我们还可得到精确的关系式$\|T^*\| = \|T\|$).

证. 前半段结论是容易得到的，只要我们注意到g^*的定义，就不难由

$$|g^*(x)| = |g(T(x))| \leqslant \|g\|\|T(x)\| \leqslant (\|g\| \cdot \|T\|)\|x\|, \forall x \in E$$

得出. 至于后半段结论,注意到共轭算子T^*的定义,由于有

$$[T^*(g)](x) = g^*(x) = g(T(x)), \quad \forall x \in E, \ \forall g \in E_1^*,$$

因而由前式我们可得

$$|[T^*(g)](x)| \leqslant (\|g\| \cdot \|T\|) \|x\|, \quad \forall x \in E, \quad \forall g \in E_1^*,$$

由此

$$\|T^*(g)\| \leqslant \|T\|\|g\|, \quad \forall g \in E_1^*,$$

因而最后导出$\|T^*\| \leqslant \|T\|$. 证毕.

定理 2. 如果由定义 2 所定义的共轭算子T_1^*, T_2^*, T^*均存在,那么,当设$\mathscr{D}(T_1 + T_2)$是E的一稠线性子空间时，则$(T_1 + T_2)^*$, $(\alpha T)^*$ $(\alpha \in \boldsymbol{K})$也必存在,且有

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*, (\alpha T)^* = \alpha T^*(\alpha \in \boldsymbol{K}).$$

此外,如果$E = E_1$时,则E上的"单位算子"$\mathscr{E}$必有$\mathscr{E}^* = $;$\mathscr{E}$而且当$T \in B(E \to E_1)$，且T的逆算子$T^{-1}$存在及$T^{-1} \in B(E_1 \to E)$时,还有$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

证明作为习题留给读者完成.

下面,我们再给出一个关于全连续算子的共轭算子的命题:

定理 3. 设A为从赋范线性空间E到E_1内的全连续线性算子. 那么,A^*必为空间E_1^*到E^*内的全连续算子.

证. 不难看出,为了证明算子A^*为全连续算子,只要证明它能将E_1^*上的"单位球"S_1^*变为E^*内的列紧集就可以了(参看§2.2 习题 7). 下面证明这一事实.

首先，由A的全连续假设我们可知，对于E中的闭单位球$\bar{S}$，集$A(\bar{S})$为空间E_1中的列紧集．于是$A(\bar{S})$就构成了一个列紧距离空间．因此，$\forall g \in S_1^* \subset E_1^*$，当视其为列紧距离空间$A(\bar{S})$上的"函数"时，一方面我们有

$$|g(z)| \leqslant \|g\|\|z\| = \|g\|\|A(x)\| \leqslant \|g\|\|A\|\|x\| \leqslant \|A\|, \quad \forall z \in A(\bar{S}).$$

（注意：$\|g\| \leqslant 1$及$x \in \bar{S}$故$\|x\| \leqslant 1$．）另一方面我们又有

$$|g(z_1) - g(z_2)| = |g(z_1 - z_2)| \leqslant \|g\|\|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in A(\bar{S}).$$

因而即知"函数"族S_1^*在$A(\bar{S})$上是"一致有界"且"等度连续"的．从而由§2.2的Ascoli-Arzelà定理可知，S_1^*在$A(\bar{S})$上按"一致收敛"的意义下是列紧集．

这样，对于集$A^*(S_1^*)$的任意无穷元列$\{A^* g_n | g_n \in S_1^*\}$，由上面结果，我们从$\{g_n\} \subset S_1^*$中可以选出一子列$\{g_{n_k}\}$，使得

$$\max_{x \in \bar{S}} |g_{n_i}(A(x)) - g_{n_j}(A(x))| \to 0 \quad (i, j \to \infty).$$

由此可导出

$$\sup_{x \in \bar{S}} |[A^*(g_{n_i}) - A^*(g_{n_j})](x)| = \sup_{x \in \bar{S}} |[A^*(g_{n_i})](x) - [A^*(g_{n_j})](x)| \to 0 \quad (i, j \to \infty).$$

也即得到

$$\|A^*(g_{n_i}) - A^*(g_{n_j})\| \to 0 \qquad (i, j \to \infty).$$

从而知$\{A^*(g_{n_k})\} \subset E^*$为一Cauchy列．最后，由于空间$E^*$是Banach空间，故存在元$f_0 \in E^*$使得$A^*(g_{n_k}) \to f_0 \in E^* \ (k \to \infty)$．因此，导出$A^*(S_1^*)$是$E^*$内的列紧集．证毕．

与自反空间一样，我们将在后面第三章再讨论共轭算子的另一些重要性质．这里，我们就不再论述了．

下面，我们再举出几个算子的共轭算子的例子．

例1． 设T为$\boldsymbol{K}^n$到$\boldsymbol{K}^m$内的有界线性算子（如前所说，这时T由"$m \times n$阶"矩阵$T = (a_{ij})$ $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$确定），

$$z = T(x), \qquad \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{K}^n$$

(其中，$z=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$，$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\ (1\leqslant i\leqslant m)$． 那么，此时 T^* 为一个"$n\times m$ 阶"矩阵 $T^*=(b_{ij})$，且有 $b_{ij}=a_{ji}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$．(即 T^* 矩阵乃是 T 矩阵的"转置"矩阵)．

验． $\forall g\in(\boldsymbol{K}^m)^*$，由上节可知，必可唯一地确定一有序数组 $(g_1,g_2,\cdots,g_m)\in\boldsymbol{K}^m$，使得关系式

$$g(T(x))=g(z)=\sum_{i=1}^{m}g_i\eta_i=\sum_{i=1}^{m}g_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\xi_j\right),$$
$$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{K}^n$$

成立．由此可导出

$$[T^*(g)](x)=\sum_{i=1}^{m}g_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_i\xi_j$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}g_i\right)\xi_j,\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{K}^n.$$

因而，当令

$$f_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}g_i\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

时，我们显然可以看出元 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\in\boldsymbol{K}^n=(\boldsymbol{K}^n)^*$，并且上式变为

$$[T^*(g)](x)=\sum_{j=1}^{n}f_j\xi_j=f(x),\quad\forall x\in\boldsymbol{K}^n.$$

由此便得出了一个由空间 $(\boldsymbol{K}^m)^*$ 到 $(\boldsymbol{K}^n)^*$ 内的算子 T^*，

$$T^*(g)=f,\quad\forall g\in(\boldsymbol{K}^m)^*,$$

而且 $T^*=(b_{ij})$，$b_{ij}=a_{ji}\ (1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$．验毕．

例 2． 设 T 为赋范线性空间 E 到 E_1 内的"有限秩"算子，即

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)z_k,\quad\forall x\in E$$

(其中，$f_k\in E^*$，$z_k\in E_1\ (k=1,2,\cdots,n)$)．那么，此时 T^* 确定为

$$T^*(g)=\sum_{k=1}^{n}g\ (z_k)f_k,\quad\forall g\in E_1^*.$$

验．由设

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)z_k, \qquad \forall x\in E,$$

因而 $\forall g\in E_1^*$，我们有

$$g(T(x))=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g(z_k)=\sum_{k=1}^{n} g(z_k)f_k(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[g(z_k)f_k](x), \qquad \forall x\in E,$$

这样，注意到共轭算子的定义，由上式则可得到

$$[T^*(g)](x)=\sum_{k=1}^{n}[g(z_k)f_k](x), \quad \forall x\in E.$$

也即导出

$$T^*(g)=\sum_{k=1}^{n} g(z_k)f_k, \qquad \forall g\in E_1^*.$$

验毕．

注 6. 如果类似于 Hilbert 空间，我们将上面有界线性泛函记为（双线性泛函）

$$f_k(x)=\langle x,f_k\rangle, \qquad \forall x\in E;$$

$g(z_k)=\langle z_k,g\rangle$，$\langle z_k,g\rangle=\langle g,z_k\rangle$（注意此处与内积空间中"内积"的定义不同），$\forall g\in E_1^*$.

那么，上面例 2 即指出，如果

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n}\langle x,f_k\rangle z_k, \qquad \forall x\in E.$$

那么

$$T^*(g)=\sum_{k=1}^{n}\langle g,z_k\rangle f_k, \qquad \forall g\in E_1^*.$$

也即 T^* 形式上仅为在 T 的变换式中将 f_k 与 z_k 相互交换而得．

例 3. 设 $k(s,t)$ 为 $[a,b]\times[a,b]$ 上的可测函数且满足

$$\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^q ds\,dt<\infty \qquad (q\geqslant 1).$$

令

$$[K(x)](s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt, \quad \forall x=x(t)\in L^p[a,b].$$

容易验证，K是空间 $L^p[a,b]$ 到 $L^q[a,b]$ 内的有界线性算子（p 如前定义）. 这时，共轭算子 K^* 由式

$$[K^*(g)](s)=\int_a^b k(t,s)g(t)dt,$$

$$\forall g=g(t)\in(L^q[a,b])^*=L^p[a,b]$$

确定（注意后面积分算子的"核"是原来"核"中"自变量转置"而得）.

验. 由于 $\forall g\in(L^q[a,b])^*$，从上节可知必唯一地确定一函数 $g(t)\in L^p[a,b]$，使得

$$g[K(x)]=\int_a^b g(s)[K(x)](s)ds=\int_a^b g(s)ds\int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

$$=\int_a^b x(t)dt\cdot\int_a^b k(s,t)g(s)ds, \quad \forall x=x(t)\in L^q[a,b].$$

从而由共轭算子的定义可导出

$$[K^*(g)](t)=\int_a^b k(s,t)g(s)ds,$$

也即

$$[K^*(g)](s)=\int_a^b k(t,s)g(t)dt, \quad \forall g=g(t)\in L^p[a,b].$$

验毕.

习　　题

1．不严格地说明(承认以下命题：对赋范线性空间 E 而言，$\forall x_1\in E$，$\exists f_1\in E^*$，使得 $\|f_1\|=1$，而 $f(x_1)=\|x_1\|$)，在赋范线性空间等价的意义下必有 $E\subset E^{**}$（即 E 与 E^{**} 内的一个子空间等价）.

2．不严格地说明（承认以下命题：E 自反 $\Leftrightarrow E^*$ 自反)，当 E 与 E_1 均为自反空间时，有 $T^{**}=T$.

3．试证明：如果共轭算子 T^* 有界，则 T 也必有界，且有 $\|T\|=\|T^*\|$.

4．试验证本节定理 2 中关于共轭算子的四条性质.

5．设 $T_n, T_0\in B(E\to E_1)$ $(n=1,2,\cdots)$，试证明：当 $\|T_n-T_0\|\to 0$ 时，必有 $\|T_n^*-T_0^*\|\to 0$ $(n\to\infty)$.

6．设 E 为赋范线性空间，试证明：对于 E 上的线性算子来说，为了 T

把E变为“有限维”赋范线性空间，必须且只须T是“有限秩”的算子.

7. 设在$L^2(-\infty,\infty)$内定义一个到其内的算子T（量子力学中的“坐标算子”），

$$\mathrm{T}[\mathrm{T}(x)](t)=t\cdot x(t),\quad \forall x=x(t)\in\mathscr{D}(\mathrm{T}),$$

其中，$\mathscr{D}(\mathrm{T})=\{x(t)\,|\,x(t),\ t\cdot x(t)\in L^2(-\infty,\infty)\}$. 试求：$[\mathrm{T}^*(g)](t)$对于$g(t)\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$的表达式及定义域$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$，并说明$\mathrm{T}^*=\mathrm{T}$(自共轭算子).

8*. 在$L^2[0,1]$内定义一个到其内的算子T（量子力学中的“动量算子”），

$$[\mathrm{T}(x)](t)=\frac{1}{i}x'(t),\qquad \forall x=x(t)\in\mathscr{D}(\mathrm{T}).$$

其中，$\mathscr{D}(\mathrm{T})=\{x(t)\,|\,x(t),\ x'(t)\in L^2[0,1]\}$，试求：$[\mathrm{T}^*(g)](t)$对于$g(t)\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$的表达式及定义域$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$（由此可知，数理方程里有时所说的“自共轭”只是形式的. 而此处，虽然形式上T^*与T的“变换式”相同，然而$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$与$\mathscr{D}(\mathrm{T})$是不同的).

第三章　有界线性泛函的存在定理

§ 3.1. 线性泛函的(控制)延拓定理

在函数论中，我们曾经考虑过把一些函数从原来的定义域中扩充出去的问题．例如，定义在度量空间内某一闭集的连续函数可以保持其上、下界延拓成整个空间的连续函数；又如解析函数的解析开拓等等．同样在测度论中有测度的扩张，在代数上有域的扩张等等．

此外，在上一章中，对于任意赋范线性空间 E，我们曾经引入其上定义的有界线性泛函全体构成的共轭空间 E^* 的概念．虽然对于某些具体的空间找了其共轭空间，但是对于任意的赋范线性空间 E，我们并不知道除了零泛函之外，它是否还有其它非零的有界线性泛函存在．

为了使得对于任意的线性空间 E，其上存在非零的有界线性泛函，其简化的方法自然使我们想到了前面所说的“延拓”的方法，即如果能在 E 内某一子空间上定义一个有界线性泛函，而且还能够使其延拓为整个 E 上的有界线性泛函，那么问题就解决了．

(一)

本段下面的两个定理，就是来解决延拓的可能性的问题的．为此，我们首先引出一个与 Zermelo 公理等价的 Zorn 引理，它在定理的证明中是需要的．我们先给出下面关于“序”的一些定义：

定义 1.　集 G 称为有序集，是指对其中某些元之间定义了一个序关系 $\prec$，关系 $\prec$ 满足下面三个条件：

(i)　如果 $x\prec y$ 且 $y\prec z$，那么 $x\prec z$ (传递性)；

(ii)　如果 $x\in G$，那么 $x\prec x$ (自反性)；

(iii) 如果 $x \prec y$ 且 $y \prec x$，那么 $x = y$（反对称性）.

定义 2. 集 G 称为是全序集，是指它是一个有序集，并且对于 G 中任意两个元 x, y，关系 $x \prec y$ 和 $y \prec x$ 至少有一个成立.

定义 3. 设 G 为一有序集，集 $B \subset G$，元 $y \in G$ 称为集 B 的上界，是指 $\forall x \in B$，均有 $x \prec y$ 成立；G 中元 x_0 称为是极大元，是指 G 中无"$\succ x_0$"之元存在.

由于上面的定义，我们就可以引入下面的公理：

引理 1（Zorn 引理）. 如果集 G 是非空的有序集，且其内每个全序子集都有上界，那么 G 至少有一个极大元.

有了上面的引理 1，我们将给出一般（不限于赋范的）线性空间上分配泛函在某种特定泛函"控制下"的延拓定理. 首先，我们选择"控制泛函"为"次加正齐性"泛函，其定义如下：

定义 4. 线性空间 E 上的泛函 $p(x)$ 称为次可加的，是指

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E;$$

线性空间 E 上的泛函，$p(x)$ 称为正齐性的，是指 $\forall \alpha \geqslant 0$，均有

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

注 1. 这里所给出的"次加正齐性"泛函，对于我们来说并不是陌生的. 实际上，在赋范线性空间中，元的范数 $\|x\|$ 就是这种泛函. 一般说来，它未必是"加法"的或"齐性"的.

下面，我们给出在泛函分析中起着重大作用的著名定理：

定理 1（Hahn-Banach 定理）. 假设

1° E 是"实"线性空间，$E_0 \subset E$ 是"实"线性子空间；

2° $p(x)$ 是 E 上的次加法正齐性泛函，$f_0(x)$ 是定义在子空间 E_0 上的（实）线性泛函，并且满足

$$f_0(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in E_0,$$

那么，必定存在定义在整个空间 E 上的（实）线性泛函 $f(x)$，其满足

(i) $f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in E_0$;

(ii) $f(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in E$.

（并且，称 $f(x)$ 为 $f_0(x)$ 在全空间 E 上的"延拓".）

证. 下面我们分三步证明：

1）设任意一元 $x_1 \in E \setminus E_0$，下面，我们把泛函 f_0 从 E_0 保持泛函 $p(x)$ 控制地延拓到实线性子空间 E_1 上去，其中 E_1 定义为

$$E_1 = \{y + \alpha x_1 | y \in E_0, \alpha \in (-\infty, \infty)\}.$$

我们考察 E_0 中的任意两元 y', y''，从定理假设条件 2° 可知

$$f_0(y') - f_0(y'') = f_0(y' - y'') \leqslant p(y' - y'')$$
$$\leqslant p(y' + x_1) + p(-y'' - x_1),$$

由此有

$$-p(-y'' - x_1) - f_0(y'') \leqslant p(y' + x_1) - f_0(y'),$$

从而得出

$$-\infty < m = \sup_{y \in E_0} \{-p(-y - x_1) - f_0(y)\}$$
$$\leqslant p(y' + x_1) - f_0(y'), \quad \forall y' \in E_0;$$

因此导出

$$-\infty < m \leqslant \inf_{y \in E_0} \{p(y + x_1) - f_0(y)\} = M < \infty.$$

对于上面的有限常数 m, M，我们任取一数 ξ_1，使得 $m \leqslant \xi_1 \leqslant M$. 并且，我们在子空间 E_1 上定义泛函 f_1，

$$f_1(y + \alpha x_1) = f_0(y) + \alpha \xi_1, \forall y \in E_0、\alpha \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

于是，由于空间 E_1 中的每个元是一意表为 $y + \alpha x_1$ 形式的，因此，式(1)一意确定了 E_1 上的一个线性泛函. 此外，又由当在 E_0 时(即 E_1 中 $\alpha = 0$ 所成子空间)，由定义，显然有 $f_1(y) = f_0(y)$，$\forall y \in E_0$，因此，可以看出泛函 f_1 是 f_0 在 E_1 上的延拓. 所以，余下来的只要证明仍有关系式

$$f_1(y + \alpha x_1) \leqslant p(y + \alpha x_1), \quad \forall y \in E_0, \alpha \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$

成立就可以了. 当 $\alpha = 0$ 时，由式(1)及假设条件 2° 显然已经得到上式(2). 因此，下面我们假设 $\alpha \neq 0$，并分两种情况来讨论:

i. 如果 $\alpha > 0$，注意到 ξ_1 的取法，故知 $\forall y \in E_0$，有

$$\xi_1 \leqslant M \leqslant p\left(\frac{y}{\alpha} + x_1\right) - f_0\left(\frac{y}{\alpha}\right), \ \alpha \in (0, \infty).$$

从而有

$$\alpha f_0\left(\frac{y}{\alpha}\right) + \alpha \xi_1 \leqslant \alpha p\left(\frac{y}{\alpha} + x_1\right).$$

再注意到 f_0 的分配性以及泛函 p 的正齐性假设，便得到

$$f_0(y)+\alpha\xi_1\leqslant p(y+\alpha x_1),$$

最后，由(1)及上述过程得

$$f_1(y+\alpha x_1)\leqslant p(y+\alpha x_1),\quad \forall y\in E_0,\alpha\in(0,\infty).$$

ii. 如果 $\alpha<0$，那么，类似地，$\forall y\in E_0$ 有

$$-p\left(-\frac{y}{\alpha}-x_1\right)-f_0\left(\frac{y}{\alpha}\right)\leqslant m\leqslant\xi_1,$$

从而有

$$-\alpha p\left(-\frac{y}{\alpha}-x_1\right)\geqslant\alpha\xi_1+\alpha f_0\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

由于 $-\alpha>0$，上式得

$$p(y+\alpha x_1)\geqslant f_0(y)+\alpha\xi_1.$$

也即证得

$$f_1(y+\alpha x_1)\leqslant p(y+\alpha x_1),\ \forall y\in E_0,\ \alpha\in(-\infty,0),$$

综合上述，i，ii，便证得泛函 f_1 即 f_0 在 E_1 空间上的保持“控制”下的延拓.

2) 设 $\mathscr{F}_p$ 表示 f_0 的一切满足条件

$$f(x)\leqslant p(x),\qquad \forall x\in\mathscr{D}(f)$$

的延拓线性泛函的全体，即有

$$E_0\subset\mathscr{D}(f);\ f(x)=f_0(x),\qquad \forall x\in E_0.$$

对于 $\mathscr{F}_p$，定义序关系 $\prec$ 如下：$\forall f',f''\in\mathscr{F}_p$，我们称“$f'\prec f''$”，是指

$$\mathscr{D}(f')\subset\mathscr{D}(f'');\ f''(x)=f'(x),\qquad \forall x\in\mathscr{D}(f').$$

于是，$\mathscr{F}_p$ 就构成了一个有序集. 此外，对于 $\mathscr{F}_p$ 中的任一全序子集 M，令

$$\mathscr{D}=\bigcup_{f\in M}\mathscr{D}(f),$$

$$g(x)=f(x),\qquad \forall x\in\mathscr{D}(f),f\in M.$$

由于 M 是全序的，因而可知 $g(x)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是一意确定的，并且它是以 $\mathscr{D}$ 为定义域的分配泛函. 当然仍有 $g(x)\leqslant p(x)$，$\forall x\in\mathscr{D}$，从而导出

$$g = \sup\{f | f \in M\} \in \mathscr{F}_p.$$

此也即知，$\mathscr{F}_p$ 中的任一全序集M必有上界．所以由引理 1 可知 $\mathscr{F}_p$ 必存在一极大元，不妨记为 f.

3）极大元 f 即为 f_0 在 E 上的延拓．为了验证这一结论，由 f 的求法可知仅需证明 $\mathscr{D}(f) = E$ 就可以了．事实上，如此结论不成立，即有 $\mathscr{D}(f) \subsetneqq E$，那么，由上面证明中的 1）可知，此时必有泛函 f 的一个保持"控制"的线性延拓泛函f^*，使得 $f^* \in \mathscr{F}_p$，以及

$$\mathscr{D}(f) \subsetneqq \mathscr{D}(f^*); \ f^*(x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathscr{D}(f).$$

显然，这与 f 是集 $\mathscr{F}_p$ 中的极大元假设矛盾．证毕.

注 2. 以上定理证明中的 1）是关键．初看起来，其证明思路有些难理解，然而，如果我们注意式(1)（泛函 f_0 的"形式扩张"），然后倒推出数 ξ_1 所需满足的条件，其证明技巧就不难掌握了.

为了将定理 1 推广到"凸泛函"控制下的情况，我们下面给出凸泛函的定义.

定义 5. 线性空间 E 上的泛函 $c(x)$ 称为凸泛函，是指 $\forall x, y \in E$，均有

$$c(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda c(x) + (1-\lambda)c(y), \forall \lambda \in [0, 1],$$

注 3. 前面定义的次加正齐性泛函显然是凸泛函，但反之未必．其反例见实轴上定义的函数 $y = x^2$ 即可.

完全与上面定理 1 的证明方法类似，当注意到凸泛函的定义时，我们不难导出下面的推广命题:

定理 1′（Weston） 在上面的定理 1 中，当把那里的"控制泛函" $p(x)$换为凸泛函 $c(x)$ 时，其相应结论仍是正确的.

证． 与证明定理 1 的方法类似，我们只要能证明对于任一元 $x_1 \in E \backslash E_0$，将 E_0 上定义的实线性泛函 f_0 保持凸泛函控制地线性延拓到实线性子空间

$$E_1 = \{y + \alpha x_1 | y \in E_0, \alpha \in (-\infty, \infty)\}$$

上去，就可以了.

由本节定理 1 假设条件 2° 可知，$\forall \alpha, \beta \geqslant 0, \forall y', \ y'' \in E_0$，我们有（注意到凸泛函 $c(x)$ 的性质），

$$f_0\left(\frac{y'-y''}{\alpha+\beta}\right)\leqslant c\left(\frac{y'-y''}{\alpha+\beta}\right)$$
$$=c\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{y'+x_1}{\alpha}\right)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{-y''-x_1}{\beta}\right)\right]$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{\alpha+\beta}c\left(\frac{y'+x_1}{\alpha}\right)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}c\left(\frac{-y''-x_1}{\beta}\right),$$

注意到 f_0 的分配性，可推得

$$f_0(y')-f_0(y'')\leqslant\alpha c\left(\frac{y'+x_1}{\alpha}\right)+\beta c\left(\frac{-y''-x_1}{\beta}\right),$$

也即导出

$$-\beta c\left(\frac{-y''-x_1}{\beta}\right)-f_0(y'')\leqslant\alpha c\left(\frac{y'+x_1}{\alpha}\right)-f_0(y').$$

而当注意到数 α,β; E_0 中元 y',y'' 的任意性时，我们知，必存在一数 ξ_1，使得

$$\sup_{\substack{\lambda>0\\ y\in E_0}}\left[-\lambda c\left(\frac{y+x_1}{-\lambda}\right)-f_0(y)\right]\leqslant\xi_1$$
$$\leqslant\inf_{\substack{\lambda>0\\ y\in E_0}}\left[\lambda c\left(\frac{y+x_1}{\lambda}\right)-f_0(y)\right].\tag{3}$$

这样一来，我们在 E_1 上定义泛函 f_1，

$$f_1(y+\alpha x_1)=f_0(y)+\alpha\xi_1,\ \forall y\in E_0,\ \alpha\in(-\infty,\infty).$$

下面证明 f_1 即为 f_0 保持泛函 $c(x)$ 控制下在 E_1 上的线性延拓.

事实上，首先从定义可以看出

$$f_1(x)=f_0(x),\ \forall x\in E_0.$$

并且 f_1 在 E_1 上是线性泛函. 其次，对于 E_1 中任一元 $x=y+\alpha x_1$，当 $\alpha>0$ 时，由式(3)的右端，我们有$\left(注意\ \frac{1}{\alpha}>0,\ \frac{y}{\alpha}\in E_0\right)$

$$\xi_1\leqslant\frac{1}{\alpha}c\left(\frac{\frac{y}{\alpha}+x_1}{\frac{1}{\alpha}}\right)-f_0\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

由此推得

$$\xi_1 + f_0\left(\frac{y}{\alpha}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha} c(y + \alpha x_1),$$

再注意到 f_0 的分配性，由上式可导出

$$f_1(y + \alpha x_1) = \alpha\xi_1 + f_0(y) \leqslant c(y + \alpha x_1).$$

类似地，当 $\alpha < 0$ 时，由式(3)的左端同样可导出上式．综合以上结果即知 f_1 为 f_0 保持凸泛函 $c(x)$ 控制下的在 E_1 上的线性延拓．证毕．

上面的定理我们感到不足的是它仅只在"实的"线性空间中(在一定的条件下)保证分配泛函的可延拓性．当然我们希望把它推广到一般"复的"线性空间中去．把上面的定理形式地搬来是不行的，因为在复线性空间中，上面的条件和结论中相应的不等式就没有意义了(一般的复数是不能比较大小的)．因此，我们必须作某些修改．首先把"控制泛函"作某些修改，我们给出下面的定义．

定义 6. 线性空间 E 上的次加法泛函 $p(x)$ 称为对称(或绝对齐性)的，是指

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \ \forall x \in E, \ \alpha \in \boldsymbol{K}.$$

注 4. 设 $p(x)$ 为 E 上的对称次加法泛函，那么，在 E 上必恒有 $p(x) \geqslant 0$．

事实上，$\forall x \in E$，由泛函 $p(x)$ 的假设，我们有

$$p(x) = p(2x - x) \leqslant p(2x) + p(-x) = 2p(x) + p(x) = 3p(x), \qquad \forall x \in E.$$

从而导出 $2p(x) \geqslant 0$，即 $p(x) \geqslant 0$，$\forall x \in E$．

注 5. 显然易见，范数 $\|x\|(\forall x \in E)$ 是赋范线性空间 E 上的一个对称次加法泛函．此外，凡对称(次加)泛函一定也是正齐性(次加)泛函，但反之却未必成立．其反例可在通常实数空间 $\boldsymbol{R}$ 上，取函数 $p(x) = |x| + x$，$\forall x \in \boldsymbol{R}$．那么，$p(x)$ 显然是正齐次次加函数，但却不是对称次加函数．

有了上面的定义，借助于上面实空间上泛函的延拓定理，我们就可以引出在一般"复"线性空间中的分配泛函的延拓定理．

定理 2 (Bohnenblust-Sobczyk 定理)． 假设

1°. E 是"复"线性空间，E_0 是 E 内一"复"线性子空间；

2°. $p(x)$ 是 E 上的"对称、次加"泛函，$f_0(x)$ 是定义在 E_0 上的线性泛函，并且满足条件

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in E_0.$$

那么，必存在一个定义在全空间 E 上的线性泛函 $f(x)$，其满足

(i) $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in E_0$;

(ii) $|f(x)| \leqslant p(x)$, $\forall x \in E$.

证. 对 $f_0(x)$ 的"实部" $\mathrm{Re}f_0(x)$（或"虚部" $\mathrm{Im}f_0(x)$）用上面定理 1 的结果线性延拓，这就是证明本定理的思路. 这里，与 §1.1 讲述赋范线性空间具有"内积"的充要条件时的证明类似，我们要熟悉一个复数的实部与虚部的关系.

首先，我们令

$$f_0(x) = R_0(x) + iI_0(x), \qquad \forall x \in E_0,$$

这里，对任意 $x \in E_0$, $R_0(x) = \mathrm{Re}f_0(x)$, $I_0(x) = \mathrm{Im}f_0(x)$. 从而由 $f_0(x)$ 的"复齐性"，可知 $I_0(x) = -R_0(ix)$. 由 E_0 是复线性子空间，故根据泛函 $R_0(x)$, $I_0(x)$ 的定义不难由 $f_0(x)$ 在 E_0 上的分配性推出它们也均为 E_0 上的"实"线性泛函，当然，E_0, E 也是"实"的线性空间. 此外从假设条件还可推出

$$R_0(x) \leqslant |R_0(x)| = |\mathrm{Re}f_0(x)| \leqslant |f_0(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in E_0,$$

这样，由上面的定理 1，我们可知，泛函 $R_0(x)$ 可以保持 $p(x)$ "控制"地延拓为整个空间 E 上的"实"线性泛函 $R(x)$. 令

$$f(x) = R(x) - iR(ix), \quad \forall x \in E.$$

下面证明此 $f(x)$ 即为定理所求之泛函. 我们分三步来验证：

1) $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in E_0$. 事实上，由 $f(x)$ 的构造可知，$\forall x \in E_0$, 有

$$f(x) = R(x) - iR(ix) = R_0(x) - iR_0(ix).$$

这里，由于 E_0 为"复"线性子空间的假设，故由 $x \in E_0$ 可知 $ix \in E_0$. 另外，注意到 $f_0(x)$ 的实部 $R_0(x)$ 与虚部 $I_0(x)$ 的关系，即得到

$$f(x) = R_0(x) + iI_0(x) = f_0(x), \quad \forall x \in E_0,$$

2) $f(x)$ 是 E 上的(复)线性泛函. 其实，由 $f(x)$ 的定义以及

$R(x)$ 的实分配性，我们显然可知 $f(x)$ 是实齐性的可加泛函．下面证明它的复齐性．为此，我们只要对数 i 的乘法验证其是齐性的就行了．然而，由 $f(x)$ 的定义以及关系式

$$\begin{aligned} f(ix) &= R(ix) - iR(i(ix)) = R(ix) - iR(-x) \\ &= R(ix) + iR(x) = i[R(x) - iR(ix)] \\ &= if(x), \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

可知这是明显的．

3) $|f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in E$．注意到，$\forall x \in E$，如果 $f(x) = 0$，那么，由注 4 可知上式已成立；今设 $f(x) \neq 0$，$\phi = \arg f(x)$（复数 $f(x)$ 的"主幅角"），那么，注意到 $f(x)$ 的复齐性，可导出

$$\begin{aligned} |f(x)| &= e^{-i\phi} \cdot f(x) = f(e^{-i\phi}x) \\ &= R(e^{-i\phi}x) + i \cdot 0 \\ &= R(e^{-i\phi}x), \end{aligned}$$

再注意到 $R(x)$ 是 $R_0(x)$ 保持 $p(x)$ 控制的延拓，因此，从上式则可导出 $|f(x)| = R(e^{-i\phi}x) \leqslant p(e^{-i\phi}x) = |e^{-i\phi}| p(x) = p(x)$．证毕．

由上面的定理，我们不难导出下面关于有界线性泛函的"保范延拓"的命题：

推理． 设 E 为复(实)赋范线性空间，E_0 为其一复（实）线性子空间，f_0 为 E_0 上定义的有界线性泛函．那么，在 E 上必存在一有界线性泛函 f，使得

$$f(x) = f_0(x), \qquad \forall x \in E_0; \ \|f\| = \|f_0\|_{E_0}.$$

（这里，$\|f_0\|_{E_0}$ 为泛函 f_0 在 E_0 上的范数．）

证．只要在上面定理 1、2 中，令控制泛函 $p(x) = \|f_0\|_{E_0} \cdot \|x\|$，$\forall x \in E$，就可直接导出本推理的结论．证毕．

注 6． 在定理 2 关于复线性空间上线性泛函的延拓定理中，E_0 必须是"复"的线性子空间，至于实线性子空间，命题则未必仍成立，并且，Bohnenblust 和 Sobczyk 已经指出："在任何无穷维的复 (B)-空间中，总存在其内一实线性子空间，使在其上有一有界复线性泛函不能保范延拓到全空间中去"（参看文献[31]）．

注 7． 从定理 1 的证明中的几次"任取"（例如，任取数 ξ_1、在

$\mathscr{F}_p$ 中任取极大元 f 等等）可知，上述分配泛函的延拓未必是唯一的．下面我们举出一简单例子：

例． 在二维复欧氏空间 $\boldsymbol{C}^2$ 中，与 §1.1 节的例子一样引入范数

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|, \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{C}^2,$$

那么，在此赋范线性空间 $\boldsymbol{C}^2_{(1)}$ 的一个一维线性子空间 $E_0 = \{(\xi_1,\ 0) | \xi_1 \in \boldsymbol{C}\}$ 上定义泛函 f_0,

$$f_0((\xi_1, 0)) = \xi_1, \qquad \forall x = (\xi_1, 0) \in E_0.$$

于是易验 $f_0 \in E_0^*$, $\|f_0\| = 1$，并且，对于 $\boldsymbol{C}^2_{(1)}$ 上的如下形式的泛函

$$f_\alpha((\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 + \alpha\xi_2 \qquad (\forall \alpha \in \boldsymbol{C}),$$

显然均为 f_0 在全空间上的“分配延拓”泛函．此外，再从前面 §2.3 习题 1 可知

$$\|f_\alpha\| = \sup_{|\xi_1| + |\xi_2| = 1} |\xi_1 + \alpha\xi_2| = \max(1, |\alpha|) \ (\forall \alpha \in \boldsymbol{C}).$$

于是，我们可看出，上面对于 $|\alpha| \leqslant 1$ 时的泛函 f_α，它们均为 E_0 上定义的泛函 f_0 在全空间上的“保范延拓”线性有界泛函．所以，控制线性延拓未必是唯一的．

注 8. 对于有界线性算子而言，相应的保范线性延拓定理一般是不成立的．而在 1939 年，角谷静夫得到了下面的结果：“设 T_0 为从 (B)-空间 E 的任意闭线性子空间 E_0 到 (B)-空间 E_1 内的任一有界线性算子，那么，为了 T_0 可保范延拓为由整个 E 空间到 E_1 内的有界线性算子，必须且只须 E 是内积空间”（参阅文献[83]）．

（二）

上面定理的应用是非常广泛的．这里，我们利用上面的定理导出(在第二章已经用到过的)关于赋(拟)范线性空间上必有足够多的有界线性泛函存在的命题．

定理 3. 设 $\|x\|$ 为赋（拟）范线性空间 E 上的（拟）范数．那么，$\forall x_0 \in E$, $\|x_0\| \neq 0$, $\exists f_1 \in E^*$，使得

$$f_1(x_0) = \|x_0\|, \quad \|f_1\| = 1.$$

证． 由于所需的泛函要满足条件 $f_1(x_0)=\|x_0\|$，因此我们自然想到，在 E 的线性子空间

$$E_0=\{\alpha x_0\,|\,\alpha\in \boldsymbol{K}\}$$

上定义的泛函 f_0，如果其延拓成为所需的泛函 f，则必须定义为

$$f_0(\alpha x_0)=\alpha f_0(x_0)=\alpha\|x_0\|,\qquad \forall\alpha\in \boldsymbol{K}.$$

于是，当我们定义 E 上的泛函 $p(x)=\|x\|$，$\forall x\in E$ 时，容易看出有

$$|f_0(x)|=\|x\|\leqslant p(x),\qquad \forall x\in E_0.$$

这样一来，注意到 $p(x)$ 的性质，我们就可由上面定理 1 和定理 2 把 f_0 控制延拓为全空间 E 上的线性泛函 f_1，即

$$f_1(x)=f_0(x),\quad \forall x\in E_0$$

及

$$\begin{cases} f_1(x)\leqslant\|x\|, & (E\text{ 为“实”线性空间时});\\ |f_1(x)|\leqslant\|x\|, & (E\text{ 为“复”线性空间时}); \end{cases}\quad \forall x\in E.$$

然而，当 E 为实空间时，还可以导得

$$-f_1(x)=f_1(-x)\leqslant\|-x\|=\|x\|,\qquad \forall x\in E.$$

因而，无论 E 为实、复空间均有

$$|f_1(x)|\leqslant\|x\|,\qquad \forall x\in E.$$

但由延拓性还有

$$f_1(x_0)=f_0(x_0)=\|x_0\|\neq 0.$$

最后，综合以上最后两关系式便可得到 $\|f_1\|=1$. 证毕.

注 9. 我们必须注意的是，如果 E 不是赋范线性空间，则其非零的连续线性泛函未必存在．例如，在 § 2.3 习题(2)中，我们已经知道空间 (s) 上的连续线性泛函是存在的，它们由有限项非零的数列的全体所组成．然而也有非零连续线性泛函不存在的反例.

反例． 在 $[a,b]$ 上所有“概”有穷的可测函数全体(“概相等”视为同一元)，在按通常加法、数乘运算所成的线性空间中引入“准范”数

$$\|x\|=\int_a^b\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\,dt,$$

则其构成一个 Fréchet 空间 (可以证明 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$ 等价于

$x_n(t)$ 当 $n\to\infty$ 时，'依测度"收敛于 $x_0(t)$)，记为 $S[a,b]$，那么，$S[a,b]$ 上的非零连续线性泛函是不存在的.

验. 反之，若 $S[a,b]$上有一非零连续线性泛函 f_0，那么，注意到函数论中的"平均收敛"蕴涵着"测度收敛"，因而 f_0 也是 $S[a,b]$ 内子空间 $L^1[a,b]$ 上的连续线性泛函，且由 $L^1[a,b]$ 按"测度收敛"也是稠于 $S[a,b]$ 的，从而知 f_0 亦为 $L^1[a,b]$ 上的非零泛函. 从而由 § 2.3 节 $(L^1[a,b])^*=M[a,b]$ 的结论可知，必有一函数 $\theta\neq f_0(t)\in M[a,b]$，使得

$$f_0(x)=\int_a^b x(t)f_0(t)dt,\quad \forall x=x(t)\in L^1[a,b].$$

我们取一正数 ε_0 使得集 $A_{\varepsilon_0}=\{t\,|\,|f_0(t)|\geqslant\varepsilon_0,\ t\in[a,b]\}$，有 $\mu(A_{\varepsilon_0})>0$，并且用 $c_n(t)$ 表示 A_{ε_0} 内一测度在 $\dfrac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n}$ 与 $\dfrac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n-1}$ 之间的子集的特征函数，这样，当令

$$x_n(t)=n\cdot\frac{\overline{f_0(t)}}{|f_0(t)|}\cdot c_n(t)\quad(n=1,2,\cdots)$$

时，由 $\forall\sigma>0$，有

$$\begin{aligned}\mu(t\,|\,|x_n(t)|\geqslant\sigma,\ t\in[a,b])&=\mu(t\,|\,|nc_n(t)|\geqslant\sigma,\ t\in[a,b])\\&\leqslant\frac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n-1}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

即 $x_n(t)$当 $n\to\infty$ 时"测度收敛"于 0，也即 $\|x_n(t)\|\to 0\,(n\to\infty)$. 但另一方面，却有

$$\begin{aligned}f_0(x_n)&=\int_a^b x_n(t)f_0(t)dt=\int_a^b n|f_0(t)|c_n(t)dt\\&\geqslant n\varepsilon_0\cdot\frac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n}=\varepsilon_0\cdot\mu(A_{\varepsilon_0})>0,\end{aligned}$$

从而 $f_0(x_n)\not\to f(\theta)=0\ (n\to\infty)$，此显然与 f_0 的连续性假设矛盾. 验毕.

(注意：由以上反例还可以得出，对于一个赋"准范"的线性空间而言，连续线性泛函的延拓定理已经失效了)，类似的反例还可在空间 $L^p(0<p<1)$ 上找到(参阅文献[40]).

由上面定理 3 我们不难得到下面的推理:

推理. 设 E 为赋范线性空间, $x, y \in E$, 那么, 为了元 $x=y$, 必须且只须 $\forall f \in E^*$, 均有 $f(x)=f(y)$.

证. 命题的必要性是显然的, 充分性可用归谬法导出. 事实上, 如果 $x \neq y$, 则取元 $x_0=x-y \neq \theta$, 由范数定义我们有 $\|x_0\| \neq 0$, 故从定理 3 则知 $\exists f_1 \in E^*$, 使得 $f_1(x_0)=\|x_0\| \neq 0$, 也即 $f_1(x)-f_1(y)=f_1(x-y) \neq 0$, 此显然与假设矛盾. 证毕.

注 10. 上面的定理 1—定理 3 及其推理, 常常统称为 "Hahn-Banach "定理". 它是泛函分析中最基本的定理之一, 在本书中我们要不断地用到它.

注 11. 由定理 3 的推理, 显然可以看出, 对于一个 "弱收敛" 的元列来说, 其弱收敛的极限必定是唯一确定的. 并且, 借助于它, 当我们要证明赋范线性空间中的两元 x, y 相等时, 只需验证, $f(x)=f(y)$, $\forall f \in E^*$ 就行了.

注 12. 满足定理 3 条件的泛函 f_1 (即 $\|f_1\|=1, f_1(x_0)=\|x_0\|$) 称为非零元 x_0 的**极大泛函**. 因为注意到 § 2.4 习题 1, 我们可知

$$\|x_0\|=\|\tilde{x}_0\|=\sup\{|f(x_0)| \mid \|f\| \leqslant 1, f \in E^*\} \leqslant f_1(x_0)$$

[其中, $\tilde{x}_0 \in E^{**}$, 是按 "自然映象" ($\tilde{x}_0(f)=f(x_0), \forall f \in E^*$) x_0 所对应于 E^{**} 空间中的元], 也即在 E^* 的单位球上定义的泛函 $|f(x_0)|$ 在 "点" f_1 达到了 "极大值".

为了理解定理 3 的几何意义, 我们先介绍一个定义.

定义 7. 实线性空间 E 内的超平面 $f(x)=c$ 称为凸集 V 的**承托超平面**, 是指该超平面在 V 的一侧, 且与 V 有公共点[也即有: 1) $f(x)-c$ 当 $x \in V$ 时具有相同的符号 ($\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$); 2) 存在一元 $x_0 \in V$, 使得 $f(x_0)=c$].

注 13. 对于实的赋 (拟) 范线性空间 E 内的任一元 x_0 ($\|x_0\| \neq 0$), 必可作 E 的 "原心球" $\bar{S}(\theta, \|x_0\|)=\{x \mid \|x\| \leqslant \|x_0\|, x \in E\}$ 的一个闭承托超平面 π: $f_1(x)=\|x_0\|$, 这就是定理 3 的几何意义 (参看图 3.1).

事实上, 对上述 x_0, 从定理 3 所得的泛函 $f_1 \in E^*$, 我们作超平

面 $\pi: f_1(x) = \|x_0\|$. 那么，首先由 f_1 的连续性可知上超平面是闭的. 其次，$\forall x \in \bar{S}(\theta, \|x_0\|)$，由 $\|f_1\| = 1$ 的性质，我们可以导出

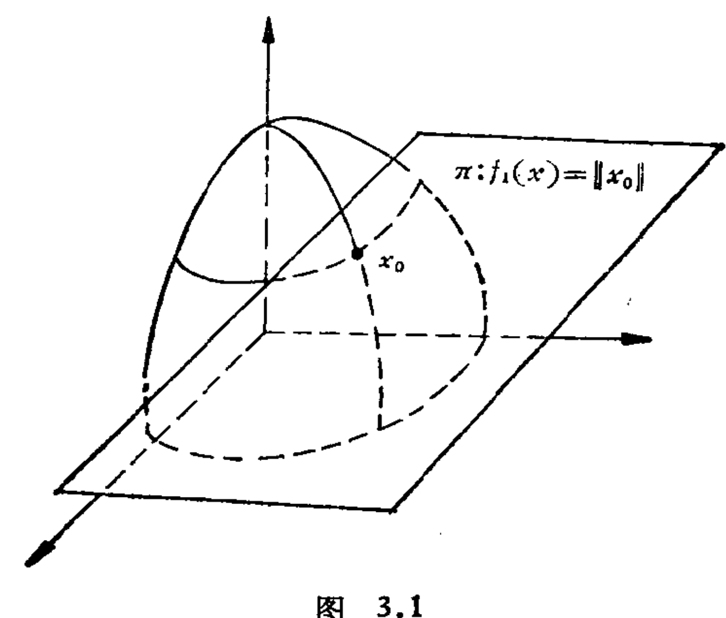


图 3.1

$$f_1(x) - \|x_0\| \leqslant \|x\| - \|x_0\| \leqslant 0.$$

即以上闭超平面在球 $\bar{S}(\theta, \|x_0\|)$ 的一侧. 最后，由 $f_1(x_0) = \|x_0\|$ 的性质，以及 $x_0 \in \bar{S}(\theta, \|x_0\|)$. 从而可知该闭超平面 π 与球 $\bar{S}(\theta, \|x_0\|)$ 有公共点. 综合上述结果,即得出注 13 的结论.

注 14. 不难看出,在定理 3 中,如果对于实空间的情形,换那里的 $\|x\|$ 为任意一个"非负的正齐性次加"泛函 $p(x)$，而对于复空间的情形,换为任意一个"对称次加"泛函 $p(x)$，那么,相应的定理也成立. 由此类似地可以得到下面的几何解释：对于实的赋(拟)范线性空间 E 内的任一元 x_0 ($\|x_0\| \neq 0$)，必可作 E 内任一凸集 $V = \{x \mid p(x) \leqslant p(x_0), \forall x \in E\}$ 的一个闭承托超平面 $f_1(x) = p(x_0)$，此结论的验证作为习题留给读者完成.

(三)

本节的最后,我们先举出一个 Hahn-Banach 定理应用的简单例子,即关于"广义极限"的概念. 为此,我们先给出"定向集"与"泛极限"的定义.

定义 8. 一个有序集 A 称为定向的,是指 $\forall \alpha, \beta \in A$，$\exists \gamma \in A$，

使得$\alpha \prec \gamma$，$\beta \prec \gamma$. 设$(x_\alpha | \alpha \in A)$是定义在定向集$A$上的实数集（简称实数定向列）. 我们称数$x_0$为$(x_\alpha)$，$(\alpha \in A)$的泛极限（或Moore-Smith极限），是指$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \alpha_0 \in A$，使得当$\alpha_0 \prec \alpha$时，有$|x_\alpha - x_0| < \varepsilon$，记为$\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = x_0$.

注 15. 显然，上面定向集是自然数集$\{n\}$的推广，实数定向列(x_α)，$(\alpha \in A)$是通常实数列$\{x_n\}$的推广.

例. 在求$[a,b]$上可积函数$f(t)$的Riemann积分时，对于$[a,b]$区间上的所有"分法"的全体组成一个"定向集". 而对应各分法的"积分和"则为实数定向列，其"泛极限"为此可积函数的(R)-积分$\int_a^b f(t)dt$.

下面，我们给出关于"广义极限"存在性的一个定理.

定理 4（Banach 定理）. 假设$\{(x_\alpha),\ (\alpha \in A)\}$是有界实数定向列的全体所组成的集合，那么，当它们之间加法与数乘运算定义为

$$x + y = (x_\alpha + y_\alpha),\ \lambda x = (\lambda x_\alpha);\ \forall x = (x_\alpha) \quad y = (y_\alpha),$$

$(\alpha \in A)$，$\lambda \in \boldsymbol{R}$时；它们构成一个实线性空间$E$. 并且必存在一个定义在$E$上的线性泛函

$$f(x) = \operatorname*{LIM}_{\alpha \in A} x_\alpha,\ \forall x = (x_\alpha) \in E,$$

使其满足

$$\underline{\lim_{\alpha \in A}}\, x_\alpha \leqslant \operatorname*{LIM}_{\alpha \in A} x_\alpha \leqslant \overline{\lim_{\alpha \in A}}\, x_\alpha,\quad \forall x = (x_\alpha) \in E,$$

其中，下极限$\underline{\lim\limits_{\alpha \in A}}\, x_\alpha = \sup\limits_{\alpha} \inf\limits_{\alpha \prec \beta} x_\beta$；上极限$\overline{\lim\limits_{\alpha \in A}}\, x_\alpha = \inf\limits_{\alpha} \sup\limits_{\alpha \prec \beta} x_\beta$. 显然，如果泛极限$\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$存在，则必有$\operatorname*{LIM}\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = \lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$.

证. 首先，上述空间E是一实线性空间是明显的. 其次，我们在E上定义泛函

$$p(x) = \overline{\lim_{\alpha \in A}}\, x_\alpha,\quad \forall x = (x_\alpha) \in E.$$

容易验证. $p(x)$是E上的"正齐性次加"泛函，并且，如果E的一

线性子空间 E_0

$$E_0 = \{\lambda x_0 | -\infty < \lambda < +\infty,\ x_0 = (\xi_0)\},$$

其中，ξ_0 为某一给定实数，即 $x_0 = (x_\alpha^0)$，而 $x_\alpha^0 \equiv \xi_0\ (\alpha \in A)$. 在其上定义一分配泛函 f_0，

$$f_0(x) = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha, \quad \forall x = (x_\alpha) \in E_0,$$

显然可以看出

$$f_0(x) \leqslant p(x), \ \forall x \in E_0.$$

从而由 Hahn-Banach 定理可知，必存在 E 上的一线性泛函 $f(x) = \underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x_\alpha$，使其满足

$$\underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x_\alpha \leqslant p(x) = \overline{\lim_{\alpha \in A}}\, x_\alpha, \ \forall x = (x_\alpha) \in E.$$

注意到上、下极限的关系，由上式可导出

$$-p(-x) = -\overline{\lim_{\alpha \in A}}\,(-x_\alpha) = \underline{\lim_{\alpha \in A}}\, x_\alpha, \ \forall x = (x_\alpha) \in E.$$

根据 $\underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x_\alpha$ 的分配性及上两式又可导出

$$\underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x_\alpha \geqslant -p(-x) = \underline{\lim_{\alpha \in A}}\, x_\alpha, \ \forall x = (x_\alpha) \in E.$$

证毕.

注 16. 由定理 4 显然可知，“$\underset{\alpha \in A}{\mathrm{LIM}}\, x_\alpha$”具有通常“极限”的一般运算法则(和、差、数乘)，且当泛极限 $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ 不存在时，它却仍是存在的. 基于这点，我们常把它称为**广义极限**或称 Banach 极限. 这种极限在证明 Haar 测度的存在性的时候是有用的（参阅文献[129]中 Banach 写的一个附录）.

附　　录

由本节所论述结果，我们得知，在赋范线性空间上均存在着连续线性泛函. 同时，我们必须指出，在无穷维赋范线性空间中，也存在着不连续的线性泛函. 下面给出一个有趣命题.

命题. 在任何无穷维的赋范线性空间 E 中，必存在不连续的线性泛函.

证. 首先，我们设集 $A \subset E$ 满足：A 中的任意“有限元”均是线性无关的

(显然 A 是存在的,且由非零元组成). 并设这样的集合的全体所组成的集类为 $\mathscr{F}=\{A\}$, 然后,我们以集间的"包含"关系建立"序"的关系. 我们不难看出,如 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}$ 为一全序集,即如果有

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots,$$

那么,集, $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 就是 $\{A_n\}$ 的一个"上界". 从而我们可知 $\mathscr{F}$ 是满足 Zorn 引理的,故必存在一个"极大元" B (常称为空间 E 的一组 "Hamel 基").

其次, 我们证明上面的集 B 的线性组合 $[B]$ 就是整个空间 E. 事实上, 反之,如果有 $x_0\in E$, 使其不能由 B 中的任意 "有限元" 的线性组合表出, 那么,由于集 $\hat{B}=\{x_0, B\}\in\mathscr{F}$, 且有 $B\prec\hat{B}$, 其与上面 B 为极大元的取法矛盾. 此即导出 $E=[B]$.

最后,注意到 E 是无穷维的假设,由 $E=[B]$ 可知集 B 也必是无穷维的, 因而,我们必可从中取出一列 (非零) 线性无关元 $\{y_k^0\}\subset B$. 这样,当我们在 E 上定义一泛函: $\forall x\in E$, 如果 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k y_k^0+\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i y_i$, 其中, $y_k^0, y_i\in B$ $(k=1,2,\cdots,n; i=1,2,\cdots,m)$, 我们令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot k\|y_k^0\|.$$

那么,根据集 B 的性质我们不难看出上面的 f 是 E 上确定的线性泛函, 然而由式

$$f(y_k^0)=k\|y_k^0\| \qquad (k=1,2\cdots),$$

又知泛函 f 必为无界的, 由此导出它在 E 上是一个不连续的线性泛函. 证毕.

习 题

1. 试证明: 定义在线性空间 E 的一个线性子空间 E_0 上的分配泛函 $f_0(x)$, 必可分配延拓于全空间 E.

2. 设 E 为一赋范线性空间, E_0 为 E 的任一闭线性子空间, T_0 为由 E_0 到 "任意" 赋范线性空间 E_1 内的任一有界线性算子. 试证明: 为了 T_0 均可 "保范延拓"于 E,必须且只须存在由 E 到 E_0 上的"投影算子"(即 $p^2=p, \|p\|=1$).

3. 如果已知 $E\subset E^{**}$ (§3.5 将严格证明它) 试证明: 为了 (B)-空间 E 是自反的,必须且只须 E^* 是自反的.

4. 设已知 $E\subset E^{**}$，试证明：如果 (B)-空间 E 不是自反的，则空间 E、E^{**}，…，$E^{(2n)*}$，…；同样地，E^*，E^{***}，$E^{(5)*}$，…，$E^{(2n-1)*}$，…均为在"典则映象"下不等价的空间. 而当 n,m 奇偶不同时，如果 $E^{(2n)*}$ 互不等价（$n=1,2,\cdots$），则 $E^{(n)*}$ 与 $E^{(m)*}$ 也均为互不等价的空间（这里，$E^{(n)*}$ 表示 E 取 n 次共轭后所成的空间）.

5. 设 E 为赋范线性空间，E_0 为其一线性子空间，并设元 $x_0\in E_0$，试证明：

(i) $\forall f\in E^*$，如果令 E_0 上的泛函 f_0 为

$$f_0(x)=f(x),\qquad \forall x\in E_0,$$

则必有 $f_0\in E_0^*$.

(ii) 如果又设 $\tilde{x}_0\in E_0^{**}$，且有

$$\tilde{x}_0(f_0)=f(x_0),\qquad \forall f\in E^*$$

(其中 f_0 定义同(i))，那么必有

$$\tilde{x}_0(g_0)=g_0(x_0),\quad \forall g_0\in E_0^*.$$

6. 设 x_0 为赋范线性空间 E 中的任一元，β_0 为一正数，试证明：$\exists f_1\in E^*$，使得

$$\|f_1\|=\beta_0,\ f_1(x_0)=\|f_1\|\|x_0\|.$$

7. 试证明：赋范线性空间中弱收敛元列的极限是唯一确定的.

8. 试证明本节注 14.

§ 3.2. 线性簇、凸集、次凸泛函与 Minkowski 泛函

这一节介绍线性簇、凸集与凸泛函的一些基本性质.

(一)

在 §2.3(一)段中，当论及赋范线性空间上有界线性泛函 f 范数 $\|f\|$ 的几何意义时，我们曾经指出：对于一个由非零分配泛函 f 所定义的超平面 $H_f=\{x\,|\,f(x)=c_0,\ x\in E\}$ 而言，总有

$$H_f=N_f+x_0,$$

其中，元 $x_0\in E$ 满足 $f(x_0)=c_0$；而 $N_f=\{x\,|\,f(x)=0,x\in E\}$ 是 E 的一个线性子空间. 并且当 $c_0\neq 0$ 时使得 $E=N_f+\{\alpha x_0\}$. 上述的超平面就是一种特殊的"线性簇(流形)"，它比空间 E 的维

数仅只少1.下面给出一般的线性簇的定义:

定义 1. 线性空间 E 中的集 M_0 称为线性簇(流形),是指

$$M_0 = E_0 + x_0 = \{y + x_0 | y \in E_0\},$$

其中,元 $x_0 \in E$, E_0 是 E 上的一线性子空间.

注 1. 从几何上看,线性簇 M_0 为 E 内某一线性子空间 E_0 按"向量" x_0 "平移"而得到的集合(参看图 3.2). 特别地,该线性子空间 E_0 本身也是 E 内的一个线性簇(当 $x_0 \in E_0$ 时).

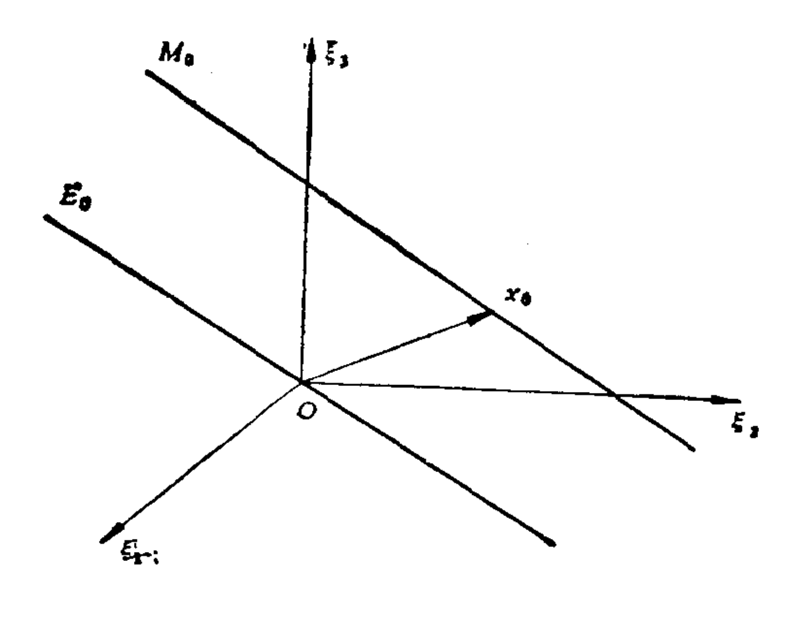


图 3.2

注 2. 由定义 1 不难看出,与 §2.3 (一)段的引理类似,也有下面的结果:如果 E_0 是赋范线性空间 E 的闭线性子空间,则 M_0 为闭线性簇;反之亦成立.

下面,我们给出一个关于超平面与线性簇相互间关系的一个定理.

定理 1. 为了集 H 是空间 E 的超平面,必须且只须 H 是 E 内的线性簇,并且对于任何一个以 H 为真子集的线性簇 M,必有 $M = E$.

证. 1)"$\Longrightarrow$" 由 H 是超平面的假设,首先,我们可知 H 为 E 内的一线性簇,其次,我们可知必有 E 上的一非零分配泛函 f_1 及数 c_0,使得

$$H = H_{f_1} = \{x \mid f_1(x) = c_0,\ x \in E\},$$

并且有 $H = N_{f_1} + x_0$（其中 $x_0 \in E$，使得 $f_1(x_0) = c_0$）. 于是，当设 M 为 E 内的一线性簇，并有 $H \subsetneqq M$ 时，那么，由线性簇的定义可知

$$M = E_0 + x_0', \tag{1}$$

其中，元 $x_0' \in E$，E_0 为 E 的一线性子空间. 下面证明 $E_0 = E$.

事实上，由于 $x_0 \in H \subset M = E_0 + x_0'$，因而有 $(x_0 - x_0') \in E_0$，当注意到 E_0 是线性集时，便可得到

$$x_0' - x_0 = -(x_0 - x_0') \in E_0.$$

因而有

$$(x_0' - x_0) + E_0 = \{x_0' - x_0 + y \mid y \in E_0\} = E_0,$$

也即有

$$M = x_0' + E_0 = \{x_0' + y \mid y \in E_0\} = \{x_0 + y \mid y \in E_0\} = x_0 + E_0,$$

于是，根据 $H \subsetneqq M$ 的假设，由上式知，

$$N_{f_1} + x_0 \subsetneqq E_0 + x_0.$$

由此导出 $N_{f_1} \subsetneqq E_0$. 最后，注意到上面所谈 N_{f_1} 与空间 E 的关系，我们可知 $\forall y_0 \in E_0 \backslash N_{f_1}$，必有 $E = N_{f_1} + \{\alpha y_0\}$.

综合性质 $N_{f_1} \subset E_0$ 及 $\{\alpha y_0\} \subset E_0$，并注意到 E_0 为线性集，由上式便可导出 $E_0 = E$. 回到式(1)，我们得到 $M = E$.

2）"$\Longleftarrow$" 首先，由 H 是 E 内一线性簇并且不是整个空间，故由定义应有

$$H = E_0 + x_0, \qquad x_0 \notin E_0,$$

其中，E_0 为 E 的一线性真子空间. 其次，设 $[H]$ 为由 H 所张成的线性子空间，由于 $[H]$ 显然亦为 E 内的线性簇，且有 $H \subsetneqq [H]$，因此由定理假设条件可知 $[H] = E$. 这样，$\forall x \in E$，(注意到 $x_0 \notin E_0$) 存在唯一确定的数 α，使得 $x = \alpha x_0 + y$（其中 $y \in E_0$）. 我们定义 E 上的泛函 f_1，

$$f_1(x) = f_1(\alpha x_0 + y) = \alpha, \qquad \forall x = \alpha x_0 + y \in [H] = E.$$

显然 f_1 是 E 上的线性泛函，并且有

$$H = \{x \mid f_1(x) = 1,\ x \in E\}$$

即 H 是空间 E 的超平面. 证毕.

（二）

在 §1.1 中，为了讲述赋范线性空间中元的范数的特性，我们曾经引出过线性空间中的“线段”和“凸集”的概念．那里曾经指出，$\forall x, y \in E$，集$\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$称为由 x，y 组成的“线段”，记为 $[x, y]$．类似地，当以上线段不含 x 元，不含 y 元或不含 x 与 y 元时，则分别记为“半开线段”：$(x, y]$，$[x, y)$ 或“开线段”(x, y)．这时，对于空间 E 中一个集合 V，如果 $\forall x, y \in V$，均有 $[x, y] \subset V$，我们则称 V 为“凸集”．

下面介绍凸集的一些简单性质．

定理 2. 设 E 为线性空间，那么，对于 E 内的凸集有以下性质成立：

(i) 如果 V_1，V_2 为凸集，则 $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$，$\alpha V_1 + \beta V_2 = \{\alpha x + \beta y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$ 亦为凸集；

(ii) 如果 $V_\iota (\iota \in I)$ 为凸集，则当 $\bigcap\limits_{\iota \in I} V_\iota \neq \phi$ 时，其也为凸集；

(iii) 对于任何子集 $M \subset E$，必存在一包含它的“最小凸集”（凸包络）记为 $\mathrm{cov} M$，并有

$$\mathrm{cov} M = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_k \;\middle|\; \lambda_k^{(n)} \geqslant 0, x_k \in M \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} = 1,\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

及

$$\mathrm{cov} M = \bigcap_{\iota \in I} V_\iota \quad (V_\iota (\iota \in E) \text{为包含} M \text{的所有凸集})；$$

(iv) 为了 V 是凸集，必须且只须有 $(\alpha + \beta) V = \alpha V + \beta V$ $(\forall \alpha, \beta \geqslant 0)$；此外，在实线性空间中为了 V 含原点 θ 且按 θ“对称[1]”，（即有 $\forall x \in V \Rightarrow -x \in V$），必须且只须 $-V = V$．

---

1) 在复线性空间中，我们称凸集 V 是（关于 θ 点）“对称”的，是指其满足 $\forall x \in V, \forall \lambda \in \boldsymbol{C}$ $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda x \in V$．

定理 3. 设 E 为赋范线性空间，那么，对于凸集 V 的任何一点 $x\in V$，及其任何一个内点 y°（记为 $y^\circ\in\mathring{V}$），半开线段 $(x, y^\circ]$ 必定均为 V 的内点，即有 $(x, y^\circ]\subset\mathring{V}$.

证． $\forall z^\circ\in(x, y^\circ]$，由定义可知，$\exists\lambda_0>0, 0\leqslant\lambda_0<1$，使得

$$z^\circ=\lambda_0 x+(1-\lambda_0)y^\circ,$$

由于假设 $y^\circ\in\mathring{V}$，故知 $\exists\delta>0$，使得 E 中以 y° 为中心，δ 为半径的开球 $S(y^\circ,\delta)\subset V$（参看图 3.3）．我们令 $\delta_0=(1-\lambda_0)\delta$，

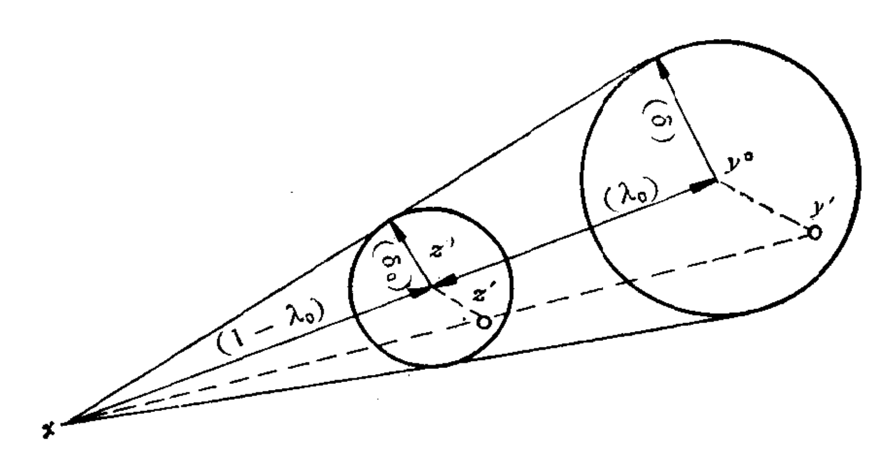


图 3.3

那么，$\forall z'\in E$，只要 $\|z'-z^\circ\|<\delta_0$，则当取元

$$y'=z'+\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}(z'-x) \tag{2}$$

时，由

$$\begin{aligned}\|y'-y^\circ\|&=\left\|\left(z'+\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}(z'-x)\right)-y^\circ\right\|\\&=\frac{1}{1-\lambda_0}\|(1-\lambda_0)z'+\lambda_0(z'-x)-(1-\lambda_0)y^\circ\|\\&=\frac{1}{1-\lambda_0}\|[(1-\lambda_0)z'+\lambda_0 z']-[\lambda_0 x+(1-\lambda_0)y^\circ]\|\\&=\frac{1}{1-\lambda_0}\|z'-z^\circ\|<\frac{\delta_0}{1-\lambda_0}=\delta,\end{aligned}$$

故知 $y'\in S(y^\circ,\delta)\subset V$．从而由前面 y' 的取法，可以将 z' 解出来，$(1-\lambda_0)y'=(1-\lambda_0)z'+\lambda_0(z'-x)$，即

$$z'=\lambda_0 x+(1-\lambda_0)y'.$$

并由定理假设 $x \in V$，及结果 $y' \in V$，注意到 V 是凸集，便导出 $z' \in V$，即球 $S(z^\circ, \delta_0) \subset V$，也即 $z^\circ \in \mathring{V}$. 证毕.

注 3. 上面定理的证明方法是根据几何直观的启发而得的. 由于这种"思路"当在第四章讲述"共鸣定理"时，也要用到它，所以提请读者特别注意.

由上面定理 3 我们不难直接导出下面的两个推理：

推理 1. 如果 V 为赋范线性空间中的一个有内点的凸集，那么，V 的"开核"（V 的内点所成的集）$\mathring{V}$ 也是凸集；并且 $\mathring{V}$ 的"闭包" $\overline{\mathring{V}} = \overline{V}$.

推理 2. 如果 G 为赋范线性空间中的一个开集，那么，G 的"凸包" $\mathrm{cov}G$ 亦为开集.

注 4. 推理 1 的后一个命题是非常有用的，它即指出对于一个有内点的凸集 V 而言，其内点的闭包即为 V 的闭包，从而可知，V 的"边界点"均为其内点的极限点.

定理 4. 设 V_1，V_2 为赋范线性空间具有内点的两个凸集，那么，当 $V_2 \cap \mathring{V}_1 = \phi$ 时，也必有 $V_1 \cap \mathring{V}_2 = \phi$（此即说明，两凸集中，如果有一个不含有另一个的内点时，则它们仅可能在"边界点"相交）.

证. 事实上，如果 $V_1 \cap \mathring{V}_2 \neq \phi$，那么，当设 $x_2^\circ \in V_1 \cap \mathring{V}_2$ 时，由于 x_2° 为 V_2 的内点，故知必有开球 $S(x_2^\circ, \delta_0) \subset V_2$（参看图 3.4）. 此外，又由 $x_2^\circ \in V_1$，且 $\mathring{V}_1 \neq \phi$，当取一元 $x_1^\circ \in \mathring{V}_1$ 时，由假

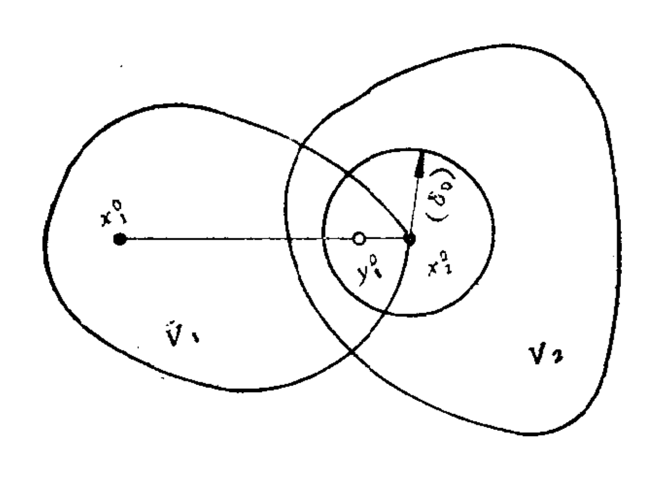


图 3.4

设 $V_2 \cap \mathring{V}_1 = \phi$，故知 $x_1^\circ \bar{\in} S(x_2^\circ, \delta_0)$，并且由**定理 3** 可知，半开线段 $(x_2^\circ, x_1^\circ] \subset \mathring{V}_1$，特别地，当取元（注意 $\|x_1^\circ - x_2^\circ\| \geqslant \delta_0$）

$$y_1^\circ = \left(1 - \frac{\delta_0}{2\|x_1^\circ - x_2^\circ\|}\right) x_2^\circ + \frac{\delta_0}{2\|x_1^\circ - x_2^\circ\|} x_1^\circ$$

时，可以导出 $y_1^\circ \in (x_2^\circ, x_1^\circ] \subset \mathring{V}_1$；另一方面，由

$$\|y_1^\circ - x_2^\circ\| = \left\| \frac{\delta_0}{2\|x_1^\circ - x_2^\circ\|} (x_1^\circ - x_2^\circ) \right\| = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0$$

又可导出 $y_1^\circ \in S(x_2^\circ, \delta_0) \subset V_2$. 从而 $y_1^\circ \in V_2 \cap \mathring{V}_1$，与定理原假设矛盾. 证毕.

定理 5. 如果 V_1, V_2 为赋范线性空间的两个凸集，并且 $\mathring{V}_2 \neq \phi$，$V_1 \cap \mathring{V}_2 = \phi$，那么，(凸)集 $V = V_2 - V_1$，且必有 $\mathring{V} \neq \phi$ 及 $\theta \bar{\in} \mathring{V}$.

证. 首先，由定理 2 可知，V 显然是一个凸集. 又由开集的性质可知，当元 $x_2^\circ \in \mathring{V}_2$ 时，$\forall x_1 \in V_1$，元 $x_2^\circ - x_1$ 也必为(凸)集 $V_2 - x_1$ 的内点（即邻域的"平移"，参看图 3.5）. 于是由 $\mathring{V}_2 \neq \phi$ 的假设，显然可知 $\mathring{V} \neq \phi$.

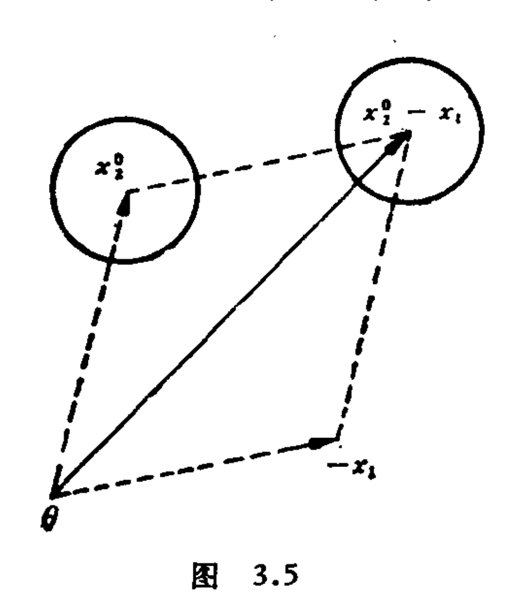


图 3.5

下面证明零元 $\theta \bar{\in} \mathring{V}$. 事实上，如果 $\theta \in \mathring{V}$，则知 $\exists \delta_0 > 0$，使得"原心球" $S(\theta, \delta_0) \subset V$. 此外，由 $\theta \in V = V_2 - V_1$，故我们又知必有一元 $\bar{x}$，使得 $\bar{x} \in V_1$，$\bar{x} \in V_2$. 这样，注意到假设 $\mathring{V}_2 \neq \phi$，由定理 3 的推理 1，则可导出，对于 V_2 的元 $\bar{x}$，必存在元 $y_2^\circ \in \mathring{V}_2$，使得 $\|y_2^\circ - \bar{x}\| < \delta_0$，从而导出

$$\bar{x} - y_2^\circ \in S(\theta, \delta_0) \subset V.$$

根据 V 的假设，由以上讨论知存在元 $y_1 \in V_1$，$y_2 \in V_2$，使得 $\bar{x} - y_2^\circ = y_2 - y_1$，即有

$$\frac{\bar{x} + y_1}{2} = \frac{y_2^\circ + y_2}{2}.$$

最后，由 V_1，V_2 凸性的假设及上面的定理 3，我们还可导出

$$\frac{\bar{x}+y_1}{2}\in V_1,\ \frac{y_2^\circ+y_2}{2}\in \mathring{V}_2.$$

将上面两式综合起来可知 $V_1\cap\mathring{V}_2\neq\phi$. 显然这与定理假设矛盾. 证毕.

注 5. 在上面定理的证明中，我们不难得到下面的结论：对于两个凸集 V_1,V_2(至少有一含内点)而言，为了凸集 V_2-V_1 以 θ 为内点，必须且只须存在 V_1 和 V_2 这样的一个公共元，使其为 V_1 或者 V_2 的一个内点.

(三)

下面，我们讨论凸泛函. 上节已经介绍过在线性空间上凸泛函的定义，类似地，我们可以定义在 E 内一个凸集 V 上的凸泛函. 而且，更一般地，我们在 V 上定义一个较广的"次凸泛函"：

定义 2. 在线性空间 E 内凸集 V 上的泛函 $c(x)$ 称为次凸的，是指

$$c\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[c(x)+c(y)],\quad \forall x,y\in V.$$

有了上面的定义，我们可以给出下面的引理：

引理 1. 设 $c(x)$ 为线性空间 E 内凸集 V 上的次凸泛函，那么，对任意 n 个正有理数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，只要 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_k=1$，则有

$$c\left(\sum_{k=1}^{n}r_kx_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}r_kc(x_k),\quad \forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in V,$$

证. 下面，分四步证明.

1) 首先，从次凸泛函的定义，我们不难看出

$$c\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2^2}\right)=c\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[c\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{2^2}\left[c(x_1)+c(x_2)+c(x_3)+c(x_4)\right], \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in V,$$

因而由归纳法我们不难推出 $\forall n$（自然数），均有

$$c\left(\sum_{k=1}^{2^n}\frac{x_k}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} c(x_k), \quad \forall x_1, x_2, \cdots, x_{2^n} \in V.$$

2）其次，当已知 $c\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c(x_k)$ 时，我们有

$$c\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} c(x_k) \quad (n=2, 3, \cdots).$$

事实上，由已知条件可导出，对任意自然数 $n \geqslant 2$，均有

$$c\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\right) = c\left[n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\right)/n\right]$$

$$= c\left[\frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_k + \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1}\right)}{n}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1} c(x_k) + c\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\right)\right],$$

即

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)c\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} c(x_k),$$

也即导出

$$c\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} c(x_k).$$

3）综合 1)，2) 我们可看出，$\forall n$（自然数），均有

$$c\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left[c(x_1)+c(x_2)+\cdots+c(x_n)\right].$$

4）对于任意 n 个正有理数 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，当 $\sum_{k=1}^{n} r_k = 1$ 时，可得其公分母 m，而每个有理数 $r_k = \frac{m_k}{m}$，使得 $\sum_{k=1}^{n} m_k = m$

这样，由 3) 可导出

$$c\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right)$$

$$= c\left(\frac{\overbrace{x_1+\cdots+x_1}^{m_1\text{个}} + \overbrace{x_2+\cdots+x_2}^{m_2\text{个}} + \cdots \overbrace{+x_n+\cdots+x_n}^{m_n\text{个}}}{m}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{m}[m_1 c(x_1) + m_2 c(x_2) + \cdots + m_n c(x_n)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_k c(x_k).$$

证毕.

注 6. 当 $c(x)$ 在 V 连续时，次凸泛函为凸泛函.

事实上，由以上引理结论可知，当 $c(x)$ 连续时，可导出对于任意 n 个正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，只要 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$，则有

$$c\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c(x_k), \quad \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in V.$$

为了给出有关次凸泛函的连续性的定理，我们还须给出下面的引理

引理 2. 设 $c(x)$ 为赋范线性空间 E 内（具有内点的）凸集 V 上定义的次凸泛函. 那么，只要 $c(x)$ 在 V 内的一个闭球 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$ 的数值有上界，则 $c(x)$ 在 V 的任何一个内点的某一闭球域的数值也有上界.

证. 设次凸泛函 $c(x)$ 在 V 内某一闭球 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$ 上的数值有上界，且不妨设其一上界为 β_0，那么，$\forall x_1 \in \mathring{V}$，由 x_1 是 V 的内点，故可找到一自然数 n_0，使得元

$$x_2 = x_1 + \frac{x_1 - x_0}{n_0} \in V.$$

$\left(\text{注意，} \frac{x_1 - x_0}{n} \to \theta (n \to \infty)\right)$，由此可得 $x_1 = \frac{1}{n_0 + 1} x_0 + \frac{n_0}{n_0 + 1} x_2$（参看图 3.6）. 于是，当取正数 $\delta_1 = \frac{\delta_0}{n_0 + 1}$，对于闭球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$

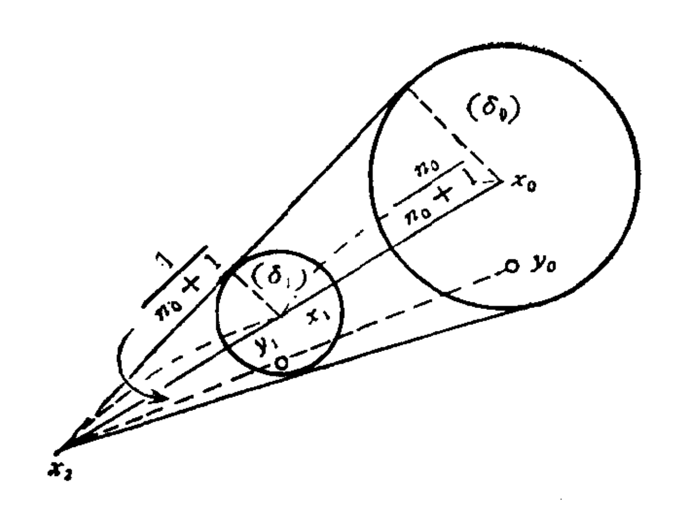


图 3.6

上任意一点 y_1，取元

$$y_0 = x_2 + (n_0 + 1)(y_1 - x_2)$$

时，由于

$$\begin{aligned}\|y_0 - x_0\| &= \|[x_2 + (n_0 + 1)(y_1 - x_2)] - x_0\| \\ &= (n_0 + 1)\left\|y_1 - x_2 + \frac{x_2 - x_0}{n_0 + 1}\right\| \\ &= (n_0 + 1)\left\|y_1 - \left(\frac{1}{n_0 + 1}x_0 + \frac{n_0}{n_0 + 1}x_2\right)\right\| \\ &= (n_0 + 1)\|y_1 - x_1\| \leqslant (n_0 + 1)\delta_1 = \delta_0,\end{aligned}$$

因而可知 $y_0 \in \bar{S}(x_0, \delta_0)$. 这样，我们由 y_0 的取法解出 y_1，有 $y_1 = \frac{1}{n_0 + 1}y_0 + \frac{n_0}{n_0 + 1}x_2$.利用引理 1 的结论，并注意 $c(x)$ 在 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$ 上数值有上界 β_0 的假设，可导出

$$\begin{aligned}c(y_1) = c\left(\frac{1}{n_0 + 1}y_0 + \frac{n_0}{n_0 + 1}x_2\right) &\leqslant \frac{1}{n_0 + 1}c(y_0) + \frac{n_0}{n_0 + 1}c(x_2) \\ &< \frac{1}{n_0 + 1}\beta_0 + \frac{n_0}{n_0 + 1}c(x_2) < |\beta_0| + |c(x_2)|.\end{aligned}$$

最后注意到 y_1 在 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 上的任意取法，上面即导出泛函 $c(x)$ 在 x_1 的闭球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 上是数值有上界的. 证毕.

有了上面的两个引理，我们可导出关于次凸泛函连续性的一个命题.

定理 6. 设 $c(x)$ 为定义在赋范线性空间 E 内（具有内点的）凸集 V 上的次凸泛函，那么，只要 $c(x)$ 在 V 内某一闭球 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$ 的数值有上界，则 $c(x)$ 必在 V 的开核 $\mathring{V}$ 上连续.

证. $\forall x_1 \in \mathring{V}$，首先，由引理 2 可知，必存在 V 中一闭球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$，使得泛函 $c(x)$ 在其上的数值是有上界的，不妨设其一上界为 β_1. 其次，$\forall x \in E$，$\|x\| < \dfrac{\delta_1}{2}$，取两个自然数 m, n；$n > m$，使得 $x_1 \pm nx \in \bar{S}(x_1, \delta_1)$（参看图 3.7）. 于是，由引理 1 以及 $c(x)$ 的次凸性可导出

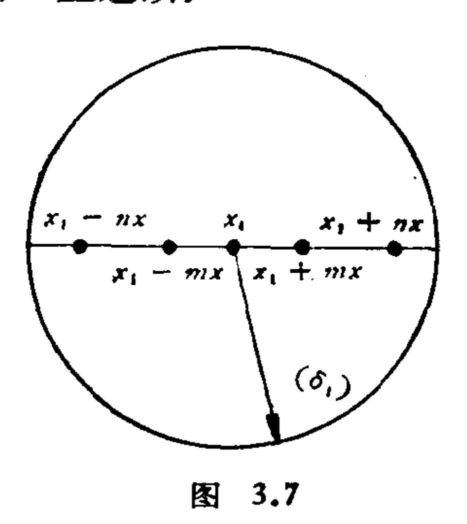


图 3.7

$$c(x_1 + mx) = c\left(\frac{m}{n}(x_1 + nx) + \frac{n-m}{n} x_1\right)$$

$$\leqslant \frac{m}{n} c(x_1 + nx) + \frac{n-m}{n} c(x_1),$$

由此有

$$\frac{c(x_1 + mx) - c(x_1)}{m} \leqslant \frac{c(x_1 + nx) - c(x_1)}{n}. \tag{3}$$

同样地，由 $c(x)$ 的次凸性又可导得关系式

$$c(x_1) = c\left(\frac{(x_1 + mx) + (x_1 - mx)}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[c(x_1 + mx) + c(x_1 - mx)],$$

也即

$$c(x_1) - c(x_1 - mx) \leqslant c(x_1 + mx) - c(x_1). \tag{4}$$

注意到在式(3)中当换 x 为 $-x$ 时仍是成立的，即有

$$c(x_1 - mx) - c(x_1) \leqslant \frac{m}{n}[c(x_1 - nx) - c(x_1)],$$

也即

$$\frac{[c(x_1) - c(x_1 - nx)]}{n} \leqslant \frac{c(x_1) - c(x_1 - mx)}{m}. \tag{5}$$

因而，结合(3)，(4)，(5)，我们可导出

$$\frac{c(x_1)-c(x_1-nx)}{n}\leqslant\frac{c(x_1+mx)-c(x_1)}{m}$$

$$\leqslant\frac{c(x_1+nx)-c(x_1)}{n}.$$

特别，令 $m=1$，并注意到 $c(x)$ 在 $\bar{S}(x_1,\delta_1)$ 数值有一上界为 β_1，由上式可导出

$$\frac{c(x_1)-\beta_1}{n}\leqslant c(x_1+x)-c(x_1)\leqslant\frac{\beta_1-c(x_1)}{n}.$$

最后，根据 n 的取法我们知道，当 $x\to\theta$ 时，必有 $n\to\infty$，因而由上式直接可得，当 $x\to\theta$ 时，有 $c(x_1+x)-c(x_1)\to 0$，也即 $c(x)$ 在 x_1 点是连续的．证毕．

注 7. 由定理 6 可知，如果次凸泛函 $c(x)$ 在 E 的某一内点不连续，那么，$c(x)$ 必在 E 的任何闭球 $\bar{S}(x,\delta)$ 的数值均无上界．

由定理 6 我们不难直接导出下面的推理：

推理. 设 V 为赋范线性空间内的一具有内点的有界闭凸集，$c(x)$ 为 V 上定义的"凸泛函"，那么，只要 $c(x)$ 在 V 的"边界" $V\backslash\mathring{V}$ 上数值有上界，则 $c(x)$ 必在 V 的开核 $\mathring{V}$ 上连续．

证． 事实上，我们首先不难证明凸集 V 的闭包 $\bar{V}$ 也是凸集．此外，由 V 的有界性可知，$\forall x\in V$，均存在 V 的"边界点" y_1,y_2，使得 $x=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$，其中，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$．这样，由 $c(x)$ 在 V 的凸性可知

$$c(x)=c(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leqslant\lambda_1 c(y_1)+(1-\lambda)\,c(y_2).$$

注意到 $c(x)$ 在 V 的边界是数值有上界的，当设其一上界为 β_0 时，由上式可导出

$$c(x)\leqslant\lambda_1\beta_0+(1-\lambda_1)\beta_0=\beta_0,$$

即 $c(x)$ 在 V 上的数值是有上界 β_0 的．因而直接可从定理 6 中导出本推理结论．证毕．

注 8. 由上面的推理我们特别可以推出，如果 $f(x)$ 为实轴凸集 V 上定义的一个凸函数（按 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+$

$(1-\lambda)f(y)$ 定义），则其在 V 的任何内点均是连续的．事实上，因为对于实轴上的任何一个内点而言，它的“球域”是“区间”，而“边界”为两个端点，因而，其“边界值”永远是有上界的．

（四）

这里，介绍一个由凸集构造的次加法正齐性泛函（通常称为 Minkowski 泛函）的性质．

定理 7. 设 V 为实赋范线性空间 E 内的一个凸集，且有 $\theta\in\mathring{V}$，那么，当在 E 上定义泛函 $p(x)$ 为

$$p(x)=\inf\left\{\mu\,\middle|\,\mu>0,\ \frac{x}{\mu}\in V\right\}$$

时，$p(x)$ 必为 E 上的次加法正齐性连续泛函，并且有

$\bar{V}=\{x\,|\,p(x)\leqslant 1, x\in E\}$，$\mathring{V}=\{x\,|\,p(x)<1, x\in E\}$.

证． 下面我们逐条验证所需结论．

1）$p(x)$ 是次加的．事实上，$\forall x, y\in E$，$\forall\varepsilon>0$，由泛函 $p(x)$ 的定义知，$\exists\alpha,\beta>0$，使得

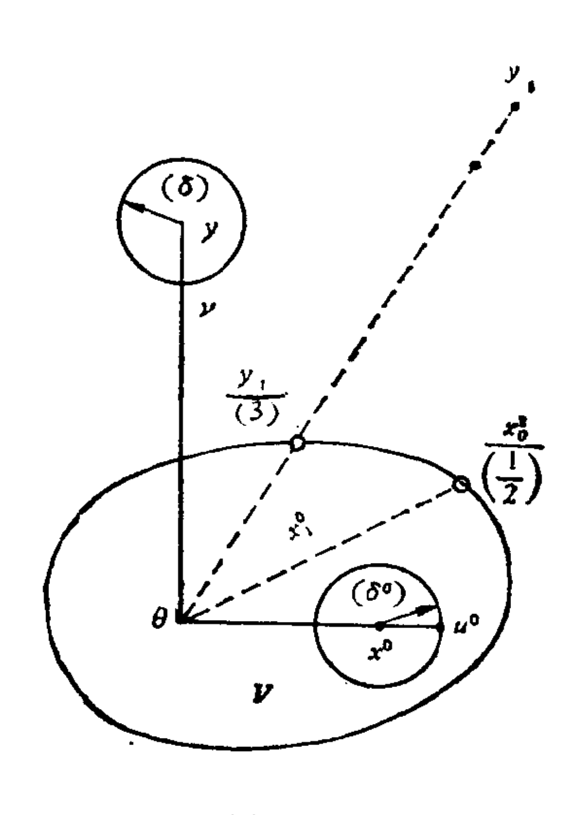


图 3.8

$$\frac{x}{\alpha} \in V, \ \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < p(x);$$

及

$$\frac{x}{\beta} \in V, \ \beta - \frac{\varepsilon}{2} < p(y).$$

但又由 V 是凸集，故对数 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in (0,1)$，有

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{y}{\beta}\right) \in V.$$

于是，注意到泛函 $p(x)$ 的定义以及上面的两个不等式，可得到

$$p(x+y) \leqslant \alpha+\beta < \left(p(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(p(y) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$= p(x) + p(y) + \varepsilon; \ \forall x, y \in E, \forall \varepsilon > 0.$$

因而令 $\varepsilon \to 0$ 时，可导出

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \ \forall x, y \in E.$$

2) $p(x)$ 是正齐性的．首先，当 $\lambda = 0$ 时，易见 $p(\theta) = 0$。而当 $\lambda > 0$ 时，我们有

$$p(\lambda x) = \inf\left\{\mu \,|\, \mu > 0, \ \frac{\lambda x}{\mu} \in V\right\}$$

$$= \inf\left\{\lambda \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \,\middle|\, \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) > 0, \frac{x}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)} \in V\right\}$$

$$= \lambda \cdot \inf\left\{\mu' \,|\, \mu' > 0, \ \frac{x}{\mu'} \in V\right\} = \lambda p(x), \quad \forall x \in E.$$

3) $p(x)$ 是连续的．首先，由 $\theta \in \mathring{V}$ 可以导出 $p(x)$ 是有界泛函，由 θ 是 V 的内点，可知存在一闭球 $\bar{S}(\theta, \delta) \subset V$．注意到当元 $x \in V$ 时，即 $\frac{x}{1} \in V$，故由 $p(x)$ 的定义可知，必有 $p(x) \leqslant 1$．这样，$\forall x \in E$，由于 $\frac{\delta x}{\|x\|} \in \bar{S}(\theta, \delta)$ 以及上面 2) 的结果，便可得到

$$\frac{\delta}{\|x\|} p(x) = p\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right) \leqslant 1,$$

也即导出

$$p(x) \leqslant \frac{\|x\|}{\delta}, \quad \forall x \in E.$$

其次,注意到 $p(x)$ 的次加性,由其有界性便可导出下面的关系式

$$p(x) - p(x_0) \leqslant p(x - x_0) \leqslant \frac{\|x - x_0\|}{\delta}, \quad \forall x, x_0 \in E$$

及

$$p(x_0) - p(x) \leqslant p(x_0 - x) \leqslant \frac{\|x - x_0\|}{\delta}, \quad \forall x, x_0 \in E.$$

也即

$$|p(x) - p(x_0)| \leqslant \frac{1}{\delta}\|x - x_0\|, \quad \forall x, x_0 \in E.$$

从而直接可以导出泛函 $p(x)$ 在 E 上是连续的.

4) $\bar{V} = \{x | p(x) \leqslant 1, x \in E\}$. 首先, 证明 $\bar{V} \subset \{x | p(x) \leqslant 1, x \in E\}$. 由上面 3) 的证明已知, $\forall x \in V$, 均有 $p(x) \leqslant 1$, 当 $\forall y \in \bar{V} \backslash V$ 时, 则可由 $y \in \bar{V}$ 知 $\exists \{x_n\} \subset V$, 使得 $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. 利用上面 3) 的结果, 直接就可导出 $p(y) = \lim\limits_{n \to \infty} p(x_n) \leqslant 1$. 其次, 我们证明集 $\{x | p(x) \leqslant 1, x \in E\} \subset \bar{V}$. 事实上, 如果有元 $y \notin \bar{V}$, 那么, 必有 y 的球域 $\bar{S}(y, \delta)$, 使 $\bar{S}(y, \delta) \cap \bar{V} = \phi$. 由元 $v = y - \delta \frac{y}{\|y\|}$ (由 $y \notin \bar{V}$, 显然知 $y \neq \theta$) 满足

$$\|v - y\| = \left\| \delta \frac{y}{\|y\|} \right\| = \delta,$$

故知 $v \in \bar{S}(y, \delta)$ 从而导得 $v \notin \bar{V}$, 也即有

$$y \Big/ \frac{\|y\|}{\|y\| - \delta} = \left(1 - \frac{\delta}{\|y\|}\right) y = v \notin V.$$

这样,注意到 $p(y)$ 的定义, 便可知 $p(y) \geqslant \frac{\|y\|}{\|y\| - \delta} > 1$. 此即证得 $\{x | p(x) \leqslant 1, x \in E\} \subset \bar{V}$. 综合以上的结果,即导出 4) 的结论.

5) $\mathring{V} = \{x | p(x) < 1, x \in E\}$. 首先,证明 $\mathring{V} \subset \{x | p(x) < 1, x \in E\}$. 当 $x^\circ = \theta$ 时, 显然从上面 2) 可知 $p(\theta) = 0 < 1$ 成

立；当 $x^\circ \neq \theta$ 时，由 x° 为 V 的内点，故必有一闭球 $\bar{S}(x^\circ, \delta_0) \subset V$. 这样，对于元 $u^\circ = x^\circ + \delta_0 \frac{x^\circ}{\|x^\circ\|}$ 而言，由于

$$\|u^\circ - x^\circ\| = \left\| \delta_0 \frac{x^\circ}{\|x^\circ\|} \right\| = \delta_0,$$

故知 $u^\circ \in \bar{S}(x^\circ, \delta_0) \subset V$，也即有

$$x^\circ \Big/ \frac{\|x_0\|}{\|x_0\| + \delta_0} = u^\circ \in V.$$

注意到 $p(x)$ 的定义，可导出 $p(x^\circ) \leqslant \frac{\|x_0\|}{\|x_0\| + \delta_0} < 1$. 其次，证明集 $\{x \mid p(x) < 1, x \in E\} \subset \mathring{V}$. 由 4) 的结果可知，如果有元 $x' \in E$，使得 $p(x') < 1$，那么，由 $p(x)$ 的定义可知必有 $x' \in V$（否则，当 $x' \notin V$ 时，注意到 V 为含 θ 之凸集，则 $\forall \mu$: $0 < \mu < 1$，由 $\left\| \frac{x'}{\mu} \right\| = \frac{\|x'\|}{\mu} > \|x'\|$，必可导出 $\frac{x'}{\mu} \notin V$，从而有 $p(x') \geqslant 1$），由 3) 的结论及 $p(x)$ 的连续性可知，必有 x' 的球 $S(x', \delta')$ 使得有 $p(x) < 1$，$\forall x \in S(x', \delta')$. 注意到 $p(x)$ 的定义则可导出 $S(x', \delta') \subset V$，也即 $x' \in \mathring{V}$. 综合以上的论述，即导出了 5) 的结论. 证毕.

上面定理的证明启发我们引出两个以后需要用到的结论：

推理 1. 设 E 为一赋范线性空间，那么，对于 E 上的一"次加"泛函而言，由其"强有界"性可以导出其连续性；对于 E 上一个"正齐性"泛函而言，由其在"原点" θ 的连续性可以导出其强有界性.

证. 1) 设 $p(x)$ 在 E 上是"强有界"泛函（§2.1 定义 2），即有 $|p(x)| \leqslant \beta\|x\|$，$\forall x \in E$（其中 β 为一固定正数）. 那么，由上面定理 7 的证明 3) 的方法，我们不难直接由 $p(x)$ 的次加性及以上条件导出其连续性.

2) 设正齐性泛函 $p(x)$ 在 E 上对 θ 是连续的. 那么，对于正数 1 而言，必有 E 内的闭球 $\bar{S}(\theta, \delta)$，使得 $|p(x)| < 1$，$\forall x \in \bar{S}(\theta, \delta)$（注意 $p(\theta) = 0$）. 这样，由上面定理 7 证明 3) 的方法，我们不难由 $p(x)$ 的正齐性及上面结果直接导出 $p(x)$ 在 E 上的强有

界性．证毕．

推理 2. 设 $p(x)$ 为赋范线性空间 E 上定义的"次加正齐性"泛函，那么，为了 $p(x)$ 在 E 上是强有界泛函，必须且只须 $p(x)$ 在 E 中某一点 x_0 是连续的．

证． 定理的必要性显然可由推理 1 直接导出．下面证明其充分性．事实上，如果 $p(x)$ 在 x_0 点是连续的，那么，注意到 $p(x)$ 必在 E 中某一闭球的数值是有上界的；此外由假设可知，$p(x)$ 亦是凸泛函．因此，直接利用前面的定理 6 则可导出 $p(x)$ 在 E 上是连续的．最后，再由上面的推理 1 便可导得本命题结论．证毕．

注 9. 对于上面 E 上的次加泛函，由于

$$p(x)-p(x_0)\leqslant p(x-x_0)$$

及

$$p(x_0)-p(x)\leqslant p(x_0-x);\quad \forall x,x_0\in E,$$

因此，当 $\overline{\lim\limits_{x\to\theta}}\,p(x)=0$ 时，$p(x)$ 必为 E 上的连续泛函；因此，当 $p(x)$ 还是正齐性时，此条件亦为 $p(x)$ 强有界的充要条件．

关于次加性与凸泛函的其它结果可以参看文献 [16, 17]．

习　　题

1．试证明：为了线性簇 $M_0=E_0+x_0$ 是闭集，必须且只须 E_0 是 E 的闭线性子空间（E 为任一距离(线性)空间）．

2．证明本节定理 2 关于凸集的四个基本命题．

3．试证明：如果赋范线性空间 E 中有一线段 $[x_1, x_2]\subset\Sigma_1$（$E$ 内的单位球面，即 $\Sigma_1=\{x\mid \|x\|=1,\ x\in E\}$)，则必有

(i) $\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|\geqslant 1$, $\forall\lambda\in \boldsymbol{R}$.

(ii) $\|\alpha x_1+\beta x_2\|\geqslant|\alpha+\beta|$, $\forall\alpha,\beta\in R$.

4．试证明本节定理 3 的两个推理．

5．设 E 为一实线性空间，x_0 为 E 内任一给定点，$c(x)$ 为 E 上定义的泛函，试证明：

(i) 如果 $c(x)$ 是次凸泛函，那么，$\forall y\in E$，单边部分极限 $\lim\limits_{r\to0+}[c(x_0+ry)-c(x_0)]/r$（其中，$r$ 为有理数）必存在．

(ii) 如果 $c(x)$ 是凸泛函，那么，$\forall y\in E$，单边极限 $\lim\limits_{\lambda\to0+}[c(x_0+\lambda y)-$

$c(x_0)]/\lambda$ 必存在.（通常记为 $dc(x_0,y)$，称为"单边 Gateaux 微分."）

6．设 V 为线性空间 E 内的一个凸集，$c(x)$ 为 V 上定义的凸泛函，当元 $y_1,y_2\in V(y_1\neq y_2)$，元 $x_0=\lambda_0y_1+(1-\lambda_0)y_2\in(y_1,y_2)$ 时，试证明：对于开线段 (x_0,y_2) 内任意一点 $x=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$，均成立下面关系式：

(i) $\dfrac{\lambda_0-\lambda}{1-\lambda_0}[c(x_0)-c(y_1)]\leqslant c(x)-c(x_0)$；

(ii) $c(x)-c(x_0)\leqslant\dfrac{\lambda_0-\lambda}{\lambda}[c(y_2)-c(x)]$；

(iii) $c(x)-c(x_0)\leqslant\dfrac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0}[c(y_2)-c(x_0)]$.

7．当 V，$c(x)$，y_1，y_2，x_0 假设如习题 6 时，试证明：对于开线段 (y_1,x_0) 内任意一点 $x=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$ 均成立下面关系式：

(i) $c(x)-c(x_0)\leqslant\dfrac{\lambda-\lambda_0}{1-\lambda_0}[c(y_1)-c(x_0)]$；

(ii) $\dfrac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}[c(x_0)-c(y_2)]\leqslant c(x)-c(x_0)$.

8．设 V 是赋范线性空间内的一个有界闭凸集，并设 $d=\sup\limits_{y_1,y_2\in V}\|y_1-y_2\|$，那么，$\forall x_0\in\mathring{V}$，$\exists\delta_0>0$，使得对于 V 的任何经过 x_0 的两边界点 y_1，y_2．如果设 $x_0=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$，则一致地有 $\lambda\geqslant\dfrac{\delta_0}{d}$，$(1-\lambda)\geqslant\dfrac{\delta_0}{d}$.

9．利用上面习题 5，6，7 的结果，再次证明本节定理 6 后的推理.

10．利用赋准范线性空间 E 上的连续线性泛函 f 必使 $V=\{x\,|\,|f(x)|<1,x\in E\}$ 为一个含 θ 点的开凸集的性质，试证明：在空间 $S[0,1]$ 上的非零连续线性泛函是不存在的.

§3.3. 分隔性定理

这一节，作为 Hahn-Banach 定理的应用，我们讨论用闭超平面来分隔赋范线性空间中两个集的问题．由于在 §2.3 节定理 1 中我们曾经论述过，空间 E 中闭超平面 $H_f=\{x\,|\,f(x)=c_0,x\in E\}$ 的存在性与 $f\in E^*$ 的存在性是等价的，因而，本节也可以说是考虑上述的有界线性泛函 $f\in E^*$ 的存在性问题的．首先，我们从一个简单定理讲起.

定理 1. 设 E 为一赋范线性空间，E_0 为其一线性子空间．那么，$\forall x_1 \in E$，如果有

$$d(x_1, E_0) = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\| = d > 0,$$

则 $\exists f_1 \in E^*$，使得

$$\|f_1\| = \frac{1}{d}, \ f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = x_1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \in E_0 \text{ 时.} \end{cases}$$

证．我们先做 E 内一线性子空间 $\hat{E}_0$，

$$\hat{E}_0 = \{\alpha x_1 + y \mid \alpha \in \boldsymbol{K}, y \in E_0\},$$

并在 $\hat{E}_0$ 上定义泛函 f_0，

$$f_0(\alpha x_1 + y) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{K}, y \in E_0.$$

易见，f_0 为 $\hat{E}_0$ 上一确定的线性泛函，且有

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = x_1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \in E_0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由当 $\alpha \neq 0$ 时，有 $\|\alpha x_1 + y\| \neq 0 (\forall y \in E_0)$，故得

$$\begin{aligned} |f_0(\alpha x_1 + y)| &= \frac{|\alpha|}{\|\alpha x_1 + y\|} \cdot \|\alpha x_1 + y\| \\ &= \frac{1}{\left\| x_1 - \left(-\frac{y}{\alpha}\right) \right\|} \|\alpha x_1 + y\|, \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{K}, y \in E_0. \end{aligned}$$

并注意到 $-\frac{y}{\alpha} \in E_0$，故有

$$\left\| x_1 - \left(-\frac{y}{\alpha}\right) \right\| \geqslant \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\| = d > 0,$$

从而由上式推得

$$|f_0(\alpha x_1 + y)| \leqslant \frac{1}{d} \|\alpha x_1 + y\|, \quad \forall \alpha x_1 + y \in \hat{E}_0.$$

（上式当 $\alpha = 0$ 时亦对）．由此导出

$$\|f_0\|_{\hat{E}_0} \leqslant \frac{1}{d}.$$

但另一方面，由 d 的定义可知，$\exists \{y_n\} \in E_0$，使得 $\|x_1 - y_n\| \to d$ $(n \to \infty)$．由此当注意到泛函 f_0 的作法时，则导出

$$1 = |f_0(x_1)| = |f_0(x_1 - y_n)|$$
$$\leqslant \|f_0\|_{\hat{E}_0} \cdot \|x_1 - y_n\| \to \|f_0\|_{\hat{E}_0} \cdot d \quad (n \to \infty).$$
也即得到
$$\|f_0\|_{\hat{E}_0} \geqslant \frac{1}{d}.$$
因此有 $\|f_0\|_{\hat{E}_0} = \frac{1}{d}$.

最后,直接利用 §3.1 定理 3 的结果,则可将在线性子空间 $\hat{E}_0$ 上定义的有界线性泛函“保范延拓”为全空间 E 上的有界线性泛函 f_1,由 f_0 的性质我们可看出此 f_1 便是本定理所要求的泛函. 证毕.

注 1. 定理 1 的几何意义:在空间中存在一闭超平面,把一个点及与其有正距离的一个线性子空间分隔开.

由定理 1 可直接导出一个与逼近论有关的推理.

推理. 设 M 为赋范线性空间 E 内的任一子集,$x_0 \neq \theta$ 为 E 中任一给定元,那么,为了元 $x_0 \in \overline{[M]}$,必须且只须 $\forall f \in E^*$,如果有 $f(x) = 0$ $(x \in M)$,则有 $f(x_0) = 0$(这里,$\overline{[M]}$ 表示由 M 张成的闭线性子空间).

注 2. 推理给出了一元 x_0 可由另一元列 $\{x_n\}$ 的线性组合逼近的充要条件.

定理 2 **(Mazur).** 设 V 为“实”赋范线性空间 E 中一含有内点的凸集,M 为 E 中一线性簇,并有 $M \cap \mathring{V} = \phi$,那么,必定存在一泛函 $f_1 \in E^*$ 和一实数 c_1,使得

$$f_1(x) = \begin{cases} c_1, & x \in M; \\ \leqslant c_1, & x \in V; \\ < c_1, & x \in \mathring{V}. \end{cases}$$

证. 首先,由假设凸集 V 具有内点,因此不妨设 $\theta \in \mathring{V}$(否则,我们可以通过“平移”来实现,而平移后线性簇仍为线性簇,其相应泛函值仅差一常数,所以不妨碍本定理的结论). 然后,我们做 M 的线性扩张,$[M] = E_0$,显然 E_0 为 E 内一线性子空间,并且由上节定理 1 可知,线性簇 M 必为子空间 $E_0 = [M]$ 内的一个超平面,因而必有 E_0 上的一个分配泛函 f_0,使得

$$M = \{x \mid f_0(x) = 1, x \in E_0\}.$$

其次,我们令 $p(x)$ 为 E 中(满足 $\theta \in \mathring{V}$)的凸集 V 上所决定的 Minkowski 泛函. 那么,由假设 M 不含 V 的内点及上节定理 7 的结果 $V \subset \{x \mid p(x) \leqslant 1, x \in E\}$, $\mathring{V} = \{x \mid p(x) < 1, x \in E\}$, 可导出 $\forall x \in M$, 必有 $p(x) \geqslant 1$, 也即有

$$f_0(x) = 1 \leqslant p(x), \quad \forall x \in M.$$

此外,注意到 f_0 在 E_0 上的齐性以及 $p(x)$ 的正齐性还可导出

$$f_0(tx) = t \leqslant tp(x) = p(tx), \qquad \forall t \geqslant 0, \ x \in M,$$

由于 $p(x)$ 的非负性,还有

$$f_0(tx) = t \leqslant 0 \leqslant p(tx), \qquad \forall t < 0, \ x \in M.$$

于是再注意到 M 为 E_0 上超平面的性质,当令 $N_{f_0} = \{x \mid f_0(x) = 0, \ \forall x \in E_0\}$, 元 $x_0 \in M$ 时,有 $E_0 = \{\alpha x_0\} + N_{f_0} = \{\alpha x \mid \alpha \in R, x \in M\} \cup N_{f_0}$. 因而由上面的两个结果可导出

$$f_0(x) \leqslant p(x), \qquad \forall x \in E_0.$$

最后,利用 Hahn-Banach 定理,可将上述线性泛函 f_0 保持 $p(x)$ 控制地延拓为 E 上的线性泛函 f_1. 这样,根据 Minkowski 泛函 $p(x)$ 的性质,我们可导出

$$f_1(x) \leqslant p(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in V; f_1(x) \leqslant p(x) < 1, \quad \forall x \in \mathring{V}.$$

也即线性泛函 $f_1(x)$ 将 E 中一有界集变为一有上界的实数集,从而由 §2.1 定理 2 后的推理 2 则知 f_1 为 E 上的有界线性泛函,即 $f_1 \in E^*$, 并且由上两式以及 f_0 的形成得

$$f_1(x) = f_0(x) = 1, \qquad \forall x \in M.$$

即知此 f_1 为本定理所要求的泛函. 证毕.

注 3. 定理 2 的几何意义:在定理的假设条件下,必定存在包含着线性簇 M 的闭超平面 H, $H = \{x \mid f(x) = c_1, x \in E\}$, 使其不含有凸集 V 的内点.

由定理 2 我们可以直接得到下面的推理(取 $M = \{x_1\}$ (单点集)):

推理 1. 如果 V 为"实"赋范线性空间 E 中一具有内点的凸集,那么,$\forall x_1 \notin \mathring{V}$, $\exists f_1 \in E^*$, $c_1 \in \boldsymbol{R}$, 使得

$$f_1(x)=\begin{cases} c_1, & x=x_1; \\ \leqslant c_1, & x\in V; \\ < c_1, & x\in \mathring{V}. \end{cases}$$

注 4. 上面推理 1 的几何意义：在推理的条件下，必有一经过点 x_1 的闭超平面 H，使得凸集 V 在 H 的一侧. 特别地，如果在以上推理中有元 $x_1\in V\backslash\mathring{V}$，那么推理的结论表明，过具有内点的凸集 V 上的任一边界点 x_1，必定存在着 V 的一个闭的"承托"超平面（参阅 §3.1 的定义）.

由上面的推理 1，还可以得到下面关于"凸体"（含内点的闭凸集）的构造的一个推理. 为此，作为平面的几何推广，我们先给出关于闭的"半空间"集的定义.

定义 1. 设 E 为一实赋范线性空间，H_f 为由泛函 $f\in E^*$ 所确定的闭超平面，$H_f=\{x\,|\,f(x)=c_f,\ x\in E\}$（$c_f$ 为某一实数），那么，我们称集

$$W_f=\{x\,|\,f(x)\leqslant c_f,\ x\in E\}$$

为由闭超平面 H_f 所确定的闭的半空间集.

有了上面的定义我们就可以给出下面的推理：

推理 2. 如果 V 为"实"赋范线性空间 E 中一具有内点的闭凸集，那么，V 必为一些闭的"半空间"集之交集.

证. 由推理 1 及注 4 可知，对于（凸体）V 的任意边界点 $x\in\bar{V}\backslash\mathring{V}=V\backslash\mathring{V}$，均存在着 V 的一个闭的承托超平面（参看图 3.9）

$$H_f=\{x\,|\,f(x)=c_f,\ x\in E\},$$

这里，$f(x)\leqslant c_f,\ \forall x\in V;\ f(x)<c_f,\ \forall x\in\mathring{V}$.

于是，当设这样的泛函 f 的集为 G^* 时（显然 $G^*\subset E^*$），由这些闭超平面 H_f 所确定的闭的半空间的集类

$$W_f=\{x\,|\,f(x)\leqslant c_f,\ x\in E\},\qquad \forall f\in G^*$$

的交集 $\bigcap_{f\in G^*}W_f$，必为集 V. 事实上，一方面从上面闭超平面 H_f（$f\in G^*$）的形成，显然，可知

$$V\subset\bigcap_{f\in G^*}W_f.$$

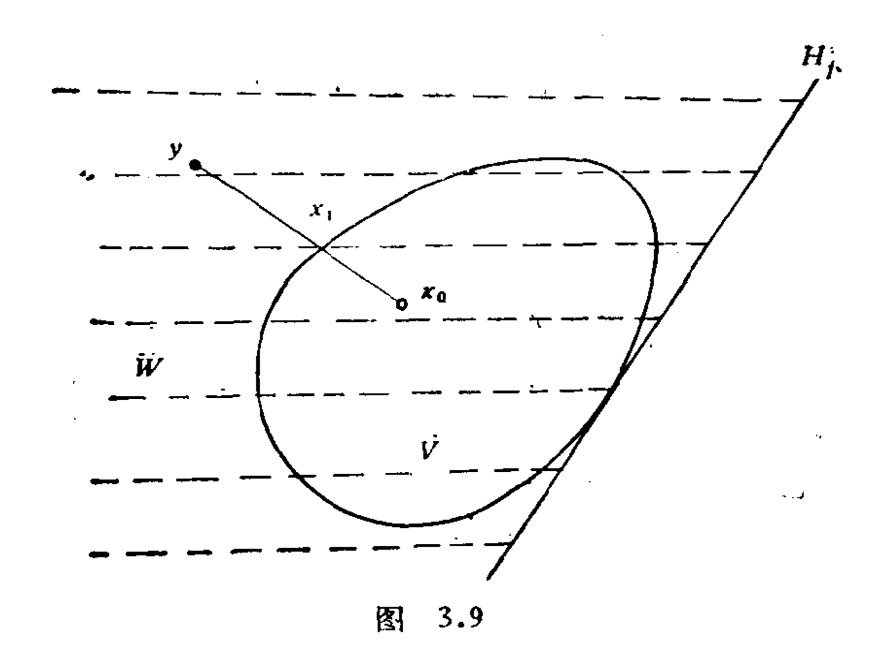


图 3.9

而另一方面，如果有一元 $y \in \bigcap_{f \in G^*} W_f$ 使得 $y \notin V$，那么，当任取 V 中一内点 x_0，并做闭线段 $[x_0, y] = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)y \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ 时，用熟知的"区间套"定理来对上面 λ 的"抽象"函数（值域是空间 E）$\varphi(\lambda) = \lambda x_0 + (1-\lambda)y$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ 讨论时（注意 $\varphi(\lambda)$ 在 $[0,1]$ 两端分别为内点与外点），我们可找到一点 $\lambda_1 \in (0,1)$，使得 $\varphi(\lambda_1) = \lambda_1 x_0 + (1-\lambda_1)y = x_1$ 为 V 的边界点．从而注意到 V 是闭集的假设，我们可得到 $x_1 \in V \backslash \mathring{V}$．同理可知，对 V 的边界点 x_1 而言，$\exists f_1 \in E^*$，使得 $H_{f_1} = \{x \mid f_1(x) = c_{f_1}, x \in E\}$ 为 V 的一闭的承托超平面，且有 $f_1(x_1) = c_{f_1}$ 以及

$$f_1(x) \leqslant c_{f_1}, \quad \forall x \in V \ (f_1(x_0) < c_{f_1}).$$

即 $f_1 \in G^*$．然而，根据元 $y \in \bigcap_{f \in G^*} W_f \subset W_{f_1}$ 的假设，我们又可导出

$$f_1(x_1) = f_1[\lambda_1 x_0 + (1-\lambda_1)y] = \lambda_1 f(x_0) + (1-\lambda_1) f(y)$$
$$< \lambda_1 c_{f_1} + (1-\lambda_1) c_{f_1} = c_{f_1}.$$

此显然与 f_1 的取法矛盾．证毕．

注 5. 推理 2 同样也是可以由下面的定理 3 导出的．然而，作为介绍一种证明方法，现在把它放在这里讨论．由本节的习题，我们可以看到当凸集 V 不含内点时结论也是正确的．

定理 3（Eidelheit 定理）． 设 V_1，V_2 为"实"赋范线性空间

E 中的两个凸集，并且 $\mathring{V}_2 \neq \phi$，$V_1 \cap \mathring{V}_2 = \phi$. 那么，必定存在一泛函 $f_1 \in E^*$，使得

$$\sup_{x\in V_1} f_1(x) \leqslant \inf_{y\in V_2} f_1(y), \sup_{x\in V_1} f_1(x) < f_1(y^\circ), \qquad \forall y^\circ \in \mathring{V}_2.$$

证. 首先，由上节关于凸集的定理 5 可知，当设 $V = V_2 - V_1$ 时，V 亦为具有内点的凸集，并有 $\theta \bar{\in} \mathring{V}$. 于是，当对于元 θ 及凸集 V 直接应用定理 2 的推理 1 时（注意这里的泛函取了一个负号），我们可得到一个非零泛函 $f_1 \in E^*$，使得

$$f_1(z) \geqslant 0, \quad \forall z \in V.$$

于是，由 f_1 的分配性及集 V 的定义，便导出

$$f_1(x) \leqslant f_1(y), \qquad \forall x \in V_1,\ y \in V_2.$$

由此可得

$$\sup_{x\in V_1} f_1(x) \leqslant \inf_{y\in V_2} f_1(y).$$

最后，注意到 §2.1 习题 6 的结论（一个非零分配泛函在 E 中任何一点都不是"局部极小"的），可知，$\forall y^\circ \in \mathring{V}_2$ 由于必有一闭球 $\bar{S}(y^\circ, \delta_0) \subset V_2$，故有

$$\inf_{y\in \bar{S}(y^\circ,\delta_0)} f_1(y) < f_1(y^\circ).$$

由此导出

$$\sup_{x\in V_1} f_1(x) < f_1(y^\circ).$$

证毕.

注 6. 定理 3 的几何意义：对于实赋范线性空间内的两个凸集而言，只要一个具有内点，并且其任一内点均不为另一个所包含. 那么，必定存在一个闭超平面将此两凸集相分离.

事实上，只要在以上定理结论中的泛函 $f_1 \in E^*$ 取 $\sup\limits_{x\in V_1} f_1(x)$ 与 $\inf\limits_{x\in V_2} f_1(x)$ 之间的任一个数 c_1，然后做闭超平面 $H = \{x \mid f_1(x) = c_1, x \in E\}$，则这就是所要求的、并且可知 V_1 在 $f_1(x) \leqslant c_1$ 的一侧，V_2 在 $f_1(x) \geqslant c_1$ 的一侧，特别当 $y \in \mathring{V}_2$ 时，均有 $f_1(y) > c_1$.

注 7. 定理 3 是可以推广到所谓"拓扑线性空间"中去的，结合该空间上的另一定理（为了定义在线性拓扑空间 E 上的分配泛

函 f 是连续的必须且只须存在一个与 $N_f = \{x | f(x) = 0, x \in E\}$ 不交的非空凸开集），我们可直接导出，在拓扑线性空间 E（包含赋范与赋准范空间）中非零连续线性泛函存在的充分必要条件是 E 内具有一开的凸真子集（参看文献 [95] 或其它线性拓扑空间方面的书）.

定理 4（**Ascoli-Mazur 定理**）. 设 V 是"实"赋范线性空间 E 中的一个闭凸集，那么，$\forall x_1 \overline{\in} V$，$\exists f \in E^*$，使得

$$\sup_{x \in V} f_1(x) < f_1(x_1).$$

证. 由假设 V 是 E 中的闭集，故从 $x_1 \overline{\in} V$，则必有 x_1 的一球 $S(x_1, \delta_1)$ 使得 $S(x_1, \delta_1) \cap V = \phi$. 于是，对于凸集 V 以及具有内点的凸集 $S(x_1, \delta_1)$ 直接应用定理 3 的结论，我们可导出 $\exists f_1 \in E^*$，使得

$$\sup_{x \in V} f_1(x) < f_1(x_1).$$

证毕.

为了引出一个推理，下面先介绍一个定义.

定义 2. 赋范线性空间 E 内的集 F 称为弱列闭的[1]，是指 $\forall x_0 \in E$，对于集 F 中的任一元列 $\{x_n\}$，只要有式

$$f(x_n) \to f(x_0) \ (n \to \infty), \qquad \forall f \in E^*$$

成立，就必可导出 $x_0 \in F$.

注 8. E 中的弱列闭集必然也为（强）闭集. 反之不一定成立.

事实上，前一结论是明显的只要注意到泛函 $f \in E^*$ 的连续性就不难导出至于后一结论，我们可举一反例如下:

反例. 设 $E = (c)$，$F = \{e_n\}$（其中，$e_n = (0, \cdots, 0, \underset{(n位)}{1}, 0, \cdots)$，$n = 1, 2, \cdots$）. 显然集 F 是空间 (c) 中的闭集（由"孤立点"组成）. 但另一方面，由 §2.3 可知 $(c)^* = (l^1)$，故 $\forall f \in (c)^*$，$\exists \{f_n\} \in (l')$，使得（令 $e_n = \{\xi_k^{(n)}\}$）

1) 在这里，我们不准备介绍"弱拓扑"的知识，因此不涉及"弱闭集"的概念. 要进一步了解这方面的内容，请参看文献 [49]，[68] 等.

$$f(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \xi_k^{(n)} = f_n \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是，注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$，便可导出

$$f(e_n) \to 0 = f(\theta)\ (n \to \infty), \qquad \forall f \in (c)^*.$$

然而，由元 $\theta \,\bar{\in}\, F$，故知 F 不是弱列闭集.

推理 1. 设 V 是赋范线性空间 E 内的一个凸集. 那么，为了 V 是"弱列闭"集，必须且只须 V 是一个闭集.

证. 本命题的必要性是显然的. 下面，我们仅证其充分性. 反之，如果有 $\{x_n\} \subset V$，$x_0 \in E$，使得均有

$$f(x_n) \to f(x_0), \qquad \forall f \in E^*; \tag{1}$$

然而 $x_0 \,\bar{\in}\, V$，那么，如果 E 为复的空间，由 §3.1 定理 2 的证明中的说明，则可"视" E 为"实"的赋范线性空间. 而由定理 4 可知，存在一个 E 上的"实"有界线性泛函 R_1，使得 $\sup\limits_{x \in V} R_1(x) < R_1(x_0)$. 由此，当令

$$f_1(x) = R_1(x) - iR_1(ix), \qquad \forall x \in E$$

时，显然可知 $f_1 \in E^*$（当 E 为复空间时，f_1 即为 E 上的复有界线性泛函）；且有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{Re} f_1(x_n) &\leqslant \sup_n \operatorname{Re} f_1(x_n) \leqslant \sup_{x \in V} \operatorname{Re} f_1(x) \\ &= \sup_{x \in V} R_1(x) < R_1(x_0) = \operatorname{Re} f_1(x_0)\end{aligned}$$

（上面的结论当 E 为实空间时亦对）. 此式显然与 (1) 式矛盾. 证毕.

注 9. 必须注意，对于 E 中的非凸集，推理 1 的结论未必正确. 事实上，反例可举空间 (l^p) $(1 < p < \infty)$ 内的单位球面 Σ_1，由 $(l^p)^* = (l^q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$，而 (l^q) $(q > 1)$ 的元的第 n 个"坐标"当 $n \to \infty$ 时是趋于 0 的，从而可知零元 θ 为 Σ_1 上一元列的一个"弱"极限点，却又不属于 Σ_1.

推理 2. 设 E 为赋范线性空间，M 为任一子集；$x_0 \neq \theta$ 为 E

中任一元，那么，为了 $x_0\in\overline{\mathrm{cov}\,M}$，必须且只须，$\forall f\in E^*$，如果 $f(x)\equiv 0\ (x\in M)$，则 $f(x_0)=0$，（这里，$\overline{\mathrm{cov}M}$ 表示由 M 张成的闭凸集）.

注 10. 以上结果给出了一元 x_0 可由一元列 $\{x_n\}$ 的"凸组合"逼近的充要条件.

作为定理 1 的推理或者作为定理 4 的推理 1 的直接结果，我们还可以得到下面结论：

推理 3. 对于赋范线性空间 E 内的一个线性子空间 E_0 来说，其强闭与弱列闭是等价的.

习　　题

1．利用本节定理 2 的结果导出定理 1.

2　利用本节的定理 3 的结果导出定理2.

3．证明本节最后的推理2.

4．设 M 为实赋范线性空间 E 内的非空子集．那么，M 的闭凸包 $\overline{\mathrm{cov}M}$ 必为含 M 的所有闭的"半空间"的交（也即应有 $\overline{\mathrm{cov}M}=\bigcap\limits_{f\in E^*}\{x|\ f(x)\leqslant\sup\limits_{y\in M}f(y),\ x\in E\}$）.

5．（首先，我们把 E^* 中的集 $\mathscr{F}$ 称为正则闭的，是指 $\forall f_1\notin\mathscr{F}$ $(f_1\in E^*)$，$\exists x_1\in E$，使得 $f(x_1)=\begin{cases}1, & 当\ f=f_1\ 时;\\ 0, & 当\ f\in\mathscr{F}\ 时.\end{cases}$）试证明：

(i) $\mathscr{F}\subset E^*$ 如果为正则闭的，则它也必为 E^* 中的闭集；

(ii) 如果设 M 为 E 中任一子集，又 $\mathscr{F}_0=\{f|f(x)\equiv 0(x\in M);\ f\in E^*\}$，则 $\mathscr{F}_0$ 是正则闭的.

6．设 E 为自反空间，试证明：如果 $\mathscr{F}\subset E^*$ 是 E^* 中的一闭线性子空间，则它必为正则闭的.

7．试举一反例，说明当习题 6 中 $\mathscr{F}$ 不是"闭"的时，结论未必成立.

8．设 $x_0\in E$，$f_1\in E^*$，$\mathscr{F}\subset E^*$ 是正则闭的，且集

$M_0=\{x|f(x)\equiv f(x_0)\ (f\in\mathscr{F}),\ x\in E\}$（在 $\mathscr{F}$ 上与 x_0 "弱相等" 之元的全体），超平面

$H_1=\{x|f_1(x)=f_1(x_0),\ x\in E\}$（在 f_1 上与 x_0 "弱相等"之元的全体）

试证明：如果有 $M_0\subset H_1$，则有 $f_1\in\mathscr{F}$.

§ 3.4. 最佳逼近的存在性

作为 Hahn-Banach 定理在逼近论方面的应用，本节我们要介绍关于空间中一个集合与另一元之间的最佳近似值的存在问题以及未知数是“泛函”或“元”的无穷维线性方程组解的存在问题.

(一)

首先我们从距离空间 E 中一元 x_0 与 E 的一个“有限维”子空间 E_n 元间的最佳近似元的存在性问题谈起. 即当设 $E_n=\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n|\lambda_k\in \boldsymbol{K}(k=1,2,\cdots,n)\}$ 时（其中，e_1，e_2，$\cdots$，e_n 是 E 中的线性无关元）. 试问，是否存在一 $y_0=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^0 e_k\in E_n$，使得

$$d(x_0,y_0)=\inf_{y\in E_n} d(x_0,y)?$$

对于赋范线性空间而言. 这个问题的回答是肯定的，下面就来验证它. 首先，我们给出一个引理:

引理. 如果我们令 n 元函数 $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\|\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n\|$，那么，当 $\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|\to\infty$ 时，必有 $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\to\infty$.

证. 首先，由 §1.1 引理 2 的证明，可知 n 元连续函数 $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 在 n 维空间闭曲面 $\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|=1$ 上具有正的下界，不妨设其为 α_0，这样可导出

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|}f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|}e_k\right\|$$

$$\geqslant\alpha_0>0,\quad \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\neq 0,\forall\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\boldsymbol{K}.$$

也即

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geqslant \alpha_0 \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|, \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{K}.$$

由此显然直接可以得出引理结论. 证毕.

有了上面的引理，我们可得到下面一个关于最佳逼近存在性的命题：

定理 1. 设 E_n 为赋范线性空间 E 内的一 n 维线性子空间，那么，$\forall x_0 \in E$，$\exists y_0 \in E_n$，使 y_0 为 E_n 中对 x_0 的最佳近似元（即 $\|x_0 - y_0\| = \inf\limits_{y \in E_n} \|x_0 - y\|$）.

证. 由于当 $x_0 \in E_n$ 时定理结论已成立，所以不妨设 $x_0 \notin E_n$（由此当然必有 $x_0 \neq \theta$）. 令

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \|x_0 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n)\|,$$
$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{K},$$

于是，注意到

$$g(\lambda_1 \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geqslant \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n\| - \|x_0\|,$$

因而由上面的引理可知，对 $2\|x_0\| > 0$，$\exists r > 0$，

使得当 $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| > r$ 时，就有

$$\|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n\| > 2\|x_0\|,$$

由此有

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) > 2\|x_0\| - \|x_0\| = \|x_0\|. \tag{1}$$

另外，注意到

$$|g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) - g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)|$$
$$= \left| \left\| x_0 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| - \left\| x_0 - \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \right\| \right| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) e_k \right\|$$
$$= f(\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \cdots, \lambda_n - \mu_n),$$
$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n; \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \boldsymbol{K},$$

则由 f 是 n 元连续正齐性函数，可直接推出 $g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 也是 n 元连续函数，所以在 n 维有界闭域 $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant r$ 上必有一点

$(\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \cdots, \lambda_n^\circ)$，使得 $g(\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \cdots, \lambda_n^\circ)$ 取到该闭域上的最小值．这样当令 $y_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^\circ e_k$ 时，便可得到

$$\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - (\lambda_1^\circ e_1 + \lambda_2^\circ e_2 + \cdots + \lambda_n^\circ e_n)\|$$
$$= g(\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ, \cdots, \lambda_n^\circ) \leqslant g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$
$$\forall \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant r, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \boldsymbol{K}, \quad (2)$$

特别地有

$$\|x_0 - y_0\| \leqslant g(0, 0, \cdots, 0) = \|x_0\|.$$

最后由式(1),(2),可导出,对 E_n 中元 $y_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^\circ e_k$，有

$$\|x_0 - y_0\| \leqslant g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$
$$= \|x_0 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n)\|, \ \forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{K}.$$

即

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in E_n} \|x_0 - y\|.$$

证毕．

注 1． 定理 1 中 E_n 对于 x_0 的最佳近似元只有在某种类型的赋范线性空间中才能保证其唯一性（这将在 §3.6 详细讨论）．对于一般的赋范线性空间而言，最佳近似元则未必是唯一的．

反例． 设 $E =$ (实) $C[0,1]$，E_0 为一维闭线性子空间 $\{\alpha t | \alpha \in \boldsymbol{R}\}$；元 $x_1 = x_1(t) = 1$，$(t \in [0,1])$．那么满足 $\|x_1 - y_0\| = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\|$ 的元 $y_0 \in E_0$ 存在，但不唯一．

验． 事实上，$\forall y = \alpha t \in E_0$，由于

$$\|x_1 - y\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |1 - \alpha t| = \begin{cases} > 1, & \alpha < 0; \\ > 1, & \alpha > 2; \\ = 1, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 2. \end{cases}$$

因此，当 $y_0 \in \{\alpha t | 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\} \subset E_0$ 时，均有 $\|x_1 - y_0\| = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\| = 1$．验毕．

(二)

下面我们讨论对于一般赋范线性子空间 E_0 内，关于元 x_1 之最佳近似元的存在问题。为此我们先给出一个一般性定义.

定义. 设 E 为一距离空间，集 $G\subset E$，元 $x_1\in E$. 我们称元 $y_0\in G$ 为 G 内对 x_1 的最佳近似元，是指其满足关系式 $d(x_1, y_0)=\inf_{y\in G} d(x_1, y)$.（即 y_0 是 G 中与元 x_1 的距离最近者.）上述元 y_0 的全体我们记为 $\mathscr{A}_G(x_1)$，

$$\mathscr{A}_G(x_1)=\{y_0 \mid d(x_1, y_0)=\inf_{y\in G} d(x_1, y),\ y_0\in G\},$$

注 2. 从上面的定义不难看出，当元 $x_1\in G$ 时，有 $\mathscr{A}_G(x_1)=\{x_1\}$（单点集）；当元 $x_1\in \overline{G}\setminus G$（不在 G 上之 G 的边界点）时，则有 $\mathscr{A}_G(x_1)=\phi$（空集）. 因而，为了下面的讨论有意义，我们总是约定元 $x_1\in E\setminus\overline{G}$（即避开上述两种平凡的情况）.

定理 2. 设 E 是一赋范线性空间，E_0 为其一线性子空间，元 $x_1\in E\setminus\overline{E}_0$. 那么，对于 E_0 内的任一元 y_0，为了 $y_0\in\mathscr{A}_{E_0}(x_1)$，必须且只须存在一个泛函 $f_1\in E^*$，使得

$$\|f_1\|=1;f_1(y)=0,\ \forall y\in E_0;\ f_1(x_1-y_0)=\|x_1-y_0\|.$$

证. 1)"$\Longrightarrow$" 由设元 $y_0\in\mathscr{A}_{E_0}(x_1)\subset E_0$，而元 $x_1\in E\setminus\overline{E}_0$（参看图 3.10），故知

$$\|x_1-y_0\|=d(x_1,E_0)=\inf_{y\in E_0} d(x_1, y)>0$$

于是由上节的定理 1 我们则知 $\exists f'\in E^*$，使得

$$\|f'\|=\frac{1}{\|x_1-y_0\|};\ f'(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=x_1 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x\in E_0 \text{ 时}.\end{cases}$$

这样，我们取泛函 $f_1=\|x_1-y_0\|f'$，其即为所要求的泛函.

2)"$\Longleftarrow$" 如果泛函 $f_1\in E^*$ 满足定理条件，那么，对于这样的任意元 $y_0\in E_0$，由 f_1 的性质有

$$\begin{aligned}\|x_1-y_0\|&=|f_1(x_1-y_0)|=|f_1(x_1)-f(y_0)|=|f_1(x_1)|\\&=|f_1(x_1-y)|\leqslant\|f_1\|\cdot\|x_1-y\|\\&=\|x_1-y\|, \qquad \forall y\in E_0\end{aligned}$$

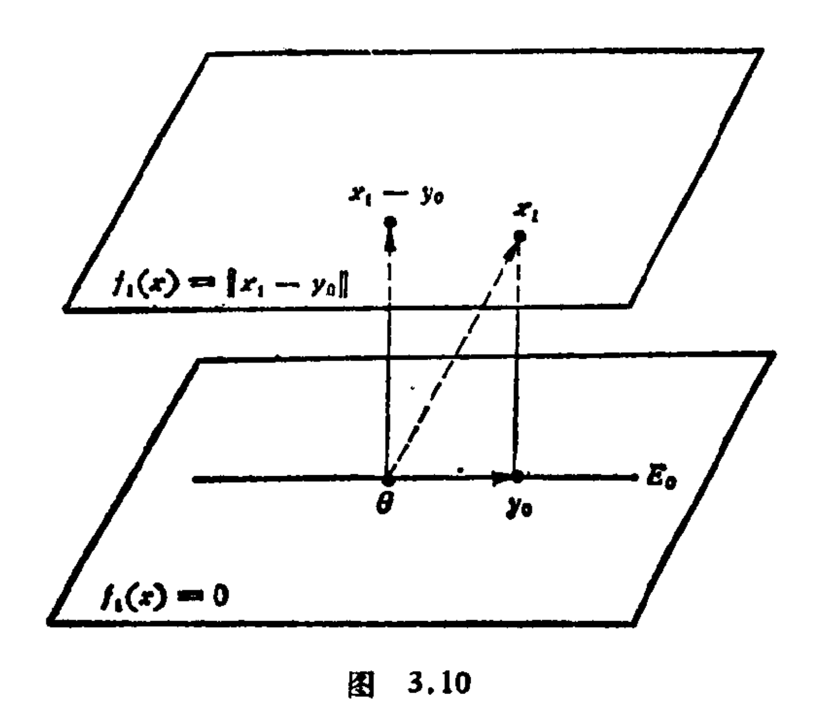


图 3.10

成立，由此导出

$$\|x_1-y_0\|=\inf_{y\in E_0}\|x_1-y\|,$$

也即 $y_0\in\mathscr{A}_{E_0}(x_1)$. 证毕.

注 3. 定理 2 的几何意义：为了元 $y_0\in\mathscr{A}_{E_0}(x_1)$，必须且只须存在一个包含着 E_0 对于闭球 $\bar{S}(x_1,\|x_1-y_0\|)$的承托闭超平面(参看图 3.11).

事实上，注意到，由定理 2 中的泛函 $f_1\in E^*$ 所成的闭超平面 $H_{f_1}=\{x|f_1(x)=0, x\in E\}$ 即为所需的，因为 (i) 由 $f_1(y)=0$,

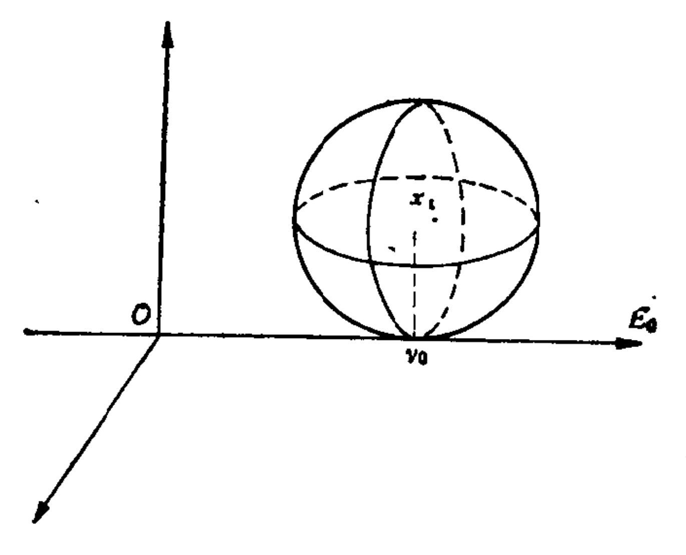


图 3.11

$\forall y \in E_0$，可知 $E_0 \subset H_{f_1}$；(ii) $\forall x \in \bar{S}(x_1, \|x_1 - y_0\|)$，由于 $\|x - x_1\| \leqslant \|x_1 - y_0\|$，注意到泛函 f_1 的三条性质，我们则有

$$f_1(x) = f_1(x_1) + f_1(x - x_1) = f_1(x_1 - y_0) + f_1(x - x_1)$$
$$\geqslant \|x_1 - y_0\| - \|f_1\|\|x - x_1\| = \|x_1 - y_0\| - \|x - x_1\| \geqslant 0,$$

也即球 $\bar{S}(x_1, \|x_1 - y_0\|)$ 在超平面 H_{f_1} 的一侧；(iii) 由元 $y_0 \in \bar{S}(x_1, \|x_1 - y_0\|)$，且 $y_0 \in E_0$，因此必有 $f_1(y_0) = 0$. 综上所述，即知 H_{f_1} 为球 $\bar{S}(x_1, \|x_1 - y_0\|)$ 的闭承托超平面.

由定理 2 我们不难导出下面的推理:

推理. E, E_0 如定理 2 所设，$x_1 \in E \backslash \bar{E}_0$ 那么，对于 E_0 内的集 M_0，为了 $M_0 \subset \mathscr{A}_{E_0}(x_1)$，必须且只须存在一泛函 $f_1 \in E^*$，使得 $\|f_1\| = 1$; $f_1(y) = 0, \forall y \in E_0$; $f_1(x_1 - y_0) = \|x_1 - y_0\|$, $\forall y_0 \in M_0$.

证. 事实上，我们只要注意到 $\mathscr{A}_{E_0}(x_1)$ 的定义则可导得 $\forall y_0', y_0'' \in \mathscr{A}_{E_0}(x_1)$，均有 $\|x_1 - y_0'\| = \|x_1 - y_0''\|$，因而，类似定理 2 的证明方法不难导出本推理的结论. 证毕

注 4. 由推理我们可知，即使线性子空间 E_0 对于元 x_1 的最佳近似元的集合 $\mathscr{A}_{E_0}(x_1)$ 不止包含一个元素，但满足定理 2 条件的相应有界线性泛函却可以是同一个.

下面我们举两个求 $\mathscr{A}_{E_0}(x_1)$ 的例子.

例 1. 从(一)段的反例中显然可以看出那里的 $\mathscr{A}_{E_0}(x_1) = \{\alpha t \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\}$.

例 2. 设 E 为一赋范线性空间，E_0 是 E 内一闭线性子空间. 由 §1.4 可知，商空间 E/E_0 亦为一赋范线性空间. 并且，对 $\forall x_1 \in E$，其在 E_0 内的最佳近似元的集合 $\mathscr{A}_{E_0}(x_1)$ 有式

$$\mathscr{A}_{E_0}(x_1) = \{y_0 \mid \|x_1 - y_0\| = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\|, y_0 \in E_0\}$$
$$= \{y_0 \mid \|x_1 - y_0\| = \|[x_1]\|, y_0 \in E_0\}.$$

特别地由 §1.4 习题 1 我们还知，当 E_0 为有限维子空间时，对于空间 E 中的任意元 x_1 均有 $\mathscr{A}_{E_0}(x_1) \neq \phi$.

(三)

下面把(二)段中 E 内的线性子空间 E_0 推广到 E 内的凸集 V

上来讨论，即讨论凸集 V 内对于元 x_1 之最佳近似元的存在问题。为此，我们先给出下面的引理：

引理．设 V 为"实"赋范线性空间 E 内的一个凸集．元 $x_1 \in E \backslash \bar{V}$ 那么，当令泛函集

$$V_1^* = \{f \mid f(x_1 - y) \geqslant 1, \quad \forall y \in V;\ f \in E^*\},$$
$$V_0^* = \{f \mid f(x_1 - y) \geqslant 0, \quad \forall y \in V;\ f \in E^*\}$$

时，我们有

$$\inf_{y \in V} \|x_1 - y\| = \max_{f \in V_1^*} \frac{1}{\|f\|} = \max_{\substack{f \in V_0^* \\ \|f\|=1}} \inf_{y \in V} f(x_1 - y).$$

证． 1）我们先证明命题的前一个等式．设

$$d = \inf_{y \in V} \|x_1 - y\|,$$

注意到 $x_1 \notin \bar{V}$ 的假设，知上述数 $d > 0$．其次，$\forall f \in V_1^*$，由 V_1^* 的定义有

$$f(x_1 - y) \geqslant 1, \quad \forall y \in V$$

从而导出

$$1 \leqslant \|f\| \cdot \|x_1 - y\|, \quad \forall y \in V$$

注意到开始的假设，又可得到

$$1 \leqslant \|f\| \cdot \inf_{y \in V} \|x_1 - y\| = \|f\| \cdot d.$$

即 $\frac{1}{\|f\|} \leqslant d$．最后，由 $f \in V_1^*$ 的任意性，由此即可导出

$$\sup_{f \in V_1^*} \frac{1}{\|f\|} \leqslant d. \tag{3}$$

其三，在 E 中以 x_1 为中心以上面数 d 为半径做球 $S(x_1, d)$（参看图 3.12），显然 $V \cap \mathring{S}(x, d) = \phi$．于是，对于凸集 V 及有内点的凸集 $S(x_1, d)$ 应用上节的 Eidelheit 定理（定理 3），可知 $\exists f' \in E^*$，使得由其所定的某一闭超平面 $H_{f'} = \{x \mid f'(x) = c', x \in E\}$ 将上两凸集分离，且有

$$f'(x) = \begin{cases} \leqslant c', & \text{当 } x \in V \text{ 时；} \\ \geqslant c', & \text{当 } x \in S(x_1, d) \text{ 时；} \\ > c', & \text{当 } x \in \mathring{S}(x_1, d) \text{ 时．} \end{cases}$$

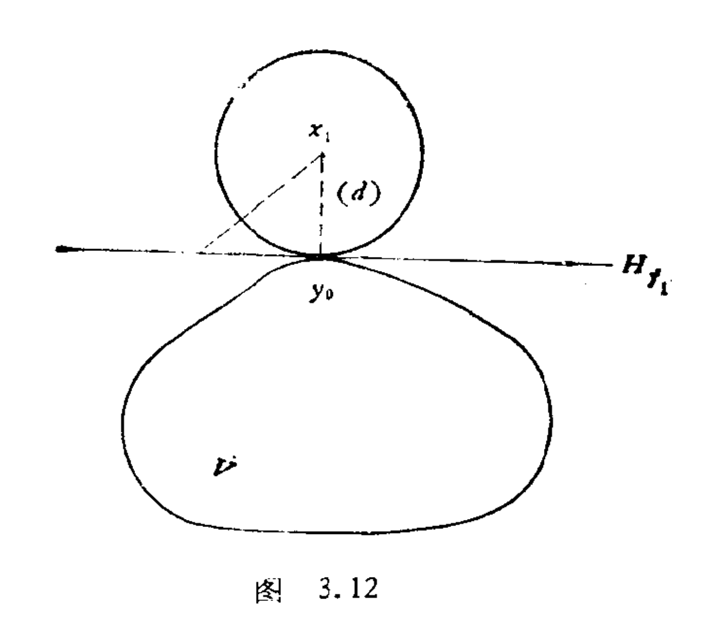


图 3.12

(参看上节注 6.)这样,我们由

$$f'(x_1-x)=f'(x_1)-f'(x)=f'(x_1)-c'>0,\qquad \forall x\in H_{f'}.$$

可得到一有界线性泛函 $f^*=\dfrac{f'}{f'(x_1)-c'}$,使得

$$H_{f'}=H_{f^*}=\{x\,|\,f^*(x_1-x)=1,\ x\in E\}$$

及

$$f^*(x_1-y)\geqslant 1,\quad \forall y\in V.$$

($f^*(x_1-x)\leqslant 1$, $\forall x\in S(x_1,d)$.)从而可知 $f^*\in V_1^*$. 根据 §2.3 关于泛函 f^* 范数 $\|f^*\|$ 的几何意义,可得到

$$\frac{1}{\|f^*\|}=\inf\{\|x\|\,|\,f^*(x)=1,\ x\in E\}.$$

注意到上面闭超平面 H_{f^*} 的定义,由上式便有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f^*\|}&=\inf\{\|x_1-x\|\,|\,x\in H_{f^*}\}\\&=d(x_1,H_{f^*}).\end{aligned}$$

最后,根据起隔离作用的闭超平面 H_{f^*} 不能包含凸集 $S(x_1,d)$ 的内点 x_1,因而 H_{f^*} 只能包含球 $S(x_1,d)$ 的边界点或者全部在球的外面,由此则有

$$\frac{1}{\|f^*\|}=d(x_1,H_{f^*})\geqslant d\tag{4}$$

由式(3)及(4)我们可导出

$$\max_{f\in V_1^*}\frac{1}{\|f\|}=d=\inf_{y\in V}\|x_1-y\|.$$

2）现在证明命题的后一个等式．假设

$$m(f)=\inf_{y\in V}f(x_1-y),\qquad \forall f\in V_1^*.$$

那么，由泛函集 V_1^* 的定义显然可知 $m(f)\geqslant 1,\forall f\in V_1^*$．由此，可导出

$$\begin{aligned}
\max_{f\in V_1^*}\frac{1}{\|f\|}&=\max\left\{\frac{1}{\|f\|}\,\Big|\,f(x_1-y)\geqslant 1,\ \forall y\in V;\ f\in E^*\right\}\\
&=\max\left\{\frac{m(f)}{\|f\|}\,\Bigg|\,\frac{f(x_1-y)}{m(f)}\geqslant 1,\ \forall y\in V;\ f\in V_1^*\right\}\\
&=\max\left\{\frac{m(f)}{\|f\|}\,\Bigg|\,\frac{f(x_1-y)}{\inf\limits_{y\in V}f(x_1-y)}\geqslant 1,\ \forall y\in V;\ f\in V_1^*\right\}\\
&=\max\left\{\frac{m(f)}{\|f\|}\,\Bigg|\,f(x_1-y)\geqslant 0,\ \forall y\in V;\ f\in E^*\right\}\\
&=\max\left\{\inf_{y\in V}\frac{f(x_1-y)}{\|f\|}\,\Bigg|\,f(x_1-y)\geqslant 0,\ \forall y\in V;\ f\in E^*\right\}\\
&=\max_{\substack{f\in V_0^*\\ \|f\|=1}}\inf_{y\in V}f(x_1-y).
\end{aligned}$$

证毕．

有了上面的引理，我们就可以导出关于凸集内最佳近似元的存在定理．

定理 3． 设 V 为“实”赋范线性空间 E 内的一个凸集，元 $x_1\in E\setminus\overline{V}$，那么，$\forall y_0\in V$，为了 $y_0\in\mathscr{A}_V(x_1)$，必须且只须 $\exists f_1\in E^*$，使得

$$\|f_1\|=1;\ f_1(y_0-y)\geqslant 0,\ \forall y\in V;\ f_1(x_1-y_0)=\|x_1-y_0\|.$$

证．1）“$\Longrightarrow$” 由上面引理中等式的前后两端我们可知 $\exists f_1\in E^*$，满足 $\|f_1\|=1$ 和 $f_1(x_1-y)\geqslant 0$，$\forall y\in V$，并且使该式的后端取到最大值．即（注意到 $y_0\in\mathscr{A}_V(x_1)$ 的假设）

$$\begin{aligned}
\|x_1-y_0\|&=\inf_{y\in V}\|x_1-y\|=\inf_{y\in V}f_1(x_1-y)\leqslant f_1(x_1-y_0)\\
&\leqslant\|f_1\|\|x_1-y_0\|=\|x_1-y_0\|,
\end{aligned}\tag{5}$$

便导出

$$f_1(x_1 - y_0) = \|x_1 - y_0\|.$$

此外，注意到 f_1 的性质，当我们令泛函 $f^* = \dfrac{f_1}{\|x_1 - y_0\|}$ 时（由于 $x_1 \notin \bar{V}$，故 $\|x_1 - y_0\| > 0$）由式(5)可得到

$$f^*(x_1 - y) = \frac{f_1(x_1 - y)}{\|x_1 - y_0\|} \geqslant \frac{\inf\limits_{y \in V} f_1(x_1 - y)}{\|x_1 - y_0\|} = \frac{\|x_1 - y_0\|}{\|x_1 - y_0\|} = 1,$$
$$\forall y \in V.$$

因而有

$$f^*(y_0 - y) = f^*(x_1 - y) - f^*(x_1 - y_0) \geqslant 1 - \frac{f_1(x_1 - y_0)}{\|x_1 - y_0\|}$$
$$= 1 - 1 = 0, \qquad \forall y \in V.$$

也即导出

$$f_1(y_0 - y) \geqslant 0, \qquad \forall y \in V.$$

综合 f_1 的三条性质便证得定理的必要性.

2）“$\Longleftarrow$” 这时，由泛函 $f_1 \in E^*$ 的假设可导得

$$\|x_1 - y_0\| = f_1(x_1 - y_0) \leqslant f_1(x_1 - y_0) + f_1(y_0 - y) = f_1(x_1 - y)$$
$$\leqslant \|f_1\| \cdot \|x_1 - y\| = \|x_1 - y\|, \qquad \forall y \in V$$

即

$$\|x_1 - y_0\| = \inf_{y \in V} \|x_1 - y\|$$

由此得到元 $y_0 \in \mathscr{A}_V(x_1)$. 证毕.

注 5. 定理 3 的几何意义：为了元 $y_0 \in \mathscr{A}_V(x_1)$，必须且只须存在一个闭超平面，将凸集 V 与闭球 $\bar{S}(x_1, \|x_1 - y_0\|)$ 相隔离，并且其为此闭球的承托超平面(此结论的说明请读者完成).

与定理 2 一样，我们也可以得到下面的推理(它同样说明：即使凸集 V 对于元 x_1 的最佳近似元的集合 $\mathscr{A}_V(x_1)$ 不止包含一个元素，但满足上面定理 3 条件的相应有界线性泛函也能够是同一个)：

推理. E, V 如定理 3 所设，$x_1 \in E \backslash \bar{V}$. 那么，对于 V 内的集 M_0，为了 $M_0 \subset \mathscr{A}_V(x_1)$，必须且只须 $\exists f_1 \in E^*$，使得

$$\|f_1\| = 1;\ f_1(y_0 - y) \geqslant 0, \qquad \forall y \in V,\ y_0 \in M_0;$$
$$f_1(x_1 - y_0) = \|x_1 - y_0\|, \qquad \forall y_0 \in M_0$$

(证明留给读者完成).

注 6. 上面的命题并不难推广到复的赋范线性空间中去，这时只要把相应的命题中的关系式 $f_1(y_0 - y) \geqslant 0$，$f_1(x_1 - y_0) = \|x_1 - y_0\|$ 换为 $\mathrm{Re} f_1(y_0 - y) \geqslant 0$ 与 $\mathrm{Re}\, f_1(x_1 - y_0) = \|x_1 - y_0\|$ 就可以了. 这些我们都不详细讨论了，有兴趣的读者可以参阅文献 [47, 156] 等.

注 7. 在本段以及上面(二)中，我们只考虑了最佳近似元的存在性问题. 当然，我们也可以提出它们的唯一性等深入的问题. 这里也不详细介绍，有兴趣的读者可以参看文献 [54], [127] 及 [139].

(四)

最后，我们讨论关于未知数是“泛函”或“元”的无穷维线性方程的解的存在问题（亦有称为“矩量问题”），在 §2.3 的定理 3 中，我们曾通过泛函的范数定义介绍过一个最简单的例子. 下面我们将利用 Hahn-Banach 定理及其推论来解决几个较复杂的问题.

定理 4 (Riesz-Helly-Hahn 定理). 设 E 为一赋范线性空间，$\{x_\iota \mid \iota \in I\} \subset E$，$\{\lambda_\iota \mid \iota \in I\} \subset \mathbf{C}$，$\beta$ 为某一正数，那么，为了存在一泛函 $f \in E^*$，使其满足条件

(i) $f(x_\iota) = \lambda_\iota,\ \forall \iota \in I$;　(ii) $\|f\| \leqslant \beta$,

必须且只须对于任意 n 个“下标”集 $(\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_n) \subset I$ 及 n 个复数 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，均成立关系式

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_{\iota_k} \right| \leqslant \beta \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{\iota_k} \right\|.$$

证. 1) “$\Longrightarrow$” 由假设条件 (i),(ii)，可导出

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_{\iota_k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(x_{\iota_k}) \right| = \left| f\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{\iota_k} \right) \right|$$

$$\leqslant \|f\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{lk} \right\| \leqslant \beta \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{lk} \right\|.$$

2) "$\Longleftarrow$" 设 $\{x_l^\circ \mid \iota \in I_0\}$ 为 $\{x_l \mid \iota \in I\}$ 内的线性无关元，并设其张成的线性子空间为 E_0. 那么，我们显然可知，$\{x_l \mid \iota \in I\} \subset E_0$. 并且，$\forall y \in E_0$，由 y 必为集 $\{x_l^\circ \mid \iota \in I_0\}$ 中某有限个元的线性组合，而该集中任意有限个元均是线性无关的，因而 y 的表示法是唯一的. 如果在 E_0 上定义泛函 f_0，

$$f_0(y) = f_0\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{lk}^\circ\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\ \lambda_{l\,k}^\circ,\ \forall y = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{l\,k}^\circ \in E_0.$$

那么，f_0 显然是分配泛函，并且注意到定理的假设条件还知，f_0 是 E_0 上的有界线性泛函. 这样，直接利用 §3.1 中有界线性泛函的保范延拓定理，我们就可导出定理所需的条件 (i),(ii). 证毕.

注 8. 作为定理 4 的应用，我们可以(在理论上)解决下面关于 Fourier 展开系数的问题：对任给定的两数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，在什么条件下，能够保证存在一个 $[0, 2\pi]$ 上的"有界可测"函数 $x(t)$，使得其相应 Fourier 系数为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos nt\,dt = \alpha_n,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin nt\,dt = \beta_n(n = 1, 2, \cdots)?$$

此结论请读者完成.

作为上面定理在"实"空间的某种推广，我们给出下面的命题(它是由 Mazur 和 Orlicz 得到的，我们下面用的是 Ptàk 的简单证明方法)[122].

定理 5 (Mazur-Orlicz 定理). 设 E 为一"实"线性空间，$p(x)$ 为 E 上一个次加正齐性泛函，$\{x_l \mid \iota \in I\}$ 为 E 内某一元素集，$\{\mu_l \mid \iota \in I\}$ 为一相应的实数集. 那么，为了存在一个 E 上的分配泛函 f，使其满足条件：

(i) $f(x_l) \geqslant \mu_l,\ \forall \iota \in I$;

(ii) $f(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in E$,

必须且只须对于任意 n 个"下标"集 $(\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_n) \subset I$ 及 n 个"非负"实数 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，均成立关系式

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \mu_{\iota k} \leqslant p\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota k}\right).$$

证. 定理的必要性是明显的. 下面证明定理的充分性. 首先,我们做一辅助泛函 (Ptàk 证明的技巧就在于此)

$$p^*(x) = \inf\left\{\left[p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mu_{\iota_k}\right] \middle| (\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_n) \subset I,\right.$$

$$\left.\eta_k \geqslant 0 (k = 1, 2, \cdots, n); n = 1, 2, \cdots\right\},$$

$$\forall x \in E.$$

下面证明 $p^*(x)$ 具有以下三个性质:

1) $p^*(x)$ 在 E 上不取 $-\infty$, 事实上, 由定理后面的假设条件及 $p(x)$ 的次加性, 可导得, $\forall (\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_n) \subset I$, $\eta_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 均有

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \mu_{\iota k} \leqslant p\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota_k}\right) \leqslant p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota_k} - x\right)$$

$$\leqslant p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota_k}\right) + p(-x), \qquad \forall x \in E.$$

由此可导出

$$-p(-x) \leqslant p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mu_{\iota_k}, \quad \forall x \in E.$$

也即

$$p^*(x) \geqslant -p(-x) > -\infty, \qquad \forall x \in E.$$

2) $p^*(x)$ 是次加泛函. 只要注意到 $p^*(x)$ 的定义以及 $p(x)$ 的次加性假设便可导出, $\forall (\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_n) \subset I$, $\eta_k \geqslant 0$; $(\iota_1', \iota_2', \cdots, \iota_n') \subset I$, $\eta_k' \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. 均有

$$p^*(x + x') \leqslant p\left(x + x' + \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota k} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k' x_{\iota' k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mu_{\iota k}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \eta_k' \mu_{\iota' k} \leqslant \left[p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_{\iota k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mu_{\iota k}\right]$$

$$+\left[p\left(x'+\sum_{k=1}^{n}\eta'_k x_{\iota' k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\eta'_k\mu_{\iota' k}\right],$$

$$\forall x,\ x'\in E.$$

即

$$p^*(x+x')\leqslant p^*(x)+p^*(x'),\qquad \forall x,\ x'\in E.$$

3) $p^*(x)$ 是正齐性泛函. 这是明显的. 其次, 当 $p^*(x)\equiv 0\ (x\in E)$ 时, 必有原所设的实数集 $\{\mu_\iota|\iota\in I\}$ 均由非正数组成. 反之,如果有 $\mu_{\iota_0}>0$, 则由定理的假设可知

$$p\left(x_{\iota_0}+\sum_{k=1}^{n}\eta_k x_{\iota k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mu_{\iota k}$$

$$\geqslant\left(\mu_{\iota_0}+\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mu_{\iota k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mu_{\iota k}=\mu_{\iota_0}>0,$$

$$\forall(\iota_1,\iota_2,\cdots,\iota_n)\subset I,$$

$$\eta_k\geqslant 0\quad(k=1,2,\cdots,n,n=1,2,\cdots)$$

因而由 $p^*(x)$ 的定义可导出, $p^*(x_{\iota_0})\geqslant\mu_{\iota_0}>0$ 与 $p^*(x)$ 为零泛函矛盾. 于是,由泛函 $p^*(x)$ 的定义可得出(当在该定义中取系数 $\eta_k=0(k=1,2,\cdots,n)$)

$$p(x)\geqslant p^*(x)=0,\quad \forall x\in E.$$

故此时只要取 $f=0$ (零泛函) 就可满足定理条件 (i), (ii), 从而充分性在这种情况下证得.

最后,如果 $p^*(x)\not\equiv 0\ (x\in E)$ 则知, $\exists x_0\in E$, 使得 $p^*(x_0)\neq 0$. 这时,我们在 E 的子空间 $E_0=\{\alpha x_0|\alpha\in R\}$ 上定义一个分配泛函

$$f_0(x)=f_0(\alpha x_0)=\alpha p^*(x_0),\quad \forall x=\alpha x_0\in E_0.$$

显然易见, $f_0(x)\leqslant p^*(x)$, $\forall x\in E_0$. 故由 Hahn-Banach 定理,可得定义在 E 上的一个 f_0 的控制延拓分配泛函 $f(x)$, 其满足条件

$$f(x)\leqslant p^*(x)\leqslant p(x),\quad \forall x\in E$$

和

$$f(-x_\iota)\leqslant p^*(-x_\iota)\leqslant p(-x_\iota+x_\iota)-\mu_\iota=-\mu_\iota.$$

即

$$f(x_i) \geq \mu_i, \quad \forall i \in I.$$

从而在此情况下,充分性也可证得. 证毕.

下面,我们讨论未知数是空间"元素"的无穷线性方程组的对偶问题. 一般说来,当空间不是自反空间时,解是不存在的. 这方面最好的结果由 Helly 给出(我们采用 Mimura, Y 的证明方法)[68].

定理 6 (Helly 定理). 设 E 为一赋范线性空间, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 E 上某 n 个有界线性泛函, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为某 n 个复数, β 为某一正数. 那么, 对于任意正数 ε, 为了存在一元 $x_\varepsilon \in E$, 使其满足条件

(i) $f_k(x_\varepsilon) = \lambda_k (k = 1, 2, \cdots, n)$; (ii) $\|x_\varepsilon\| \leq \beta + \varepsilon$,

必须且只须对于任意 n 个复数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 均成立关系式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k\right| \leq \beta \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\right\|.$$

证. 1) "$\Longrightarrow$" 从定理假设条件 (i), (ii), 显然可以导出 $\forall \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in \boldsymbol{C}$ 及 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in E$, 使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot f_k(x_\varepsilon)\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\right)(x_\varepsilon)\right|$$

$$\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\right\| \|x_\varepsilon\| \leq (\beta + \varepsilon) \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\right\|,$$

由此(注意到 ε 的任意性)则可导出

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k\right| \leq \beta \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\right\|.$$

2) "$\Longleftarrow$" 首先, 我们不妨设 f_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 线性无关(因为, 当其前 n_0 个线性无关, 而后 $f_{n_0+1}, f_{n_0+2}, \cdots, f_n$ 均为其线性组合时, 我们只要对泛函 f_k $(k = 1, 2, \cdots, n_0)$ 推出上面定理条件 (i), (ii), 则后 $(n - n_0)$ 个必然也是满足的, 因而只要对 f_k $(k = 1, 2, \cdots, n_0)$ 来讨论就可以了).

其次,我们考虑从空间 E 到 n 维复欧氏空间 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个映象 T,

$$x \to y = \mathrm{T}(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)), \quad \forall x \in E. \quad (6)$$

不难看出, T 是将 E 映射到"整个"空间 $\boldsymbol{C}^n$ 上的分配算子, 事实上,

分配性是很显然的，并且，如果 $\mathrm{T}(x)$ 的值域 $\mathscr{W}(\mathrm{T})$ 构成了 $\boldsymbol{C}^n$ 上的一个 m 维 $(m<n)$ 子空间的话，那么，由代数知识可知必有 n 个不同时为 0 的复数 $\alpha_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，使其恒有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\right)(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot f_k(x)=0,\qquad \forall x\in E.$$

从而导出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k f_k=0$ （零泛函）. 与 $f_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 之间是线性无关的假设矛盾.

其三，我们证明当 ε 为任意正数时，对于 E 中的"原心球" $S_{\beta+\varepsilon}=S(\theta,\beta+\varepsilon)$ 而言，$\mathrm{T}(S_{\beta+\varepsilon})$ 必定包含着 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个"原心球"，事实上，从 $\mathrm{T}(E)=\boldsymbol{C}^n$，因此，我们可以取出 E 中的 n 个元(必为非零元) $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使其满足

$$\mathrm{T}(x_k)=(0,\cdots,0,\underset{(k\text{位})}{1},0,\cdots,0)\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

这样，当复数 δ 满足条件 $|\delta|<\dfrac{\beta+\varepsilon}{n}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\dfrac{1}{\|x_k\|}\right)$ 时，由于

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\delta x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\delta|\,\|x_k\|<\beta+\varepsilon.$$

故知均有元 $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta x_k\in S_{\beta+\varepsilon}$，从而可知 $\boldsymbol{C}^n$ 中的相应元

$$\begin{aligned}(\delta,\delta,\cdots,\delta)&=\sum_{k=1}^{n}\delta\ (0,\cdots,0,\underset{(k\text{位})}{1},0,\cdots,0)\\&=\sum_{k=1}^{n}\delta\mathrm{T}(x_k)=\mathrm{T}\left(\sum_{k=1}^{n}\delta x_k\right)\in\mathrm{T}(S_{\beta+\varepsilon}).\end{aligned}$$

此即说明 $\mathrm{T}(S_{\beta+\varepsilon})$ 包含着 $\boldsymbol{C}^n$ 内以原点为中心，以 $2|\delta|$. 为长的"n 维（开）方体"，从而当然也必含有 n 维复欧氏空间 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个"原心球".

最后，我们用归谬法来推出结论. 反之，如果原命题的结论不对，那么，必存在某一正数 ε_0，使 E 中不存在满足定理条件 (i)，(ii) 的元 x_{ε_0}. 此即 $\boldsymbol{C}^n$ 中的点 $b=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\overline{\in}\mathrm{T}(\bar{S}_{\beta+\varepsilon_0})$. 注意到 $\{b\}$ 与 $\mathrm{T}(\bar{S}_{\beta+\varepsilon_0})$ 为两不交凸集，由上段结论还知，

$T^\circ(\bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}) \neq \phi$. 这样，当把 $\boldsymbol{C}^n$ 视为"实" n 维线性空间时，则由上节的 Eidelheit 定理并注意到 $\theta \in T^\circ(\bar{S}_{\beta+\varepsilon_0})$，（我们亦用 θ 表示 $\boldsymbol{C}^n$ 中的"零元"）便可得到 E 上的一"实"有界线性泛函 $g(x)$，使得

$$g(y) \leqslant g(b), \ \forall y \in T(\bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}), \ 0 = g(\theta) < g(b). \tag{7}$$

令泛函

$$f(y) = g(y) + ig(iy), \qquad \forall y \in \boldsymbol{C}^n.$$

显然 $f \in (\boldsymbol{C}^n)^*$，并且式(7)为

$$\mathrm{Re} f(y) \leqslant \mathrm{Re} f(b) (>0), \qquad \forall y \in T(\bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}).$$

由 §2.3 中关于 $(\boldsymbol{C}^n)^* = \boldsymbol{C}^n$ 的结论，必存在不均为 0 的 n 个复数 $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$，使得

$$f(y) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k, \qquad \forall y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{C}^n.$$

由式(6)中的元 y 以及上面元 b 的假设，可得到

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot f_k(x)\right] \leqslant \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k\right] (>0), \quad \forall x \in \bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}.$$

注意到 $\bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}$ 是球域，f_k 均为线性泛函 $(k = 1, 2, \cdots, n)$，故由复数的特点及以上论述可得到

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k\right| (>0), \qquad \forall x \in \bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}.$$

即

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k\right)(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k\right|, \qquad \forall x \in \bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}.$$

最后，由泛函范数的定义

$$\sup_{x \in \bar{S}_{\beta+\varepsilon_0}} \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k\right)(x)\right| = (\beta + \varepsilon_0) \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k\right\|,$$

可得到

$$(\beta + \varepsilon_0) \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k\right\| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k\right|.$$

由于 $f_k \ (k = 1, 2, \cdots, n)$ 线性无关，因此 $\left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k\right\| \neq 0$，从而上式可导出

$$\beta \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k \right\| < \left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k \right|.$$

此显然与定理假设矛盾．证毕．

注 9. 上述定理 6 中方程组的解一般说来是不唯一的，事实上，只要当空间 E 的维数比 n 大时，由在大于 n 维的线性空间中，n 个齐次方程组

$$f_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

必有一个非零解，可说明本结论．

习　　题

1．试证明本节注 2．

2．讨论本节定理 2，当 E_0 为 E 中一"线性簇"的情况时的相应命题．

3．试验证本节注 5．

4．试验证本节定理 3 之推理．

5．回答注 8 中关于 Fourier 展开系数的问题．

6．试验证本节注 9．

7．试证明：对任意的元 $\tilde{x}_0 \in E^{**}$，泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in E^*$ 及任意的正数 ε，必存在一元 $x_\varepsilon \in E$，使其满足条件

$$\|x_\varepsilon\| \leqslant \|\tilde{x}_0\| + \varepsilon$$

及

$$f_k(x_\varepsilon) = \tilde{x}_0(f_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

§ 3.5. 自反空间的一些特性

借助于前面的 Hahn-Banach 定理及其推理，我们可以对于自反空间作某些深入的讨论。首先，作为 §2.4 的补充，我们可以得到关于赋范线性空间 E 与其二次共轭空间 E^{**} 有关的一个定理．

定理 1. 设 E 是一赋范线性空间，那么 E 必在"自然映象"下等价于 E^{**} 的一个线性子空间（常记为 $E \subset E^{**}$）；而且，如果 E 是完备的，那么，E 必等价于 E^{**} 中的一个闭线性子空间．

证． $\forall x \in E$，定义 E^* 上的一个泛函 $\tilde{x}$ 为

$$\tilde{x}(f) = f(x), \qquad \forall f \in E^*.$$

易见，

$$\tilde{x}(\alpha f) = (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \tilde{x}(f), \ \forall \alpha \in \boldsymbol{K}, f \in E^*.$$

$$\tilde{x}(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \tilde{x}(f) + \tilde{x}(g), \quad \forall f, \ g \in E^*$$

及

$$|\tilde{x}(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\| \|f\|, \qquad \forall f \in E^*.$$

从而知 $\tilde{x} \in E^{**}$，且有

$$\|\tilde{x}\| \leqslant \|x\|.$$

记上面从 E 到 E^{**} 内的映象 $x \longmapsto \tilde{x}$ 为 φ，下面我们来证明 φ 即为所求的"等价"映象.

1) φ 是一对一的映象. 事实上，如果 $\tilde{x}, \tilde{y} \in E^{**}$，使得

$$\tilde{x}(f) = \tilde{y}(f), \qquad \forall f \in E^*,$$

那么，由 φ 的定义 $\exists x, y \in E$，使得 $\tilde{x}(f) = f(x)$，$\tilde{y}(f) = f(y)$，得到 $f(x) = f(y)$，$\forall f \in E^*$.
因而由 §3.1 中的 Hahn-Banach 定理的推理立即导出 $x = y$.

2) φ 是分配的映象. 事实上，我们有

$$\widetilde{x + y}(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \tilde{x}(f) + \tilde{y}(f);$$

$$\widetilde{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \tilde{x}(f) = (\alpha \tilde{x})(f), \qquad \forall f \in E^*.$$

3) φ 是保范的. 实际上，由前面 φ 的定义，已经得到

$$\|\varphi(x)\| = \|\tilde{x}\| \leqslant \|x\|, \qquad \forall x \in E.$$

注意到 §3.1 的 Hahn-Banach 定理我们可知 $\forall x \in E$，$\exists f' \in E^*$，使得 $\|f'\| = 1$，且 $f'(x) = \|x\|$. 因而又可得到

$$\|\varphi(x)\| = \|\tilde{x}\| = \sup_{\|f\|=1} |\tilde{x}(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geqslant f'(x)$$

$$= \|x\|, \qquad \forall x \in E.$$

即证得 φ 是一等价映象. 这样，空间 E 必定与 E^{**} 内的一个线性子空间等价. 也即得出 $E \subset E^{**}$. 从而证得定理的前半段命题.

下面，证明定理的后半段命题. 为此，我们只要证明，当 E 是 Banach 空间时在 φ 的作用下，E 的映象 $\varphi(E)$ 在 E^{**} 内是闭集就可以了. 今设 $\{\tilde{x}_n\} \subset \varphi(E)$，且有 $\tilde{x}_n \to X_0 \in E^{**}$ $(n \to \infty)$. 那

么，由 φ 是一对一的保范映象，故 $\exists\{x_n\}\subset E$，使得 $\varphi(x_n)=\tilde{x}_n$ $(n=1,2,\cdots)$，并有

$$\|x_n-x_m\|=\|\varphi(x_n)-\varphi(x_m)\|=\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|\to 0 \quad (n,m\to\infty).$$

由此可知 $\{x_n\}$ 是 E 中的一 Cauchy 列，由 E 的完备性可得一元 $x_0\in E$，使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 再一次利用 φ 的保范性，我们还有

$$\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_0\|=\|\varphi(x_n)-\varphi(x_0)\|=\|x_n-x_0\|\to 0 \ (n\to\infty).$$

最后，由元列收敛的一意性可导出 $X_0=\tilde{x}_0=\varphi(x_0)\in\varphi(E)$，即 $\varphi(E)$ 在 E^{**} 中是闭的. 证毕.

同样，作为 §2.4 的补充，由上面的定理，可以得到关于共轭算子的一个推理.

推理. 设 T 为赋范空间 E 到 E_1 内的有界线性算子，T^* 为其共轭算子. 那么，必有 $\|\mathrm{T}^*\|=\|\mathrm{T}\|$.

证. 首先，由 §2.4 的定理 1，已知此时 T^* 必为 E_1^* 到 E^* 内的有界线性算子，并有

$$\|\mathrm{T}^*\|\leqslant\|\mathrm{T}\| \tag{1}$$

这样，当与原来的 T 一样讨论 T^* 时，由有界线性算子 T^* 又可导出一个由 E^{**} 到 E_1^{**} 内的有界线性算子 T^{**} (即 T^* 的共轭算子)，并且类似地还有

$$\|\mathrm{T}^{**}\|=\|(\mathrm{T}^*)^*\|\leqslant\|\mathrm{T}^*\|. \tag{2}$$

其次，由算子 T^{**} 的定义，可知 $\forall X\in E^{**}$. 均有

$$[\mathrm{T}^{**}(X)](g)=X[\mathrm{T}^*(g)], \qquad \forall g\in E_1^*.$$

根据定理 1 关于 $E\subset E^{**}$ 的结论，$\forall x\in E$，可由上式导出

$$\begin{aligned}[\mathrm{T}^{**}(\tilde{x})](g)&=\tilde{x}[\mathrm{T}^*(g)]=[\mathrm{T}^*(g)](x)\\&=g[\mathrm{T}(x)], \qquad \forall g\in E_1^*.\end{aligned}$$

同样，注意到 $E_1\subset E_1^{**}$，由以上的讨论，可得到

$$\|\mathrm{T}^{**}(\tilde{x})\|=\|\mathrm{T}(x)\|, \qquad \forall x\in E.$$

由 $\|\tilde{x}\|=\|x\|$，$\forall x\in E$ 及上式，可导出

$$\|\mathrm{T}\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\mathrm{T}(x)\|=\sup_{\|\tilde{x}\|\leqslant 1}\|\mathrm{T}^{**}(\tilde{x})\|\leqslant\sup_{\substack{\|X\|\leqslant 1\\ X\in E^{**}}}\|\mathrm{T}^{**}(X)\|$$

$$= \|T^{**}\|. \tag{3}$$

最后,综合式(3),(2),(1)立即得出 $\|T\| = \|T^*\|$. 证毕.

注 1. 从定理证明中不难看出,T^{**} 可以视为空间 E 上的算子 T 在 E^{**} 上的保范延拓算子.

下面，我们给出一个关于自反空间的闭线性子空间的特性的定理.

定理 2 (Pettis) 如果空间 E 是自反的,那么,E 的任意闭线性子空间 E_0 也必是自反的.

证. 下面我们分三步来证明:

1) $\forall f \in E^*$, 由于 $E_0 \subset E$, 故知将 f 限制于 E_0 上时,其可视为 E_0 上的有界线性泛函. 记为 f_0. 于是，变换 $f \to f_0$ 就决定了一个 $E^* \to E_0^*$ 的分配算子 T,

$$T(f) = f_0 \in E_0^*, \qquad \forall f \in E^*.$$

且由于

$$\|T(f)\| = \|f_0\| = \sup_{\substack{\|y\| \leqslant 1 \\ y \in E_0 \subset E}} |f_0(y)| \leqslant \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in E}} |f(x)| = \|f\|, \ \forall f \in E^*.$$

故知 T 是定义在 E^* 上的有界算子.

2) 由上面 T 的性质则知, T^* 必为从 E_0^{**} 变到 E^{**} 内的有界线性算子，并由 E 为自反空间的假设，我们有 $\forall \tilde{y}_0 \in E_0^{**}$, $\exists x_{\tilde{y}}^0 \in E$, 使得

$$[T^*(\tilde{y}_0)](f) = f(x_{\tilde{y}}^0).$$

根据 1) 的结果,可得

$$f(x_{\tilde{y}}^0) = [T^*(\tilde{y}_0)](f) = \tilde{y}_0[T(f)] = \tilde{y}_0(f_0), \forall f \in E^*, \tilde{y}_0 \in E_0^{**}.$$

此外,注意到, $\forall f_0 \in E_0^*$, 由 Hahn-Banach 定理可知,其必存在一保范延拓的泛函 $f \in E^*$, 因而有 $T(f) = f_0$. 这样,结合上面的关系式,我们可导出

$$\tilde{y}_0(f_0) = f(x_{\tilde{y}}^0), \qquad \forall f_0 \in E_0^*, \ \tilde{y}_0 \in E_0^{**}.$$

3) 为了证明 E_0 的自反性，我们只需证明上述元 $x_{\tilde{y}}^0 \in E_0$ 就可以了 (因为这时由 E_0 的自反性即可得到). 下面我们用归谬法来证明. 如果在 2) 的关系式中存在一元 $x_{\tilde{y}_0} \notin E_0$, 那么，由 §3.3

隔离性定理(§3.3 定理 1),可导出一泛函 $f_1 \in E^*$,其满足

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = x_y^0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \in E_0 \text{ 时.} \end{cases}$$

于是,泛函 $f_0^{(1)} = T(f_1) = 0$(零泛函),将此结果代入 2) 所得关系式中去,可导出

$$0 = \tilde{y}_0(f_0^{(1)}) = f_1(x_y^0) = 1,$$

此结论与假设矛盾. 证毕.

下面,为了引出描述自反空间特征的另一重要定理,我们首先给出两个引理(引理本身也都是非常重要的):

引理 1 (Banach 定理). 设 E 为一赋范线性空间,那么,当 E^* 为可分空间时,E 也必为可分空间.

证. 由假设 E^* 可分,即有非零泛函列 $\{f_n\}$ 稠于 E^*,那么,显然有 $\left\{\frac{f_n}{\|f_n\|}\right\}$ 稠于 E^* 的单位球面 Σ_1^*(事实上,如果对 $f_0 \in \Sigma_1^*$,有 $f_{n_k} \to f_0\ (k \to \infty)$,那么,由 $\|f_{n_k}\| \to \|f_0\| = 1$,导出 $\frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|} \to \frac{f_0}{\|f_0\|} = f_0\ (k \to \infty)$).我们简记 $f_n^{(1)} = \frac{f_n}{\|f_n\|}\ (n = 1, 2, \cdots)$. 注意到范数 $\|f_n^{(1)}\| = 1\ (n = 1, 2, \cdots)$ 便可选出元列 $\{x_n\} \subset E$,使得

$$\|x_n\| = 1, \ |f_n^{(1)}(x_n)| > \frac{1}{2} \ (n = 1, 2, \cdots).$$

我们令

$$E_0 = \overline{[\{x_n\}]}.$$

(即由 $\{x_n\}$ 所张成的闭线性子空间.) 下面证明 $E_0 = E$.

事实上,如果以上结论不对,那么,由 $E_0 \subsetneqq E$ 及 §3.3 隔离性定理知 $\exists f_1 \in E^*$,使得

$$\|f_1\| = 1, \ f_1(x) = 0, \quad \forall x \in E_0.$$

因而,当令泛函 $f_n' = f_n^{(1)} - f_1\ (n = 1, 2, \cdots)$ 时,一致地有

$$\|f_n'\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_n'(x)| \geqslant |f_n'(x_n)| = |f_n^{(1)}(x_n) - f_1(x_n)|$$

$$= |f_n^{(1)}(x_n)| > \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

此显然与 $\{f_n^{(1)}\}$ 在 E^* 的单位球面 Σ_1^* 稠密的性质矛盾. 证毕.

注 2. 由引理 1, 我们用推理的方法可以再次推出数列空间 (l^1), 函数空间 $L^1[a,b]$ 和 $C[a,b]$ 均不是自反的(空间).

事实上,如果注 2 中结论不真, 那么,由空间 (l^1), $L^1[a,b]$, $C[a,b]$ 的自反性,可得到

$$(l^1)=(l^1)^{**}=(m)^*;\quad L^1[a,b]=(L^1[a,b])^{**}=(M[a,b])^*;$$

$$C[a,b]=(C[a,b])^{**}=(V[a,b])^*.$$

因而由引理 1 结果及(m)的共轭空间(l^1)的可分性,空间 $L^1[a,b]$, $C[a,b]$ 的可分性, 可导出空间 (m), $M[a,b]$, $V[a,b]$ 的可分性,故矛盾.

注 3. 从注 2 中可看出引理 1 的逆命题显然是不成立的. 即一般说来,从空间 E 的可分性未必可以得到空间 E^* 的可分性. 因此,在记忆和使用该命题时切不可颠倒.

注 4. 引理 1 证明中从 E^* 的可分性构造出 E 的可数集的方法是非常有用的,必须好好掌握它.

下面在引出第二个引理之前还必须给出两个定义.

定义 1. 设 E 为一赋范线性空间, 我们称 E^* 中的泛函列 $\{f_n\}$ 是*弱收敛于 f_0 的,是指

$$f_n(x)\to f_0(x)\ (n\to\infty);\quad \forall x\in E.$$

我们称 E^* 中的集 $\mathscr{F}$ 为*弱完备的, 是指对于在 $\mathscr{F}$ 中的任一"*弱 Cauchy 列"(即 $\{f_n\}\subset\mathscr{F}$ 满足 $f_n(x)-f_m(x)\to 0$ $(n,m\to\infty)$; $\forall x\in E$) 均必存在 E^* 中一"*弱"收敛元 f_0 (如 $f_0\in\mathscr{F}$,则称 $\mathscr{F}$ 为*弱自完备集). 我们称 E^* 中集 $\mathscr{F}$ 为*弱列紧的是指 $\forall\{f_n\}\subset\mathscr{F}$, 必可从其内选出一*弱收敛的子列 $\{f_{n_k}\}$ (如果该*弱收敛元 $f_0\in\mathscr{F}$,则 $\mathscr{F}$ 称为*弱自列紧的). 类似地可以导出*弱稠,*弱可分等概念.

定义 2. 当把 E^* 本身视为一 Banach 空间时, 同样可以导出空间 E^* 上的弱收敛、弱完备、弱列紧、弱自列紧等概念. 例如, $\mathscr{F}\subset E^*$ 是"弱自列紧"的,即是说 $\forall\{f_n\}\subset\mathscr{F}$, 必可从其内选出一

弱收敛于$\mathscr{F}$内元f_0的子列$\{f_{n_k}\}$(即成立关系式$\tilde{x}(f_{n_k})\to\tilde{x}(f_0)$ $(k\to\infty)$; $\forall\tilde{x}\in E^{**}$).

注 5. 除了当空间自反时，上述两个定义是一回事之外，一般说来，由于$E\subsetneqq E^{**}$可知，当泛函列$\{f_n\}\subset E^*$,"弱收敛"于f_0时必亦有"＊弱收敛"于f_0,但反之未必成立. 因此对于E^*中的集而言，以上两定义是不同的.

反例. 在(c_0)空间中，取泛函列$f_n=(0,\cdots,0,\underset{(n)}{1},0,\cdots)\in(c_0)^*=(l^1)$ $(n=1,2,\cdots)$. 那么，$f_n\xrightarrow{(*弱)}0$(零泛函)$(n\to\infty)$. 然而，$f_n\underset{(弱)}{\not\to}0$(零泛函).

验. 从(c_0)上有界线性泛函的一般表达式可知上面前半段命题是显然的，至于其后半段命题，我们只要注意到$(l^1)^*=(m)$及$(l^1)^*$上的泛函表达式，便可得到

$$X(f_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f_k^{(n)}=\xi_n(n=1,2,\cdots);\quad\forall X=\{\xi_k\}\in(m).$$

特别当取一元$X_0=(1,1,\cdots,1,\cdots)$时，就可导出

$$X_0(f_n)=1\not\to X_0(0)=0\ (n\to\infty),$$

即$f_n\underset{(弱)}{\not\to}0$. 验毕.

注 6. 不难看出，集$\mathscr{F}\subset E^*$的"弱(自)列紧"性必蕴含着其"弱(自)完备"性. 反之，它未必成立.

反例. 空间(l^1)内的单位闭球$\bar{S}(\theta,1)$是"弱"自完备的，但却不是"弱"自列紧的.

验. 事实上，当在空间(l^1)的单位闭球$\bar{S}(\theta,1)$中任取一"弱 Cauchy 列"$\{x_n\}$时，由于(l^1)中元列的强、弱收敛是等价的(以后在 §4.5 中证明). 因此，$\{x_n\}$即(l^1)中一平常的 Cauchy 列，从而由(l^1)的完备性可知该元列极限存在. 最后，由该范数的连续性我们还知此极限元仍属于$\bar{S}(\theta,1)$，此即说明$\bar{S}(\theta,1)$是弱自完备集.

然而，另一方面，对于$\bar{S}(\theta,1)$内的元列$x_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$ $(n=1,2,\cdots)$而言，对其任一子列$\{x_{n_k}\}$当取一泛函

$f_0 \in (l^1)^* = (m)$ 为元 $(f_1^\circ, f_2^\circ, \cdots, f_n^\circ, \cdots)$ 时，其中的"分量"

$$f_n^\circ = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = n_{2m} \text{ 时;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (m = 1, 2, \cdots, n = 1, 2, \cdots)$$

因此，有

$$f_0(x_{n_k}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = 2m \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } k = 2m - 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

即当 $k \to \infty$ 时，$f_0(x_{n_k})$ 无极限存在，从而更谈不上 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛．验毕．

引理 2. 可分赋范线性空间 E 之共轭空间 E^* 内的单位(闭)球是"＊弱"自列紧的．

证．首先，由 E 的可分性假设可知，$\exists \{x_n\} \subset E$ 使得 $\overline{\{x_n\}} = E$，那么，$\forall \{f_n\}$，$\|f_n\| \leqslant 1\ (n = 1, 2, \cdots)$．下面，我们将用"对角线"法来选出 $\{f_n\}$ 的一个"＊弱"收敛的子列 $\{f_{n_k}\}$．

事实上，由于对于上面的元列 $\{x_n\}$ 及泛函列 $\{f_n\}$ 而言，有

$$|f_n(x_k)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x_k\| \leqslant \|x_k\| (n,\ k = 1,\ 2, \cdots),$$

因而对于有界数列 $\{f_n(x_1)\}$ 而言，由 Bolzano-Weierstrass 定理我们可知，$\exists \{f_{1,n}\} \subset \{f_n\}$，使得数列 $\{f_{1,n}(x_1)\}$ 是收敛的；同样地，对于有界数列 $\{f_{1,n}(x_2)\}$ 而言，又必有泛函子列 $\{f_{2,n}\} \subset \{f_{1,n}\}$，使得数列 $\{f_{2,n}(x_2)\}$ 也是收敛的；…；一般说来必存在泛函子列 $\{f_{k,n}\} \subset \{f_{k-1,n}\}$ 使得数列 $\{f_{k,n}(x_k)\}$ 是收敛的；…．这样当取上述可数个泛函子列的"对角线"泛函列 $\{f_{n,n}\}$ 时，显然可以看出 $\forall k$ (自然数) 均有

$$\{f_{n,n} | n \geqslant k\} \subset \{f_{k,n}\} \text{ 及 } \{f_{n,n}\} \subset \{f_n\}.$$

因而上述任何元 $x_k \in \{x_n\}$，$\{f_{n,n}(x_k)\}$ 均为收敛数列．由此，注意到 $\{x_n\}$ 稠于 E 的假设，由不等式

$$\begin{aligned} |f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| &\leqslant |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_k)| \\ &\quad + |f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)| + |f_{m,m}(x_k) - f_{m,m}(x)| \\ &\leqslant (\|f_{n,n}\| + \|f_{m,m}\|) \cdot \|x - x_k\| + |f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)| \\ &\leqslant 2\|x - x_k\| + |f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)|. \end{aligned}$$

可导出 $\forall x \in E$，$\{f_{n,n}(x)\}$ 均为收敛数列．于是就可得到 E 上的一

分配泛函 f_0,

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n,n}(x), \qquad \forall x \in E. \tag{4}$$

并且,由于

$$|f_0(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_{n,n}(x)| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_{n,n}\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\|, \ \forall x \in E,$$

我们还有 $f_0 \in E^*$, $\|f_0\| \leqslant 1$. 由式(4),我们从上也即导出了$\{f_{n,n}\}$,是"*弱"收敛于 E^* 单位闭球内一元 f_0 的. 证毕.

注 7. 引理2的证明中使用的"对角线"选收敛子列的方法是很重要的,必须好好掌握它.

注 8. 至于引理 2,当空间不是可分时,结论一般说来是不一定成立的. 例如,可取一个不可分的 Hilbert 空间作为反例. 这里,不详细讨论.

注 9. 从引理 2 中还可看出,虽然"弱"列紧蕴含着"*弱"列紧的性质但是"*弱"列紧一般得不出"弱"列紧的结论. 反例可见,空间 $(l^1) = (c)^*$. 由于 (c) 是可分的,因此由引理 2 可知,$(c)^* = (l^1)$内的单位闭球是"*弱"自列紧的,但是如果由此导出其也是"弱"自列紧的,则由 (l^1) 空间中强弱收敛的等价性,我们便导出 (l^1) 中单位闭球也是自列紧集,此显然与 (l^1) 是无穷维的赋范空间矛盾(参看 §1.1.)

由引理 2 我们还可以直接得到下面一个推理:

推理. 在可分赋范线性空间 E 的共轭空间 E^* 中,其任意的有界集均是"*弱"列紧的.

下面,我们给出关于自反空间特征的重要定理:

定理 3 (Kakutani). 为了一个 Banach 空间 E 是自反的,必须且只须 E 内的(闭)单位球 $\bar{S}(\theta, 1)$ 是"弱"(自)列紧的.

证. 1) "$\Longrightarrow$" 设 E 为一自反空间,$\{x_n\}$ 为 $\bar{S}(\theta, 1)$ 上任意元列. 若令

$E_0 = \overline{[\{x_n\}]}$ ($\{x_n\}$ 所张成的闭线性子空间),则 E_0 显然是可分的,且由定理 2,还知它也是自反的.

其次,令

$$\tilde{x}_n(f_0) = f_0(x_n), \qquad \forall f_0 \in E_0^* \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

显然,可以得到

$$\tilde{x}_n \in E_0^{**}, \ \|\tilde{x}_n\| \leqslant 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由 $E_0 = (E_0^*)^*$ 是可分的及引理 1 可知 E_0^* 也是可分的,利用引理 2 则知 $(E_0^*)^* = E_0$ 的单位闭球是"＊弱"自列紧,即"弱"自列紧的(因 E_0 的自反性)、因此,$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 及 $x_0 \in \bar{S}(\theta, 1)$, 使得

$$f_0(x_{n_k}) \to f_0(x_0) \ (k \to \infty); \quad \forall f_0 \in E_0^*.$$

最后, 注意到 $\forall f \in E^*$, 当其定义域限制在 E_0 上也为 E_0^* 中的元时,可以导出

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \ (k \to \infty); \qquad \forall f \in E^*.$$

即 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 $\bar{S}(\theta, 1)$ 上的元 x_0, 从而有 $\bar{S}(\theta, 1)$ 是弱自列紧的.

2) "$\Longleftarrow$" 设 $\bar{S}(\theta, 1)$ 是弱自列紧的. 那么, $\forall \tilde{x}_1 \in E^{**}$, $\tilde{x}_1 \neq 0$, 我们首先将 E^* 内的所有"有限元"所组成集类记为 $\{\pi\}$, 并在其内按"包含"关系定义"序"关系(即如果 π 包含在 π' 之内, 则令 $\pi \prec \pi'$), 于是,注意到上节(四)中的定理 6 (Helly 定理) 及条件

$$\left|\sum_{\pi} \xi_\alpha \cdot \tilde{x}_1(f_\alpha)\right| = \left|\sum_{\pi} \tilde{x}_1(\xi_\alpha f_\alpha)\right|$$

$$= \left|\tilde{x}_1\left(\sum_{\pi} \xi_\alpha f_\alpha\right)\right| \leqslant \|\tilde{x}_1\| \cdot \left\|\sum_{\pi} \xi_\alpha f_\alpha\right\|,$$

可推得,对于上面任意的有限泛函集 π, 均必存在一元 $x_\pi \in E$, 使其满足

i. $f(x_\pi) = \tilde{x}_1(f)$, $\forall f \in \pi$;

ii. $\|x_\pi\| \leqslant \|\tilde{x}_1\| + \|\tilde{x}_1\| = 2\|\tilde{x}_1\|$.

由假设 $\bar{S}(\theta, 1)$ 的"弱"自列紧性,显然可以推出球 $\bar{S}(\theta, 2\|\tilde{x}_1\|)$的"弱"自列紧性, 因此, 上面必有一定向列 $\{x_\pi\}$, 弱收敛于元 $x_1 \in \bar{S}(\theta, 2\|\tilde{x}_1\|)$. 即有

$$\lim_{\pi} f(x_\pi) = f(x_1), \quad \forall f \in E^*,$$

结合到 i, 可导出

$$\tilde{x}_1(f) = f(x_1), \qquad \forall f \in E^*.$$

最后，由于 $\tilde{x}_1 \in E^{**}$ 的任意性，此即说明由 E 到 E^{**} 内"自然映象"的值域的确充满了全空间 E^{**}，也即 E 是自反的. 证毕.

类似地，由定理 3 我们可以直接导出下面的一个推理:

推理. 在自反空间中，任意有界集都是"弱"列紧的. 反之，只要一个 Banach 空间 E 内的某一闭球 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$ 是弱自列紧的，则 E 必为自反的.

注 10. 当 E 不是自反空间时，其内单位球 $\bar{S}(\theta, 1)$ 未必是弱列紧的. 反例可见注 9.

注 11. 根据定理 3 也可看出，"弱"列紧性一般也推不出列紧性，反例可见空间 (l^p)，或 $L^p[a,b]$，$(p>1)$（同样注意到"弱"列紧与"弱"完备的关系，我们也可将上述空间 (l^p)，$L^p[a,b]$ $(p>1)$ 作为"弱"完备空间的例子.）

注 12. 由定理 3 的推理结合今后第四章的"共鸣定理"我们将可以看出，在一个自反空间中，集 M 的有界性与其的"弱"列紧性是等价的.

注 13. 关于自反空间的更有趣的结果是 R.C. James 在 1963 年10月举行的华沙泛函会议上给出的，他指出："为了一个 Banach 空间是自反的，必须且只须其任意有界连续泛函均在其单位(闭)球 $\bar{S}(\theta, 1)$ 上取到其上确界[7].

注 14. 我们同样可以利用 E^* 内的任意有限元引出空间 E 的弱拓扑，从而导出"弱"紧的概念，并且，它与"弱"列紧也有如下命题成立："赋范线性空间内的任一子集，其弱紧与弱自列紧的性质是等价的". 但是"∗弱紧与∗弱自列紧却不是等价的"（对比一下引理 2 与命题"对任赋范线性空间 E，E^* 的单位(闭)球均是∗弱紧的"便可知)，有兴趣的读者可参看文献[3]，[49]，[68]，[89]等.

附　　录

这里，给出一个与引理2有关联的关于可分空间E的共轭空间E^*的特性的命题.

定理 4. 可分赋范线性空间E的共轭空间E^*内的闭单位球必是"＊弱"可分的.

证. 只需证明存在E^*单位闭球$\bar{S}^*(\theta, 1)$内一可数集Δ，使得对于任意泛函$f_0 \in \bar{S}^*(\theta, 1)$，均有一列泛函$\{f_n\} \subset \Delta$. 满足$f_n \xrightarrow{(*弱)} f_0 (n \to \infty)$就行了.

首先，从E的可分性可知，$\exists \{x_k\} \subset E$，使$\overline{\{x_k\}} = E$. 其次，$\forall f \in \bar{S}^*(\theta, 1)$，我们做映象$T_n$，

$$f \to T_n(f) = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

那么，T_n可视为由$\bar{S}^*(\theta, 1)$到$(l^2_{(n)})$空间内的算子，因而由$(l^2_{(n)})$的可分性导出其子集$T_n(\bar{S}^*(\theta, 1))$的可分性. 故$\forall n$（自然数）$\exists \{f_{n,m} | m = 1, 2, \cdots\} \subset \bar{S}^*(\theta, 1)$使得元列$\{T_n(f_{n,m}) | m = 1, 2, \cdots\}$在$T_n[\bar{S}^*(\theta, 1)]$内是稠的.

最后，我们令

$$\Delta = \{f_{n,m} | n, m = 1, 2, \cdots\},$$

并证明此即为所求之$\bar{S}^*(\theta, 1)$的稠集，事实上，$\forall$(泛函)$f_0 \in \bar{S}^*(\theta, 1)$，根据$\Delta$中泛函的性质可知$\forall n$（自然数），$\exists \{f_{n,m_n}\} \subset \Delta$，使得

$$\|T_n(f_{n,m_n}) - T_n(f_0)\|_{(l^2_{(n)})} < \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是，注意到空间$(l_{(2n)})$内范数的定义，可得

$$|f_{n,m_n}(x_k) - f_0(x_k)| < \frac{1}{n} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

即，$\forall x_k \ (k = 1, 2, \cdots)$均有

$$f_{n,m_n}(x_k) \to f_0(x_k) \ (n \to \infty).$$

由于$\{x_k\}$稠于E，且$\|f_{n,m_n}\| \leqslant 1$，故与引理2后面的证明类似. 借助于不等式

$$\begin{aligned} |f_{n,m_n}(x) - f_0(x)| &\leqslant |f_{n,m_n}(x) - f_{n,m_n}(x_k)| + |f_{n,m_n}(x_k) - f_0(x_k)| \\ &\quad + |f_0(x_k) - f_0(x)| \\ &\leqslant 2\|x - x_k\| + |f_{n,m_n}(x_k) - f_0(x_k)|, \quad \forall x \in E, \end{aligned}$$

可得

$$f_{n,m_n}(x) \to f_0(x) \ (n \to \infty), \qquad \forall x \in E.$$

即导出 $f_{n,m_n}\xrightarrow{(*弱)}f_0(n\to\infty)$. 证毕

注. 前面我们曾经指出过："∗弱"收敛一般推不出"弱"收敛，因此，一般说来，"∗弱"可分性也推不出"弱"可分性，更推不出可分性. 作为定理 4 的应用，我们可以由 $(l^1)^*=(m)$，$(L^1[a,b])^*=M[a,b]$ 直接导出空间 (m)，$M[a,b]$ 均是"∗弱"可分的. 然而，由§1.3 我们知道它们均是不可分的空间.

习　　题

1. 试证明本节引理 2 后面的推理.

2. 试证明本节定理 3 后面的推理.

3. 试证明可分赋范线性空间的共轭空间必是∗弱可分空间.

4. 试证明：当 E 为自反空间时，其上任一泛函 $f\in E^*$，均在单位闭球 $\bar{S}(\theta,1)$ 上取到值 $\|f\|$.

5. 由空间 $C[0,1]$ 内单位闭球 $\bar{S}(\theta,1)$ 的元列

$$x_n=x_n(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2} \text{ 时};\\ 2n\left(t-\frac{1}{2}\right) & \text{当 } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \text{ 时};\\ 1, & \text{当 } \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\leqslant t\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

直接说明 $C[0,1]$ 内单位闭球不是弱列紧的.

6. 当已知"E 自反 $\Longrightarrow E^*$ 自反"时，利用本节定理再次证明（§3.1 习题中）结论：当 E 为 Banach 空间时，E^* 自反 $\Longrightarrow E$ 自反.

§3.6. 一致凸空间与严格凸空间

为了讨论最佳逼近的唯一性问题、空间的自反性问题以及有界线性泛函"保范延拓"的唯一性等等问题，本节讨论几种特殊类型的赋范线性空间.

(一)

在这一段里，我们介绍关于"一致凸""平性凸"和"严格凸"空

间的基本概念．首先，我们给出"一致凸"空间的定义：

定义 1. 赋范线性空间 E 称为一致凸的，是指 $\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset E$，只要有 $\|x_n\|=\|y_n\|=1\ (n=1,2,\cdots)$ 以及 $\|x_n+y_n\|\to 2\ (n\to\infty)$，则必有 $\|x_n-y_n\|\to 0\ (n\to\infty)$（参看图3.13）．

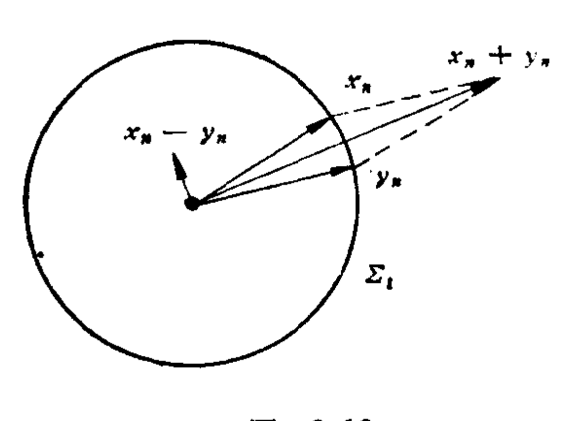


图 3.13

例*．空间(l^p)，$L^p[a,b]$，当 $p>1$ 时均为一致凸空间．

其验证读者可以参看文献[37]

注 1. 上面一致凸空间有下面常见的"等价定义"：赋范线性空间 E 称为一致凸的，是指 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant 2)$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall x,y\in E$ 只要当 $\|x\|=\|y\|=1$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时，就一致地有 $\|x+y\|\leqslant 2[1-\delta(\varepsilon)]$，其中，函数 $\delta(\varepsilon)$ 称为（空间的）"凸性模"．

上面注 1 的结论我们作为习题留给读者完成，有意思的是在空间 $L^p(p>1)$中，这里定义的凸性模 $\delta(\varepsilon)$的估计值是能够求出来的，当正数 ε 足够小的时候 $\delta(\varepsilon)\sim\varepsilon^2\,(1<p\leqslant 2)$及 $\delta(\varepsilon)\sim\varepsilon^p(2\leqslant p)$．[63][80]

注 2. 由本节定义 1 可知，对于一致凸空间内单位球面 Σ_1 上的任意两（不同）点 x，y，必恒有 $\|x+y\|<2$，这个推论我们下面将要常用的．

注 3. 当把定义 1 的极限关系倒置时，那么意义则是平凡的，因为对于所有的赋范线性空间，该倒置关系均是能够满足的

事实上，由 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的假设， 一方面有关系式

$$\|x_n+y_n\|\leqslant\|x_n\|+\|y_n\|=2\quad(n=1,2,\cdots);$$

另一方面又有关系式

$$\begin{aligned}\|x_n+y_n\|&=\|2y_n+(x_n-y_n)\|\geqslant\|2\ y_n\|-\|x_n-y_n\|\\&=2-\|x_n-y_n\|\to 2\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

从而导出 $\|x_n+y_n\|\to 2\ (n\to\infty)$．

注 4. 赋范空间未必是一致凸的.

反例 1. 空间 (l^1) 不是一致凸的.

验. 我们取 $x_n \equiv e_1 = (1, 0, 0, \cdots)$; $y_n \equiv e_2 = (0, 1, 0, 0, \cdots)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 那么,显然有 $\|x_n\| = \|y_n\| \equiv 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\|x_n + y_n\| \equiv 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 然而 $\|x_n - y_n\| = 2 \not\to 0$ $(n \to \infty)$. 验毕.

当空间 (l^1) 换为有限维而范数以 (l^1) 形式定义时, 显然结论仍是正确的.

反例 2. 空间 $L^1[0, 1]$不是一致凸的.

验. 我们取

$$x_n(t) \equiv x_0(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ 0, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$y_n(t) \equiv y_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 2, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases} \quad (n = 1, 2 \cdots)$$

显然 $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\|x_n + y_n\| = 2$; 但 $\|x_n - y_n\| = 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$从而知 $L^1[0, 1]$不满足一致凸的定义. 验毕.

反例 3. 空间 (c) 和 $C[a, b]$ 都不是一致凸的. (请读者自己验证)

其次,我们给出关于"平性凸"空间的定义:

定义 2. 赋范线性空间 E 称为平性凸的, 是指在 E 的单位球面 Σ_1 上,有两个点 x_0, y_0, 使得

$$\left\|\frac{x_0 + y_0}{2}\right\| = \|x_0\| = \|y_0\| = 1,$$

注 5. 如果 E 为平性凸空间,则在 E 的单位球面 Σ_1 上必有两点 x_0, y_0 使得"线段" $[x_0, y_0] \subset \Sigma_1$.

事实上, 当设单位球面 Σ_1 上的两个点 x_0, y_0 满足定义 2 的条件时,可以导出,线段$[x_0, y_0]$,即线段 $\left[x_0, \dfrac{x_0 + y_0}{2}\right]$和$\left[\dfrac{x_0 + y_0}{2}, y_0\right]$

必定均含于单位球面 Σ_1 内. 反之,如果有点 $u_0 = \lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) \cdot \frac{x_0 + y_0}{2} \bar{\in} \Sigma_1$, $(0 < \lambda_0 < 1)$ 或 $v_0 = \mu_0 y_0 + (1-\mu_0)\frac{x_0 + y_0}{2} \bar{\in} \Sigma_1$, $(0 < \mu_0 < 1)$, 那么,由 $x, y, \frac{x_0 + y_0}{2} \in \Sigma_1$, 立即导出 $\|u_0\| < 1$ 或 $\|v_0\| < 1$, 这样,注意到

$$\frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} u + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0} v$$

$$= \frac{\lambda_0 \mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}(x_0 + y_0) + \frac{\lambda_0 + \mu_0 - 2\lambda_0\mu_0}{2(\lambda_0 + \mu_0)}(x_0 + y_0) = \frac{x_0 + y_0}{2},$$

便可导出

$$\left\|\frac{x_0 + y_0}{2}\right\| \leqslant \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}\|u\| + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0}\|v\|$$

$$< \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0} = 1.$$

显然与开始假设的 $\left\|\frac{x_0 + y_0}{2}\right\| = 1$ 矛盾.

例. 空间 (l^1), $L^1[0, 1]$ 均是平性凸的.

验. 这显然可从反例 1, 2 直接看出 (当在二维空间中观察 $(l^1_{(2)})$ 的"单位球面"时,结论是直观的,因此时"单位球"其实即为过 $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ 四点所连成的正方形(斜置),所以,除四个顶点外,"球面"是"平"的,参看图 3.14). 验毕.

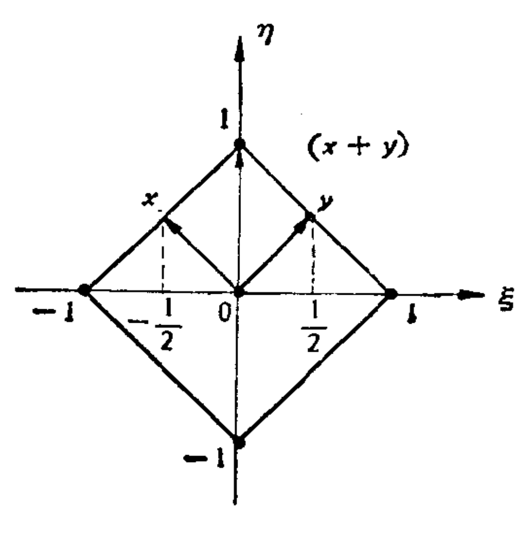


图 3.14

最后,我们再给出关于"严格凸"空间的定义:

定义 3. 赋范线性空间 E 称为严格凸的,是指 $\forall x \neq 0$, $y \neq 0$ 必有

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Longrightarrow x = \alpha y \text{(其中, } \alpha \text{ 为某一正数)}.$$

注 6. 由定义 2 与定义 3, 显然可以看出, 平性凸空间一定不是严格凸空间.

事实上，对于满足定义 2 条件之单位球面 Σ_1 上的两个点 x_0，y_0 而言，元 $\frac{x_0}{2}$，$\frac{y_0}{2}$ 满足关系式

$$\left\|\left(\frac{x_0}{2}\right)+\left(\frac{y_0}{2}\right)\right\|=\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\|=1=\left\|\frac{x_0}{2}\right\|+\left\|\frac{y_0}{2}\right\|.$$

然而，由于 $x_0 \neq y_0$，所以均有 $\frac{x_0}{2} \neq \alpha \cdot \frac{y_0}{2}$，$\forall \alpha > 0$．从而知空间不是严格凸的．至于反过来的关系，我们可从以后介绍的关于严格凸空间的特性中导出．

（二）

下面，我们给出关于严格凸空间性质的三个定理：

定理 1. 为了空间 E 是严格凸的，必须且只须 E 的单位球面 Σ_1 是"严格凸"的(即 $\forall x, y \in \Sigma_1, x \neq y$，只要 $\|x\| = \|y\| = 1$，则均有 $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$，$\forall \lambda \in (0, 1)$)(参看图 3.15)．

证．1)"$\Longrightarrow$" 反之，如果 E 的单位球面 Σ_1 不是严格凸的，那么，必有两个不同的元 $x_0, y_0 \in \Sigma_1$ 及一数 $\lambda_0 \in (0,1)$，使得

$$\|\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0) y_0\| = 1,$$

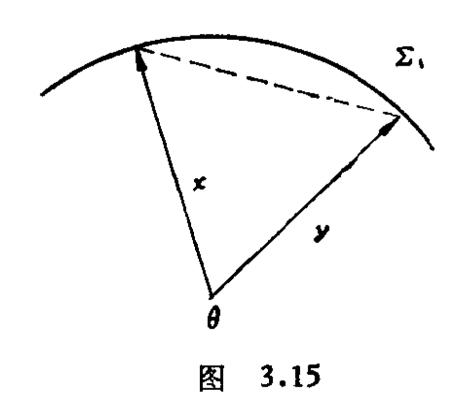


图 3.15

于是我们有 $\|\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0) y_0\| = \|\lambda_0 x_0\| + \|(1-\lambda_0) y_0\|$，这样，由空间严格凸的假设，可导出

$$\lambda_0 x_0 = \alpha_0[(1-\lambda_0) y_0] \quad (\alpha_0 > 0).$$

即 $x_0 = \frac{\alpha_0(1-\lambda_0)}{\lambda_0} y_0$．最后，注意到 $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$ 的假设，有 $\frac{\alpha_0(1-\lambda_0)}{\lambda_0} = 1$，此即导出 $x_0 = y_0$，与原来 x_0，y_0 取法矛盾．

2)"$\Longleftarrow$" 反之，如果 E 不是严格凸的空间，那么，必存在两个非零元 x_0，y_0，使得 $\|x_0 + y_0\| = \|x_0\| + \|y_0\|$，但 $x_0 \neq \alpha y_0$，$\forall \alpha > 0$．于是，由 E 的单位球面 Σ_1 是严格凸的假设，我们有

$$\left\|\left(\frac{\|x_0\|}{\|x_0\|+\|y_0\|}\right)\frac{x_0}{\|x_0\|}+\left(\frac{\|y_0\|}{\|x_0\|+\|y_0\|}\right)\frac{y_0}{\|y_0\|}\right\|<1,$$

即

$$\left\|\frac{x_0+y_0}{\|x_0\|+\|y_0\|}\right\|<1,$$

也就是 $\|x_0+y_0\|<\|x_0\|+\|y_0\|$. 与原 x_0, y_0 的取法矛盾. 证毕.

注 7. 由定理 1 我们显然可以看出，严格凸的空间一定不是平性凸的空间.

定理 2. 如果空间 E 不是严格凸的，那么，其必定是平性凸的.

证. 事实上,根据定理 1 的结论,我们可知,如果 E 不是严格凸的,那么,必有 Σ_1 上的两个元 x_0, y_0, 以及正数 $\lambda_0\in(0,1)$, 使得 $\|\lambda_0x_0+(1-\lambda_0)y_0\|=1$, 这样，类似于注 5 的证明方法得出,线段 $[x_0, y_0]\subset\Sigma_1$, 因而,可知 E 是平性凸的. 证毕.

注 8. 由定理 2, 我们可知,一个赋范线性空间只能是严格凸或平性凸,并且,该两类型是互斥的.

为了证明定理 7, 下面给出一个线性赋范空间是严格凸的必要性命题:

定理 3. 如果一个赋范线性空间 E 的共轭空间 E^* 满足 $\forall 0\neq f_1\in E^*$, 存在"唯一"的一个 $X_1\in E^{**}$,使得 $\|X_1\|=1, X_1(f_1)=\|f_1\|$, 那么,空间 E 必为严格凸的.

证. 反之,如果 E 不是严格凸的, 那么,从定理 1、2 可知, 必有 E 中单位球面 Σ_1 上的两点 x', x'', 使得线段 $[x', x'']\subset\Sigma_1$,即有

$$\|\lambda x'+(1-\lambda)x''\|=1,\quad \forall\lambda\in[0,1].$$

于是,我们任取一元

$$x_0=\lambda_0x'+(1-\lambda_0)x''\ (其中, 0<\lambda_0<1),$$

那么,由 Hahn-Banach 定理可知, $\exists f_1\in E^*$, 使得

$$\|f_1\|=1,\ f_1(x_0)=\|x_0\|.$$

注意到 x_0 的取法,由上面后一式则得

$$\lambda_0f_1(x')+(1-\lambda_0)f_1(x'')=1,$$

个即有

$$\begin{cases}\lambda_0\mathrm{Re}f_1(x') + (1-\lambda_0)\mathrm{Re}f_1(x'') = 1, \\ \lambda_0\mathrm{Im}f_1(x') + (1-\lambda_0)\mathrm{Im}f_1(x'') = 0.\end{cases}$$

这样，由

$$|f_1(x')| \leqslant \|f_1\|\|x'\| = 1, \quad |f_1(x'')| \leqslant \|f_1\|\|x''\| = 1,$$

可看出 $|\mathrm{Re}f_1(x')|$, $|\mathrm{Im}f_1(x')|$, $|\mathrm{Re}f_1(x'')|$, $|\mathrm{Im}f_1(x'')| \leqslant 1$，解上面的方程组可得

$$\mathrm{Re}f_1(x') = \mathrm{Re}f_1(x'') = 1,$$
$$\mathrm{Im}f_1(x') = \mathrm{Im}f_1(x'') = 0.$$

即得到 $f_1(x') = f_1(x'') = 1$.

最后，注意到 $E \subset E^{**}$，取 E^{**} 中两元 $\tilde{x}'$, $\tilde{x}''$（即 E 中元 x', x'' 在 E^{**} 的"自然映象"元），那么，根据 x', x'' 性质，有

$$\|\tilde{x}'\| = \|x'\| = 1, \quad \|\tilde{x}''\| = \|x''\| = 1$$

及（注意到 f_1 的性质）

$$\tilde{x}'(f_1) = f_1(x') = 1 = \|f_1\|,$$
$$\tilde{x}''(f_1) = f_1(x'') = 1 = \|f_1\|.$$

然而，当 $x' \neq x''$ 时，必然有 $\tilde{x}' \neq \tilde{x}''$. 因此上面的关系式显然与定理的 E^* 假设矛盾. 证毕.

（三）

下面给出关于一致凸空间的几个定理. 在 §3.4 的注 1 中，我们曾经指出，即使对于一个 Banach 空间内的有限维线性子空间而言，其内关于空间一元 x_1 的"最佳近似元"虽然存在，但一般说来，却不是唯一的. 然而，下面的命题将告诉我们，对于一个"严格凸"的 Banach 空间来说，上面的最佳近似元必是唯一的. 并且，对于"一致凸"的空间而言，我们有下面一个更一般性的结果：

定理 4. 设 V 是一致凸的 Banach 空间内的一个闭凸集. 那么，只要元 $x_1 \notin V$，则必存在唯一的一个元 $y_0 \in V$，使得 $\|x_1 - y_0\| = \inf\limits_{y \in V} \|x_1 - y\|$. （此定理的结论用 §3.4 的符号来说，即有唯一元 $y_0 = \mathscr{A}_V(x_1)$.）

证． 首先，证明定理中所需的元 y_0 的存在性．我们可设 $x_1=\theta\bar{\in} V$（否则可以“平移” x_1, V 而得，并且不影响定理的结论）．那么，由 V 是闭集，故必有 $\inf\limits_{y\in V}\|y\|=d>0$，从而，由下确界的定义，可知必有元列 $\{y_n\}\subset V$，使得 $\|y_n\|\to d\ (n\to\infty)$．这样，对于 $\{y_n\}$ 中任意子列 $\{y_{n_k}\}$，$\{y_{m_k}\}$，由 V 是凸集的假设，故(由 §1.1 习题 1 中的(ii)) 可知

$$\left\|\frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|}+\frac{y_{m_k}}{\|y_{m_k}\|}\right\|\to 2\quad (k\to\infty).$$

因而，由空间的一致凸的假设，可导出

$$\left\|\frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|}-\frac{y_{m_k}}{\|y_{m_k}\|}\right\|\to 0\quad (k\to\infty).$$

当 $\lim\limits_{k\to\infty}\|y_{n_k}\|=\lim\limits_{k\to\infty}\|y_{m_k}\|=d>0$ 时，由以上不难导出

$$\|y_{n_k}-y_{m_k}\|\to 0\quad (k\to\infty).$$

注意到子列 $\{y_{n_k}\}$，$\{y_{m_k}\}\subset\{y_n\}$ 的任意性，即导得 $\{y_n\}$ 为 E 中的 Cauchy 列，从而由 E 的完备性以及集 V 的闭性可以得出一元 $y_0\in V$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_1=y_0$，此即导出 $\|y_0\|=d$.

其次，我们证明上面所得到的元 y_0 是唯一的．事实上，如果还有一元 $y_0'\neq y_0$，使得 $\|y_0'\|=\|y_0\|=d$，那么，由 V 是凸集，$\dfrac{y_0'+y_0}{2}\in V$ 以及 d 的定义，可导出

$$2\geqslant\left\|\frac{y_0'}{\|y_0'\|}+\frac{y_0}{\|y_0\|}\right\|=\frac{2}{d}\left\|\frac{y_0'+y_0}{2}\right\|\geqslant\frac{2}{d}\cdot d=2.$$

即 $\left\|\dfrac{y_0'}{\|y_0'\|}+\dfrac{y_0}{\|y_0\|}\right\|=2$，从而再由空间的一致凸的假设可以导出 $\left\|\dfrac{y_0'}{\|y_0'\|}-\dfrac{y_0}{\|y_0\|}\right\|=0$．此即导出 $\|y_0'-y_0\|=0\cdot d=0$，即 $y_0'=y_0$．证毕．

由定理 4， 我们可以得到下面的推理：

推理 1. 设 V 为严格凸空间 E 内的一个凸集，元 $x_1\in E\setminus\bar{V}$，

那么,当 $y_0 \in \mathscr{A}_V(x_1)$时(即$y_0 \in V$,有 $\|x_1 - y_0\| = \inf\limits_{y \in V}\|x_1 - y\|$).
则 $\mathscr{A}_V(x_1) = \{y_0\}$, (此推理即为对于严格凸空间内一个凸集 V 而言,如果其内对元 x_1 的"最佳近似元" y_0 存在,那么,其必是唯一确定的.)

证. 事实上,与定理 4 的证明方法相仿,先平移 x_1 为 θ 元,然后从以上定理唯一性证明中已可看出,如果上述 y_0 元不唯一,则对另一最佳近似元 y_0', $y_0' \neq y_0$ 有

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{y_0'}{\|y_0'\|}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{\|y_0\|}\right)\right\| = 1,$$

从而由上面定理1,可知空间 E 不是严格凸的,与原设矛盾. 证毕.

推理 2. 设 E_n 为严格凸空间 E 内的任一有限维线性子空间,那么,$\forall x_1 \in E$,在 E_n 内必存在唯一的一个对于 x_1 的最佳近似元 y_0.

证. 事实上由 E_n 显然为 E 的闭线性子空间,故联系到 §3.4 的定理 1(最佳近似元的存在性)和上面的推理 1(当 $x_1 \notin E_n$ 时的唯一性),以及当 $x_1 \in E_n$ 时最佳近似元就是该元本身,我们立即可以直接导出本定理结论. 证毕.

下面的定理是由 Мильман, Pettis, 角谷静夫等人证明的(我们用角谷静夫的证明方法).

定理 5 (Мильман). 一致凸的 Banach 空间必为自反空间.

证. 设 E 为一致凸的 Banach 空间,并设 $\tilde{x}_0 \in (E^*)^*$(不妨设 $\|\tilde{x}_0\| = 1$),下面,我们只须证明,$\exists x_0 \in E$,使得

$$\tilde{x}_0(f) = f(x_0), \quad \forall f \in E^*$$

即可. 首先,由于 $\|\tilde{x}_0\| = 1$,因而由空间 E^* 上的泛函的范数定义可知,$\forall n$ (自然数) $\exists f_n \in E^*$,使得

$$\|f_n\| = 1, \quad \tilde{x}_0(f_n) > 1 - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

其次,我们考虑前几个泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_n$,利用 §3.4 定理 6,我们可知(即 §3.4 习题 7) $\exists x_n \in E$,使其满足

$$f_k(x_n) = \tilde{x}_0(f_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

$$\|x_n\| \leqslant \|\tilde{x}_0\| + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

结合前面的关系式则得

$1 - \frac{1}{n} < \tilde{x}_0(f_n) = f_n(x_n) \leqslant \|f_n\|\|x_n\| = \|x_n\| \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 即有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. 其三，证明上述选出的元列 $\{x_n\} \subset E$ 是强收敛的. 事实上,如果此结论不真则必存在一正数 ε_0，及自然数列 $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots < n_k < m_k < \cdots$，使得非零子列 $\{x_{n_k}\}$，$\{x_{m_k}\} \subset \{x_n\}$，均有

$$\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

因而,由 $\|x_n\| \to 1$ $(n \to \infty)$及以上不等式，可得到

$$\left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{m_k}}{\|x_{m_k}\|} \right\| \not\to 0 \qquad (k \to \infty).$$

从而由空间 E 是"一致凸"的,我们导出

$$\left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x_{m_k}}{\|x_{m_k}\|} \right\| \not\to 2 \qquad (k \to \infty). \tag{3}$$

另一方面，注意到 x_{n_k}，x_{m_k} 的取法、性质 (1) 及 $n_k < m_k$. 我们又有

$$f_{n_k}(x_{n_k}) = \tilde{x}_0(f_{n_k}), f_{n_k}(x_{m_k}) = \tilde{x}_0(f_{n_k}) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

根据泛函 f_{n_k} 的取法,还可得到

$$\begin{aligned} 2\left(1 - \frac{1}{n_k}\right) &\leqslant 2\tilde{x}_0(f_{n_k}) = f_{n_k}(x_{n_k}) + f_{n_k}(x_{m_k}) \\ &= f_{n_k}(x_{n_k} + x_{m_k}) \leqslant \|f_{n_k}\| \cdot \|x_{n_k} + x_{m_k}\| \\ &= \|x_{n_k} + x_{m_k}\| \leqslant \|x_{n_k}\| + \|x_{m_k}\| \quad (k = 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

由此,我们由 $\|x_n\| \to 1$ $(n \to \infty)$ 的假设及上述,可得出

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} + x_{m_k}\| = 2,$$

从而不难导出

$$\left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x_{m_k}}{\|x_{m_k}\|} \right\| \to 2 \quad (k \to \infty). \tag{4}$$

式(4)与(3)显然是矛盾的. 由此可知 $\{x_n\}$ 必收敛于一元 $x_0 \in E$.

并且由$\{x_n\}$的选法的(1),(2)我们还知

$$\|x_0\| = 1; f_k(x_0) = \tilde{x}_0(f_k) \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{5}$$

其四,证明满足上面条件(5)的元 $x_0 \in E$ 是唯一的. 事实上，如有元 $x_0' \neq x_0$，也满足上面条件 (5). 于是,由于

$$f_k(x_0 + x_0') = 2\tilde{x}_0(f_k)$$

以及

$$2\left(1 - \frac{1}{k}\right) < 2\tilde{x}_0(f_k) = f_k(x_0 + x_0') \leqslant \|f_k\| \cdot \|x_0 + x_0'\|$$

$$= \|x_0 + x_0'\| \leqslant \|x_0\| + \|x_0'\| = 2 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

故知 $\|x_0 + x_0'\| = 2$，从而由空间一致凸的假设，可导出 $\|x_0 - x_0'\| = 0$，即 $x_0' = x_0$ 矛盾. 最后，证明 $\forall f_0 \in E^*$，均有 $f_0(x_0) = \tilde{x}_0(f_0)$. 事实上，将此泛函加到上面泛函列 $\{f_n\}$ 中去，那么，对于"新"的泛函列 $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，我们按上面的做法定出一元列 $\{x_n'\}$，同样，可知 $\{x_n'\}$ 收敛于一元 $x_0' \in E$. 从而得出其满足条件

$$\|x_0'\| = 1, \ f_k(x_0') = \tilde{x}_0(f_k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

当然也满足式(5),故由其唯一性的结论可知 $x_0' = x_0$. 因而，此即说明 x_0 即为定理所求. 证毕.

注 9. 可以验明,定理 2 之逆命题是不成立的. 即,的确可以举出一自反(甚至是严格凸的)但却不一致凸的空间之例子(参看文献[41]). 因此,我们还知严格凸的空间未必是一致凸的，反过来有肯定的结论如下:

定理 6 (Clarkson). 一致凸空间必是严格凸的.

证. 反之,如果空间E是一致凸但不是严格凸的,那么,由E不是严格凸的,必定存在E中的两个非零元 x_0, y_0，使其满足

$$\|x_0 + y_0\| = \|x_0\| + \|y_0\|; \ x_0 \neq \alpha y_0 \ (\forall \alpha > 0).$$

于是,我们由此不难导出

$$\left\| \frac{x_0}{\|x_0\|} - \frac{x_0 + y_0}{\|x_0 + y_0\|} \right\| \neq 0; \ \left\| \frac{y_0}{\|y_0\|} - \frac{x_0 + y_0}{\|x_0 + y_0\|} \right\| \neq 0.$$

注意到空间E的一致凸的假设,由上式可知

$$\left\|\frac{x_0}{\|x_0\|}+\frac{x_0+y_0}{\|x_0+y_0\|}\right\| \neq 2;\quad \left\|\frac{y_0}{\|y_0\|}+\frac{x_0+y_0}{\|x_0+y_0\|}\right\| \neq 2.$$

由范数的三角不等式,可导出

$$\left\|\frac{x_0}{\|x_0\|}+\frac{x_0+y_0}{\|x_0+y_0\|}\right\| < 2,\quad \left\|\frac{y_0}{\|y_0\|}+\frac{x_0+y_0}{\|x_0+y_0\|}\right\| < 2.$$

将上两式整理相加,可得到

$$\begin{aligned}&\|(x_0+y_0)\|x_0+y_0\|+(\|x_0\|+\|y_0\|)(x_0+y_0)\|\\&\quad\leqslant \|[x_0\|x_0+y_0\|+\|x_0\|(x_0+y_0)]\|+\|[y_0\|x_0+y_0\|\\&\qquad+\|y_0\|(x_0+y_0)]\|\\&\quad\leqslant 2(\|x_0\|+\|y_0\|)\|x_0+y_0\|.\end{aligned}$$

根据 x_0, y_0 的假设条件,也可导出

$$2(\|x_0\|+\|y_0\|)^2 < 2(\|x_0\|+\|y_0\|)^2,$$

这就产生了矛盾. 证毕.

注 10. 对于一致凸空间 E 我们必须指出, 在其内关于元列 $\{x_n\}\subset E$ 的强、弱收敛之间有一个很有用的性质, 那就是 $x_n\to x_0 \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow[(弱)]{} x_0$ 及 $\|x_n\|\to\|x_0\|$ $(n\to\infty)$. 为系统起见,这个性质将在 §4.5 节专门讨论元列的强、弱收敛关系时给出.

下面, 我们给出关于线性有界泛函保范延拓的唯一性的重要定理:

定理 7 (Taylor). 设 E 为一实(复)赋范线性空间. 那么, 如果 E^* 是严格凸的, 则 E 内任一实(复)线性子空间 E_0 上的任意有界线性泛函 f_0 必可一意地保范延拓为全空间 E 上的有界线性泛函,反之,如果 E 是一个自反空间,上面逆命题也是成立的.

证. 我们先证前半段命题. 事实上, 如果结论不真,设对 E 的某一线性子空间 E_0 上的某一有界线性泛函 f_0, 其可保范延拓为全空间 E 上的两个不同泛函 $f_1,f_2\in E^*$ (显然, $f_0\neq 0$ (泛函),否则 $\|f_0\|=0$, 不可能有两个保范延拓泛函),那么,一方面由 f_1, f_2 为 f_0 的延拓泛函知, $\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}[\lambda f_1+(1-\lambda)f_2](y)&=\lambda f_1(y)+(1-\lambda)f_2(y)\\&=\lambda f_0(y)+(1-\lambda)f_0(y)=f_0(y),\quad \forall y\in E_0.\end{aligned}$$

从而导出

$$\|f_0\| = \sup_{\substack{\|y\|\leqslant 1\\ y\in E_0\subset E}} |f_0(y)| \leqslant \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in E}} |(\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)(x)|$$

$$= \|\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2\|, \quad \forall\lambda\in(0,1). \tag{6}$$

另一方面，由于 f_1, f_2 对 f_0 是“保范”的，即 $\|f_1\| = \|f_2\| = \|f_0\|$. 因而由 E^* 是严格凸的，故由定理 1 可知

$$\left\| \lambda \frac{f_1}{\|f_1\|} + (1-\lambda)\frac{f_2}{\|f_2\|} \right\| < 1, \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

由此则可导出

$$\|\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2\| = \|f_0\|\cdot\left\| \lambda \frac{f_1}{\|f_0\|} + (1-\lambda)\frac{f_2}{\|f_0\|} \right\|$$

$$= \|f_0\|\cdot\left\| \lambda \frac{f_1}{\|f_1\|} + (1-\lambda)\frac{f_2}{\|f_2\|} \right\|$$

$$< \|f_0\|, \quad \forall\lambda\in(0,1). \tag{7}$$

显然，式(6)与(7)是矛盾的，从而证得“保范延拓”必须是唯一的.

下面证明后半段命题. 事实上，首先由 E 自反性的假设，可知，此时，对于 E^{**} 内的任一线性子空间 E_0^{**} 上的任意有界线性泛函扩张到 E^{**} 的保范延拓也必是唯一确定的. 特别地，由此当然可知 E^* 的共轭空间 E^{**} 是满足定理 3 的假设条件的，因而由该定理结论即知空间 E^* 是严格凸的.

(四)

本节最后，我们还必须指出严格凸这个概念对于可分的 Banach 空间是没有什么太大的意义的，因为，对于可分的 Banach 空间而言，我们有下面的定理:

定理 8 (Clarkson). 任一可分 Banach 空间必可线性同胚于一个严格凸空间.

证. 首先，由本节附录中的定理可知，“任一可分 Banach 空间必可等价于连续函数空间 $C[0, 1]$ 内的一个闭线性子空间”. 因此，我们只要对空间 $C[0, 1]$ 证明上面定理就可以了.

其次，我们在 $[0, 1]$ 上取一可数稠集 $\{t_n\}$，并做 $C[0, 1]$ 的相

应一列泛函

$$f_n(x)=x(t_n)\qquad(n=1,2\cdots),\quad \forall x\in C[0,1].$$

显然,我们可以看出 $\{f_n\}\subset C^*[0,1]$,今改 $C[0,1]$ 的范数如下:

$$\|x\|_1=\left[\|x\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}},\ \forall x\in C[0,1]$$

(这里,$\|\cdot\|_1$ 为"范数"是明显的,只要注意到其"三角不等式"便可以由

$$\|x+y\|_1=\left[\|x+y\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(x+y)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left[(\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}(|f_n(x)|+|f_n(y)|)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1,\quad \forall x,\ y\in C[0,1]$$

得到). 那么,由于

$$\|x\|\leqslant\|x\|_1,$$

$$\|x\|_1\leqslant[\|x\|^2+\sup_n|f_n(x)|^2]^{\frac{1}{2}}=[\|x\|^2+\|x\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2\|x\|^2;\quad \forall x\in C[0,1].$$

故知此新范数"$\|\cdot\|_1$"与原范数"$\|\cdot\|$"是等价的,从而知空间 $C[0,1]$ 的元在此两范数定义下,按元"自我"对应是线性同胚的.

最后,证明 $C[0,1]$ 的元按范数"$\|\cdot\|_1$"定义后的赋范空间是严格凸的. 事实上,如果此时有两非零元 x, y, 使得有 $\|x+y\|_1=\|x\|_1+\|y\|_1$, 那么,从上面验证"$\|\cdot\|_1$"满足范数三角不等式的中间式子,便可导出

$$\|x\|_1+\|y\|_1=\left[\|x\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left[\|y\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(y)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}(|f_n(x)|+|f_n(y)|)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

从而由 Cauchy 不等式等号成立的性质以及上式则可导出

$$f_n(x)=\alpha f_n(y)\quad(n=1,2,\cdots),$$

其中，α 为某一正数．注意到泛函 $\{f_n\}$ 的定义以及 $x, y \in C[0, 1]$ 是连续函数，由上式则可导出 ($x(t)$，$\alpha y(t)$ 在 $[0, 1]$ 上的稠集 $\{t_n\}$ 相等) $x = \alpha y$，也即空间在"$\|\cdot\|_1$"范数下是严格凸的．证毕．

附　　录

这里，我们证明在定理 8 中所用到的所谓 $C[0,1]$ 空间的"万有性"定理为此，先介绍一个引理：

引理． 在距离空间中任意自列紧集均可表为 Cantor 完全集的连续映象(值)．

证． 设集 F 为距离空间 E 内一自列紧集．那么，首先，(由 §1.1 习题 9 或 §3.2 的内容)我们可知对于任一趋向零的数列 $\{\varepsilon_n\}$．均可找到有穷的"ε_n 网"，而且可以假设其网由 2^{m_n} 个元素组成(否则可以添加成此数目) $(n = 1, 2, \cdots)$，我们设这些 ε_n-网为 $\{x_k^{(n)}|_{k=1,2,\ldots,2^{m_n}}\}(n = 1,2,\cdots)$．

其次，设球 $S_k^{(1)} = S(x_k^{(1)}, \varepsilon_1)$ $(k = 1, 2, \cdots, 2^{m_1})$，显然 有 $\bigcup\limits_{k=1}^{2^{m_1}} S_k^{(1)} \supset F$．然后，设

$$F_{k_1} = F \cap \overline{S_{k_1}^{(1)}} \quad (k_1 = 1, 2, \cdots, 2^{m_1}),$$

那么，由 $F = \bigcup\limits_{k_1=1}^{2m_1} F_{k_1}$，可得知，该集 F 可以表为 2^{m_1} 个直径不超过 $2\varepsilon_1$ 的闭集之和．此外，F_{k_1} $(k_1 = 1, 2, \cdots, 2^{m_1})$ 作为自列紧集内的闭子集，因而，其亦为自列紧的．

其三，重复上面的做法，我们又可将每一个 F_{k_1} 表为 2^{m_2} 个直径不超过 $2\varepsilon_2$ 的闭集 $F_{k_1 k_2}$ 的形式 $(k_1 = 1, 2, \cdots, 2^{m_1}, k_2 = 1, 2, \cdots, 2^{m_2})\cdots\cdots$，这样做下去(我们可以认为所有这些集都是非空的)．

其四，今设 p_0 为 $[0,1]$ 内一 Cantor 集，由定义可知此集是全部位于第一级闭区间 $\Delta_{i_1}(i_1 = 0, 1)$ 上的；同样也是全部位于第二级闭区间 $\Delta_{i_1 i_2}(i_1 i_2 = 0, 1)$ 上的；…；一般说来全部位于第 j 级闭区间 $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_j}[i_l = 0, 1(l = 1, 2, \cdots, j)]$ 上．并且，我们显然可知：

当将第 m_1 级闭区间从左到右重新编号为 $\tilde{\Delta}_{k_1}$ $(k_1 = 1, 2, \cdots, 2^{m_1})$ 时，那么，每一个 m_1 级闭区间 $\tilde{\Delta}_{k_1}$ 必又包含 2^{m_2} 个 $m_1 + m_2$ 级闭区间．因此，我们

可将后者从左到右重新编号为 $\tilde{\Delta}_{k_1,k_2}$ ($k_1=1,2,\cdots,2^{m_1}$, $k_2=1,2,\cdots,2^{m_2}$) ……，这样做下去就可将上面空间 E 内的自列紧集族 $F_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ 与这里 $[0,1]$ 区间内的闭区间族 $\tilde{\Delta}_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ ($s=1,2,\cdots$) 一一对应起来（参看图 3.16）.

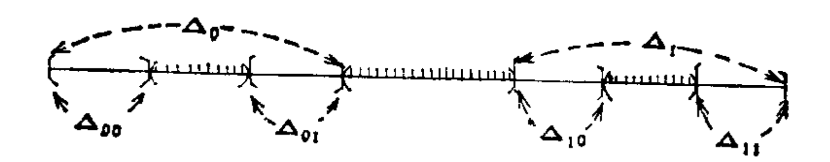


图 3.16

其五，我们说明，对于自列紧集 F 上的任何一点，其必可为上 Cantor 集上一点的映象. 事实上，如果设元 $x\in F$，那么，必有 $x\in F_{k_1^0}$（一般说来，这个 k_1 中的某一值 k_1^0 不是唯一的，我们不妨取其中之最小标数），类似地又有 $x\in F_{k_1^0,k_2^0},\cdots,x\in F_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_s^0},\cdots$. 从而对应的闭区间 $\tilde{\Delta}_{k_1^0},\tilde{\Delta}_{k_1^0k_2^0},\cdots,\tilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_s^0}\cdots$ 必可确定唯一的一点 $t\in P_0$ 与元 x 相对应. 类似地，我们可以看出：以上对应关系反过来也是确定的. 因而，我们就可得到 Cantor 集 P_0 到自列紧 F 上的 1—1 对应的映象

$$x=\varphi(t),\quad \forall t\in P_0.$$

最后，证明以上映象 φ 是连续的. 事实上，如果设 $x_0=\varphi(t_0)$ ($t_0\in P_0$)，那么，对于 E 中 x_0 的任一邻域 $S(x_0,\varepsilon)$，由 $x_0\in F$ 及第二段的做法可知（注意 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$）必有一集 $F_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0}\subset S(x_0,\varepsilon)$. 这样，由于 t_0 为对应闭区间 $\tilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0}$ 上的一点，故当取此区间长为 δ 时，可以看出，只要 $|t-t_0|<\delta, t\in p_0$，必有 $t\in\tilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0}$，从而可导出

$$x=\varphi(t)\in F_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0}\subset S(x_0,\varepsilon).$$

即 $d(x,x_0)<\varepsilon$. 因而得出 $\varphi(t)$ 在 P_0 内任一点 t_0 均是连续的. 证毕.

有了上面的引理，下面就可以引入，关于连续函数空间 $c[0,1]$ "万有性"的著名定理. 1923年，Урысон 曾经抽象地证明了"万有"可分距离空间的存在性，即任意的可分距离空间都与此空间的一部分等距对应. 后来 Banach 和 Mazur 证明了空间 $C[0,1]$ 就是这样的"万有"空间之一.

定理 9（$C[0,1]$ 的"万有性"）. 任意一个可分的 Banach 空间必可等价于 $C[0,1]$ 内的一闭线性子空间.

证. 设 E 为任意一个可分的 Banach 空间，那么，首先，由其可分性可知，$\exists\{x_n\}\subset E$，使得 $\overline{\{x_n\}}=E$. 我们令 $\bar{S}^*(0,1)$ 为 E^* 中的单位闭球，并在其内定义距离

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|},\ \forall f,g\in\bar{S}^*(0,1) \tag{8}$$

(容易验证上面是满足"距离"定义的).

其次,证明 $\bar{S}^*(0,1)$ 在以上距离定义下构成一个(自列)紧距离空间,事实上,由 §1.1 习题(9),已知,对于距离空间而言,紧与自列紧是等价的. 因此,下面只要证明对于 $\bar{S}^*(0,1)$ 中任一元列 $\{f_n\}$,我们必可求得在 $\bar{S}^*(0,1)$ 内收敛(按上距离定义)的子列即可. 然而这是明显的因为只要注意到上节定理 3 前的引理 2 便知. 由上述 $\{f_n\}$ 必可选出一子列 $\{f_{n_k}\}$,使其"∗弱"收敛为 $f_0\in\bar{S}^*(0,1)$. 即有

$$f_{n_k}(x)\to f_0(x)\ (k\to\infty),\quad \forall x\in E.$$

由式(8)的定义,显然可以导出 $d(f_{n_k},f_0)\to 0\ (k\to\infty)$. 此即 $\bar{S}^*(0,1)$ 是一紧距离空间.

其三,利用前面的引理由上述我们可知,必存在一连续变换将[0,1]上某一 Cantor 集 P_0 映象为 $\bar{S}^*(0,1)$. 我们不妨设

$$t\to f_t\in\bar{S}^*(0,1),\ t\in P_0, \tag{9}$$

并且任取 E 中一元 x,定义集[0,1]上的函数 $y_x(t)$,

$$y_x(t)=\begin{cases}f_t(x), & \text{当 } t\in P_0 \text{ 时};\\ \dfrac{y_x(t')-y_x(t'')}{t'-t''}(t-t'')+y_x(t''), & \text{当 } t\notin P_0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{10}$$

(其中,$t'<t<t''$,t',t'' 为 P_0 中距 t 最近的两点,由 P_0 的定义,即为在构成 P_0 时含 t 的"舍去"之"余(开)区间"的两端点)由于式(9)的映象是连续的,因而,我们还知

$$t_n\to t_0\Rightarrow f_{t_n}\xrightarrow{d}f_{t_0}\Rightarrow y_x(t_n)\to y^x(t_0)(n\to\infty),\ \forall\{t_n\}\subset P_0.$$

(其中,d 为按式(8)在 $\bar{S}^*(0,1)$ 上定义的距离.)即上面定义的函数 $y_x(t)$ 在 P_0 集上连续;而且,当在集 $[0,1]\backslash P_0$(为开区间之"并")时,其以 $y_x(t)$ 在其各开区间端点之值线性相连,我们则可将此 $y_x(t)$ 延拓为整个区间 $[0,1]$ 上的连续函数,即 $y_x\in C[0,1]$. 从而可分空间 E 就被映象为 $C[0,1]$ 内的一个子集,并且,根据前面的做法,不难看出,此映象还是分配的,即 E 被映象为 $C[0,1]$内的一个线性子空间,设其为 C_1.

最后,由 Hahn-Banach 定理可知,$\forall x_0\in E$,$\exists f_1\in\bar{S}^*(0,1)$,使得 $|f_1(x_0)|=\|x_0\|$. 设此 $f_1=f_{t_1}$,于是,从 y_{x_0} 的定义则有(注意 $t_1\in P_0$)

$$|y_{x_0}(t_1)|=|f_{t_1}(x_0)|=\|x_0\|;$$

但另一方面，由（10）式又有

$$|y_{x_0}(t)|\leqslant\|x_0\|,\quad \forall t\in[0,1].$$

从而有

$$\|y_{x_0}\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|y_{x_0}(t)|=\|x_0\|.$$

注意 x_0 的任意性，便导出

$$\|y_x\|=\|x\|,\quad \forall x\in E. \tag{11}$$

结合上段的结果，此也即表明空间 E 与 $C[0,1]$ 的线性子空间 C_1 是等价的，至于 C_1 在 $C[0,1]$ 中的闭性显然可由上面式(10)以及 E 的完备性导出．证毕．

习　　题

1．试验证：空间(c)和 $C[a,b]$ 都不是一致凸的．

2．试证明：如果 E 为一致凸空间，ε 为任给的一正数（$0<\varepsilon\leqslant 2$），那么，对于在 E 内单位球面 Σ_1 上满足 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 的那些点 x，y，必有 $\inf\limits_{x,y}(2-\|x+y\|)=2\delta(\varepsilon)>0$．（$\delta(\varepsilon)$-"凸性模"）．

3．试证明：为了 E 是一致凸的，必须且只须 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant 2)$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得只要当元 x，y 满足条件 $\|x\|=\|y\|=1$ 及 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时就一致地有 $\|x+y\|\leqslant 2(1-\delta(\varepsilon))$．

4．试证明：为了 E 是一致凸的，必须且只须 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant 2)\exists\lambda(\varepsilon)>0$，使得只要当元 x，y 满足条件 $\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$ 及 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时，就一致地有 $\|x+y\|\leqslant 2(1-\lambda(\varepsilon))$（提示：必存在一数 $\lambda\in[0,1)$，使得 $\|x-\lambda y\|=\|y-\lambda y\|$）．

5．试证明：为了 E 是一致凸的，必须且只须 $\forall x$、$y\in E$，只要 $\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$ 及 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon_0>0$（$\varepsilon_0$ 为任给定的），就有 $\inf\limits_{x,y}(2-\|x+y\|)>0$．

6．设 E 为一致凸空间，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ 均 E 内的非零元，并设函数

$$\alpha[x,y]=\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|,\text{（“向量”}x,y\text{ 之间的“广义”角）}\ \forall x,y\in E,$$

试证明：

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}[1-2\delta(\alpha_k)]\|x_k\|,$$

（其中，$\alpha_k = \alpha\left[x_k, \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$（$k = 1, 2, \cdots, n$），$\delta$ 即题 2 所确定之（空间的）凸性模函数）

7．在习题 6 的假设下，还设 $\alpha_k > \varepsilon_0 > 0$（$k = 1, 2, \cdots, n$）．试证明：$\forall i$（自然数），均有

$$\sum_{k=1}^{i} \|x_k\| \leqslant \frac{1}{2\delta(\varepsilon_0)}\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| - \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|\right); i = 1,2,\cdots,n.$$

8．试按下面步骤证明：空间 (l^p)，$L^p[0, 1]$，$(p>1)$ 均是一致凸空间（Cl'arkson）．

(i) 对于复"单位圆"内的任一数 $\xi = \rho e^{i\varphi}(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$，当 $q > 2$ 时，函数 $|1 + \xi|^q + |1 - \xi|^q$ 当 $\varphi = 0$ 时取到最大值．

(ii) 对于任意复数 η_1，η_2，不等式

$$|\eta_1 + \eta_2|^q + |\eta_1 - \eta_2|^q \leqslant 2(|\eta_1|^p + |\eta_2|^p)^{q-1}$$

$\left(\text{其中，} 2 > p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$成立．

(iii) 对非负数 $\alpha, \beta \geqslant 0$，不等式

$$2(\alpha^q + \beta^q)^{p-1} \leqslant 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p) \text{（其中，} p \geqslant 2\text{）}$$

成立．

(iv) 在 (l^p)，$L^p[0, 1]$ 空间中，当 $p > 2$ 时，不等式

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leqslant 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

成立．

(v) 对非负数 $\alpha, \beta \geqslant 0$，不等式

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)^s\right]^{1/s} > \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^s\right)^{1/s} + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^s\right)^{1/s} \text{（其中，} 0 < s < 1\text{）}$$

成立．

(vi) ** 在 (l^p)，$L^p[0, 1]$ 空间中，当 $1 < p \leqslant 2$ 时，关系式

$$\|x + y\|^q + \|x - y\|^q \leqslant 2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1}$$

成立．

(vii) 由上面的(iv)及(vi)，证明 (l^p)，$L^p[0, 1]$ 当 $p > 1$ 时是一致凸的．

第四章 共鸣定理

共鸣定理是泛函分析中最重要的定理之一，它和 Hahn-Banach 定理以及下一章的"开映象定理"被誉为线性分析的三个基本原理[49]．由于它在实际与理论上(如求和法理论，插值理论，偏微分方程的稳定性理论以及抽象函数等非线性分析理论等等）的重要性，因此，从十九世纪到如今，它一直被人们所注意．在十九世纪，当时人们从 Fourier 级数的研究中提出了一个这样的问题：能否出现一个周期为 2π 的连续函数，使得它的 Fourier 级数在一预先给定的点是发散的？对于这个著名的问题，1876 年，P. du Bois Reymond 举出了第一个例子[34]．后来，在 1909 年，H. Lebesgue 也证明了这种函数的存在性[124]．在 1911 年，O. Toeplitz 与 H. Steinhaus 对于级数求和的研究；1918 年，H. Hahn 关于插值的研究；1920 年，I. Schur，1922 年，H. Hahn 关于求和法与奇异积分的研究(参看文献 [147]，[135]，[60])；1927 年，S. Banach 与 H. Steinhaus 借助于 1897 年 W.F. Osgood 定理的类似方法，分析上述大量成果，终于总结出了一个一般性的定理[24]，即通常被人们称为的"共鸣"定理或"一致有界"原理．

在本章我们将介绍共鸣定理(它的原来形式及推广)以及由它的结果和证明方法所涉及到的一些其它内容．

§4.1. 完备空间中的共鸣定理

(一)

在本段，我们将介绍原来的共鸣定理．为此，首先我们给出 1897 年 W. F. Osgood 证明关于连续函数列的一个命题：

定理 (Osgood)． 设 $\{x_n(t)\}$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上的一连续函数

列，那么，只要有

$$\sup_n |x_n(t)| < \infty, \quad \forall t \in (-\infty, \infty),$$

则必存在一闭区间$[\alpha,\beta] \subset (-\infty, \infty)$，使得

$$\sup_n \max_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |x_n(t)| < \infty.$$

证. 反之，如果以上结论不真，则必存在闭区间 Δ_1° 及自然数 n_1，使得$\max\limits_{\Delta_1^\circ} |x_{n_1}(t)| > 1$；于是，利用 $x_{n_1}(t)$的连续性可知，存在闭区间$\Delta_1 \subset \Delta_1^\circ$，使得 $\min\limits_{\Delta_1} |x_{n_1}(t)| > 1$.
同样，取一闭区间$\Delta_2^\circ \subset \Delta_1$ $\left(令\ |\Delta_2^\circ| = \dfrac{|\Delta_1|}{2}\right)$，由以上类似的方法，可知必存在自然数 $n_2 > n_1$，及闭区间 $\Delta_2 \subset \Delta_2^\circ$，使得

$$\min_{\Delta_2} |x_{n_2}(t)| > 2;$$

如此做下去，便可得到一闭区间"套" $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_k \supset \Delta_{k+1} \supset \cdots$；$|\Delta_k| \to 0$ $(k \to \infty)$，及一自然数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$，使其均有

$$\min_{\Delta_k} |x_{n_k}(t)| > k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

于是，由区间套定理，我们可得出一点 $t_0 \in \Delta_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$，因而由上式可导出

$$\sup_k |x_{n_k}(t_0)| = \infty,$$

与原假设矛盾．证毕．

由于上面的定理以及前面大量工作的分析结果，我们不难得出下面的共鸣定理：

定理 1 (Banach-Steinhaus). 设$\{T_n\}$为一列从 Banach 空间 E 分别到另一列赋范线性空间$\{E_n\}$内的连续线性算子，那么，只要有

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty, \quad \forall x \in E,$$

则必有

$$\sup_n \|T_n\| < \infty.$$

证. 首先，由于连续线性算子一定是有界线性算子，而且有

$$\sup_n \|T_n\| = \sup_n \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T_n(x)\|,$$

因此，当$\{T_n\}$为线性算子时，$\forall y \in \bar{S}(y_0, \delta_0)$. 由$x = \dfrac{y-y_0}{\delta_0} \in \bar{S}(\theta, 1)$，有

$$\|T_n(x)\| = \frac{1}{\delta_0}\|T_n(y-y_0)\| \leqslant \frac{1}{\delta_0}(\|T_n(y)\| + \|T_n(y_0)\|).$$

这里，可看出，只要对于E内某一闭球$\bar{S}(y, \delta)$，均有

$$\sup_n \sup_{x\in\bar{S}(y,\delta)} \|T_n(x)\| < \infty, \tag{1}$$

那么定理的结论就成立了(反之亦成立).

其次，我们用归谬法．如果上面的定理结论不成立，那么，式(1)也不能成立．从而，对E内任一个闭球$\bar{S}_1^\circ$，必存在一自然数n_1，使得$\sup_{x\in\bar{S}_1^\circ}\|T_{n_1}(x)\| > 1$；于是，由$T_{n_1}$的连续性可知存在闭球$\bar{S}_1 \subset \bar{S}_1^\circ$，使得

$$\inf_{x\in\bar{S}_1}\|T_{n_1}(x)\| > 1;$$

同样地，取一闭球$\bar{S}_2^\circ \subset \bar{S}_1$(令$d(\bar{S}_2^\circ) = \dfrac{d(\bar{S}_1)}{2}$，其中，$d(\bar{S})$表示球$\bar{S}$的直径)，必存在一自然数$n_2$及闭球$\bar{S}_2 \subset \bar{S}_2^\circ$，使得

$$\inf_{x\in\bar{S}_2}\|T_{n_2}(x)\| > 2;$$

如此做下去，则可归纳得到一闭球"套"$\bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \supset \cdots \supset \bar{S}_k \supset \bar{S}_{k+1} \supset \cdots$；$d(\bar{S}_k) \to 0$ $(k\to\infty)$，及一自然数列$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$，使其均有

$$\inf_{x\in\bar{S}_k}\|T_{n_k}(x)\| > k \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

注意到空间E的完备性，由§1.2 习题 11，可知，$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{S}_k = \{x_0\}$，从而由以上论述可推得

$$\sup_n \|T_n(x_0)\| = \infty.$$

其与原假设矛盾．证毕．

注 1. 上面定理的证明方法通常称为"纲推理"方法，它对于"完备"空间中某些定理的证明常常是有用的（同样在空间完备的假设条件下，证明共鸣定理还可用 Гельфанд 引理[55]的证法和闭图

象定理的证法等等).

注 2. 如果注意到式(1),那么,当用逆否命题的形式来叙述上面的共鸣定理时,可得到下面的结果:

定理 1,. 在定理 1 的假设条件下,如果

$$\sup_n \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x)\| = \infty,$$

则可推出:对于 E 内任一闭球 $\bar{S}(x, \delta)$,必均存在一元 x_0,使得

$$\sup_n \|T_n(x_0)\| = \infty.$$

此即说明,由某一序列的无界性(与 n 有关的元列 $\{x_n\}$ 使 $\|T_n(x_n)\|$ 无界)可以推出另一序列的无界性(常元列 $\{x_n = x_0 | n = 1, 2, \cdots\}$ 使 $\|T_n(x_0)\|$ 无界). 这就是共鸣定理"共鸣"一词的来源. (并且由上面的关系式可知,这样的点 x_0 的集合在 E 内是"稠"的,因而,是"很多"的. 以后,我们还可以对"很多"一词作一个抽象的精确描述,并且指出这样的点比 $\sup_n \|T_n(x)\| < \infty$ 的点实际上要"多得多").

注 3. 上面的定理 1 也可称为"异点凝聚原理"[24]. 因为由注 2 我们可把点列 $\{x_n\}$ (其使得 $\|T_n(x_n)\|$ 发散) 视为某种"奇异点列",而那里的结论却告诉我们这种变动的奇异点列都可以换成一个固定的点 x_0,也即"凝聚"成了一奇异点 x_0.

定理 1 显然可以将 $\{T_n\}$ 换为一列泛函 $\{f_n\} \subset E^*$ 来讨论,并且,我们也不难从空间 E^* 是完备的以及 $E \subset E^{**}$ 的性质直接得出下面一个常用的推论:

推理. 设 E 为一赋范线性空间,元列 $\{x_n\} \subset E$. 那么,只要

$$\sup_n |f(x_n)| < \infty, \quad \forall f \in E^*,$$

则必有

$$\sup_n \|x_n\| < \infty.$$

(二)

在本段,我们将把上面关于完备空间上的共鸣定理,推广到一类常见的"按范 k-拟次加"[15]算子族$\{A_\iota | \iota \in I\}$上去. 首先,我们给

出一个定义:

定义 1. 赋范线性空间 E 上定义的泛函 $p(x)$ (可取 $\pm\infty$值)称为拟次加的[140],是指存在一正常数 k, 使得

$$p(x+y) \leqslant k[p(x)+p(y)], \ \forall x, y, \in E.$$

(这里,定义$\pm\infty$与有限数的运算与实变函数论类似, 而把$+\infty-\infty$视为不定,认为是任何有限数或$\pm\infty$.[126])

注 4. 当 $k=1$ 时, $p(x)$ 即为过去我们熟知 (可取$\pm\infty$) 的"次加" 泛函, 因此次加泛函必为拟次加泛函. 反之则未必成立. 反例可见实轴上的函数 $p(x)=|x|^2$, $\forall x\in \boldsymbol{R}$, 它是 "2-拟次加" 函数,然而显然不是次加函数.

注 5. 不难证明,如果 $p(x)$ 是 k-拟次加泛函,那么

$$p(2^n x) \leqslant (2k)^n p(x),\ p\left(\frac{x}{2^n}\right) \geqslant \frac{p(x)}{(2k)^n},\ p(x-y)\geqslant \frac{p(x)}{k}-p(y),$$

一般有

$$p(nx) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n-2} k^i + 2k^{n-1}\right) p(x)\ (n=1,2,\cdots);\ \forall x, y\in E.$$

这些关系式是以后常用到的.

注 6. 与次加泛函不同, 对于 $k\neq 1$ 的 k-拟次加泛函而言, 泛函的"强有界"性 (§2.1 定义 2)与连续性未必是等价的. 我们可以举下面两个例子来观察:

例 1. 设在赋范线性空间 E 上定义泛函

$$p_1(x)=\begin{cases}\|x\|, & \text{当 } \|x\| \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ 时;}\\ 2\|x\|, & \text{当 } \|x\| > \dfrac{1}{2} \text{ 时,}\end{cases} \quad \forall x\in E.$$

那么, $p_1(x)$ 是 E 上的 "2-拟次加" 的泛函, 而且均有 $|p_1(x)| \leqslant 2\|x\|$, $\forall x\in E$. 然而在 $\|x\|=\dfrac{1}{2}$ 的 "球面" 上 $p_1(x)$ 都是不连续的,因而 $p(x)$ 不是 E 上的连续泛函.

例 2. 设在赋范线性空间 E 上定义泛函

$$p_\alpha(x)=\|x\|^\alpha (\alpha>0), \quad \forall x\in E.$$

那么，$p_\alpha(x)$ 是 E 上的连续泛函，并且当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，$p_\alpha(x)$ 是 E 上的次加泛函；当 $\alpha>1$ 时，$p_\alpha(x)$ 是 E 上的"$2^{[\alpha]}$-拟次加泛函"（其中，$[\alpha]$表示数 α 的整数部分）。因而，当 $\alpha>1$ 时，$p_\alpha(x)$ 不是 E 上的强有界泛函（这个泛函在 §4.4 中还要用到）。

验． 我们分别来验证上面结论．

1）$p_\alpha(x)$ 在 E 上的连续性是明显的（完全与实函数一样验得）．

2）当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，$p_\alpha(x)=\|x\|^\alpha$ 是 E 上的次加泛函．事实上，由于

$$p_\alpha(x+y)=\|x+y\|^\alpha\leqslant[\|x\|+\|y\|]^\alpha,\quad \forall x,y\in E.$$

当 $\alpha=1$ 时，结论显然成立．如果 $0<\alpha<1$，则当注意到函数 $f(t)=(1+t)^\alpha-t^\alpha$，$t>0$ 时是一个减函数（可用微分法验证）．因而知当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，有 $f(t)\leqslant f(0)$，即

$$(1+t)^\alpha\leqslant 1+t^\alpha,\quad \forall t\in[0,1](0<\alpha<1). \tag{2}$$

从而当 $\|x\|$，$\|y\|$ 不同时为零时（否则结论显然成立），令 $t=\dfrac{\min(\|x\|,\|y\|)}{\max(\|x\|,\|y\|)}$ 代入(2)式则知．

3）当 $\alpha>1$ 时，$p_\alpha(x)=\|x\|^\alpha$ 是 E 上的"$2^{[\alpha]}$-拟次加泛函"．事实上，用归纳法，我们有

$$(\|x\|+\|y\|)^n\leqslant 2^{n-1}(\|x\|^n+\|y\|^n)$$
$$(n=1,2,\cdots),\ \forall x,y\in E.$$

因而，$\forall\alpha>1$，当用 $[\alpha]$，(α) 分别表示 α 的"整数部分"与"小数部分"时，由上式及前面(2)则可导出

$$\begin{aligned}(\|x\|+\|y\|)^\alpha&=(\|x\|+\|y\|)^{[\alpha]}\cdot(\|x\|+\|y\|)^{(\alpha)}\\&\leqslant 2^{[\alpha]-1}(\|x\|^{[\alpha]}+\|y\|^{[\alpha]})\cdot(\|x\|^{(\alpha)}+\|y\|^{(\alpha)})\\&=2^{[\alpha]-1}(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha+\|x\|^{[\alpha]}\cdot\|y\|^{(\alpha)}\\&\qquad+\|y\|^{[\alpha]}\cdot\|x\|^{(\alpha)}),\end{aligned}$$

注意到不等式

$$(\|x\|^{[\alpha]}-\|y\|^{[\alpha]})(\|x\|^{(\alpha)}-\|y\|^{(\alpha)})\geqslant 0,$$

可推得

$$(\|x\|+\|y\|)^\alpha\leqslant 2^{[\alpha]-1}(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha+\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha)$$

$$= 2^{[\alpha]}(\|x\|^{\alpha} + \|y\|^{\alpha}), \quad \forall x, y \in E.$$

4）当 $\alpha > 1$ 时，$p_\alpha(x)$ 不是 E 上的强有界泛函，这是显然的．验毕．

下面给出两个引理（它也是证明共鸣定理的基础）．

引理 1. 设 $p(x)$ 为赋范线性空间 E 上的"k-拟次加"泛函，那么，只要 $p(x)$ 在 E 内某一闭球 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$ 上数值有上界（或有 $p(x) < \infty$），且存在一正数 λ_0，使得 $p(-\lambda_0 x_0) < \infty$．则泛函 $p(x)$ 在 E 的任意原心闭球 $\bar{S}(\theta, r)$ 上均也数值有上界．（对应地有 $p(x) < \infty$.）[1)]

证． 首先，由泛函 $p(x)$ 的 k-拟次加性，由注 5，已知

$$p(nx) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n-2} k^i + 2k^{n-1}\right) p(x) \quad (n = 1, 2, \cdots), \ \forall x \in E,$$

因此，如果 $x_0 = \theta$，那么，由于任给的一闭球 $\bar{S}(\theta, r)$，我们知必存在一正整数 n_0，使得 $\bar{S}(\theta, r) \subset n_0 \bar{S}(x_0 \delta_0)$（取 $r \leqslant n_0 \delta_0$ 即可），因而，由上式立即可得结论．

下面，对于 $x_0 \neq \theta$ 验证此命题．由于对于元 x_0，数 δ_0，$\exists n_0$（自然数）使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $\|x_0\| < n\delta_0$．此外，对于上面假设的 λ 及这里的 n_0，我们又可找出两正整数 $n_1, n_2 > n_0$，使得 $n_1 \leqslant n_2\lambda_0 < n_1 + 1$．

今设 $\delta^* = \min\{[(n_1 + 1) - n_2\lambda_0]\|x_0\|, \delta_0\}$，显然 $\delta^* > 0$．此时，对于 E 中的任意原心闭球 $\bar{S}(\theta, r)$，$\exists N$（自然数），使得 $\frac{r}{2^N} < \delta^*$，于是，我们有

$$\forall x \in \bar{S}(\theta, r),$$

$$p(x) = p\left(2^N \frac{x}{2^N}\right) \leqslant (2k)^N p\left(\frac{x}{2^N}\right)$$

$$\leqslant (2k)^N \cdot k\left[p\left(\frac{x}{2^N} + n_2\lambda_0 x_0\right) + p(-n_2\lambda_0 x_0)\right].$$

注意到

1）这里及以后，我们常用附加"括号"的简练写法，并列出两个命题的结论．

$$p\left(\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0\right)=p\left(n_1\frac{\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0}{n_1}\right)$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n_1-2}k^i+2k^{n_1-1}\right)\cdot\ p\left(\frac{\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0}{n_1}\right),$$

但是，

$$\left\|\frac{\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0}{n_1}-x_0\right\|=\frac{1}{n_1}\left\|\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0-n_1x_0\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{n_1}\left[\left\|\frac{x}{2^N}\right\|+(n_2\lambda_0-n_1)\|x_0\|\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n_1}[\delta^*+(n_2\lambda_0\ \ -n_1)\|x_0\|]$$

$$\leqslant\frac{1}{n_1}\{[n_1+1)-n_2\lambda_0]\|x_0\|+(n_2\lambda_0-n_1)\|x_0\|\}$$

$$=\frac{1}{n_1}\|x_0\|<\frac{1}{n_1}n_1\delta_0=\delta_0.$$

知元 $\dfrac{\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0}{n_1}\in\bar{S}(x_0,\delta_0)$，从而有

$$p\left(\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0\right)<\left(\sum_{i=1}^{n_1-2}k^i+2k^{n_1-1}\right)\beta_0$$

(β_0 为 $p(x)$ 在球 $\bar{S}(x_0,\delta_0)$ 上数值的某一上界)．(相应地有 $p\left(\frac{x}{2^N}+n_2\lambda_0x_0\right)<\infty$.)由

$$p(-n_2\lambda_0x_0)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n_2-2}k^i+2k^{n_2-1}\right)p(-\lambda_0x_0)<\infty$$

以及上面第一个关系式，我们便可导出

$$p(x)<(2k)^N\cdot k\cdot\left\{\left(\sum_{i=1}^{n_1-2}k^i+2k^{n_1-1}\right)\beta_0\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{n_2-2}k^2+2k^{n_2-1}\right)p\,(-\lambda_0x_0)\right\}(<\infty).$$

(对应地有 $p(x)<\infty$.) 证毕。

引理 2. 在引理 1 的假设下，k-拟次加泛函 $p(x)$ 或者在全空间 E 上恒取 $-\infty$，或者在 E 的任意原心闭球 $\bar{S}(\theta, r)$ 上数值有界．(相应地有 $|p(x)|<\infty$.)

证. 如果泛函 $p(x)$ 在 E 上不恒取 $-\infty$，则必存在一元 $x_1 \in E$，使得 $p(x_1) \neq -\infty$，于是，根据引理 1 的结论，知泛函 $p(x)$ 在原心闭球 $\bar{S}(\theta, r+\|x_1\|)$ 上的值有上界，不妨设其一上界为 β_1 (相应地有 $p(x)<\infty$)；这样，$\forall x \in \bar{S}(\theta, r)$，由于

$$\|x_1 - x\| \leqslant \|x_1\| + \|x\| \leqslant \|x_1\| + r,$$

故知元 $x_1 - x \in \bar{S}(\theta, r+\|x_1\|)$，因而有（注意到本节注 5）

$$p(x) = p[x_1 - (x_1 - x)] \geqslant \frac{p(x_1)}{k} - p(x_1 - x)$$

$$> \frac{p(x_1)}{k} - \beta_1 (> -\infty).$$

(相应地有 $p(x) > -\infty$.)

此即泛函 $p(x)$ 在球 $\bar{S}(\theta, r)$ 内的值亦有下界．(相应地有 $p(x) > -\infty$.) 由以上两结果则导出 $p(x)$ 在 E 的任意闭球 $\bar{S}(\theta, r)$ 上均数值有界．(对应地有 $|p(x)|<\infty$，也即泛函 $p(x)$ 在全空间 E 均取有限值.)证毕．

注 7. 为了在 §4.4 中讨论的需要，这里，请注意：上面的两个引理对于具有"β 级绝对齐性"($\beta>0$) 的赋"准范"线性空间亦是正确的．因为在这种空间 E_* 中，关于准范有关系式

$$\|\lambda x\|_* = |\lambda|^\beta \|x\|_*, \ \forall \lambda \in \boldsymbol{K}, \ x \in E_*.$$

因此，在引理 1 的证明中，只要作某些修改，即当选择两个正整数 $n_1, n_2 > n_0$ 时，使得 $n_1^\beta > n_0$ 也成立；只是 δ^* 要改取为 $\delta^* = \min\{[1-(n_2\lambda_0 - n_1)^\beta]\|x_0\|, \delta_0\}$；选适合条件 $\frac{r}{2^{\beta N}} < \delta^*$ 的正整数 N，则原推导仍可行．

注 8. 从引理 2 我们可以看到，对于在空间 E 上不恒取 $-\infty$ 的泛函 $p(x)$，其在任意有界集上"数值有界"性的讨论均可归结为其在该集上"数值有上界"性的讨论．

有了上面的引理，我们就可将(一)中的在完备空间中的共鸣

定理推广到下面一类非线性泛函族中去．为此，我们先给出定义．

定义 2. 从赋范线性空间 E 到 E_1 内的算子 A 称为按范 k-拟次加的，是指对于正常数 k，$\|A(x)\|$ 为 E 上 k-拟次加泛函．

注 9. 显然，我们容易看到，E 上的有界线性算子必为按范次加算子，更一般地，例如，在连续函数空间 $C[a, b]$ 上定义的算子

$$A_\alpha(x) = [x(t)]^\alpha, \quad \forall x = x(t) \in C[a, b] \ (\alpha > 0),$$

由引理 1 前的例 2，可知其均为"按范 $2^{[\alpha]}$-拟次加"算子．

下面的定理是定理 1 的推广．

定理 2. 设 $\{A_\iota | \iota \in I\}$ 为一族从 Banach 空间 E 分别到一族赋范线性空间 $\{E_\iota | \iota \in I\}$ 内的"按范 k-拟次加"算子．那么，只要其满足条件

(i) 存在 E 的某一族"同心球" $\{\bar{S}(x_0, \delta_\iota) | \iota \in I\}$ 和一正常数 β，使得一致地有

$$\|A_\iota(x)\| < \beta, \quad \forall x \in \bar{S}(x_0, \delta_\iota) \ (\iota \in I)$$

成立．

(ii) 存在元 $-x_0$ 的一个球 $\bar{S}(-x_0, \delta_0)$，使得

$$\sup_{\iota \in I} \|A_\iota(x)\| < \infty, \quad \forall x \in \bar{S}(-x_0, \delta_0),$$

那么，必有

$$\sup_{\iota \in I} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|A_\iota(x)\| < \infty.$$

证．下面，我们将利用引理 1，用归谬法导出本结论．首先，令泛函

$$p(x) = \sup_{\iota \in I} \|A_\iota(x)\|, \quad \forall x \in E.$$

显然，其为 E 上的一"k-拟次加"正泛函，并且，由所设条件(i)可得

$$p(x_0) = \sup_{\iota \in I} \|A_\iota(x_0)\| < \beta < \infty$$

及

$$p(x) < \infty, \quad \forall x \in \bar{S}(-x_0, \delta_0).$$

因而由引理 2 (或引理 1) 可知，如果本定理结论不成立，即

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |p(x)| = \sup_{\iota \in I} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|A_\iota(x)\| = \infty,$$

那么，在以元 $-x_0$ 为心的任意闭球上，泛函 $p(x)$ 的值都必须是

无上界的.

于是,对于球 $\bar{S}_1(-x_0)=\bar{S}\left(-x_0,\dfrac{\delta_0}{2}\right)$ 及正数 $\alpha_1=kp(-x_0)+k^2(\beta+1)$ 而言,必有一元 $x_1\in\bar{S}_1(-x_0)$, 使得

$$p(x_1)>\alpha_1=kp(-x_0)+k^2(\beta+1),$$

从而由 $p(x)$ 所设,此时必存在 $\iota_1\in I$, 使得

$$\begin{aligned}\|A_{\iota_1}(x_1)\|&\geqslant kp(-x_0)+k^2(\beta+1)_\iota\\&\geqslant k\|A_{\iota_1}(-x_0)\|_\iota+k^2(\beta+1);\end{aligned}$$

类似地,对于球 $\bar{S}_2(-x_0)=\bar{S}(-x_0,\delta_0/2^2)\cap\bar{S}(-x_0,\delta_{\iota_1}/2)$, 及正数 $\alpha_2=kp(-x_0-(x_0+x_1))+k^2(\beta+2)$,必存在一元 $x_2\in\bar{S}_2(-x_0)$ 及 $\iota_2\in I$, 使得

$$\|A_{\iota_2}(x_2)\|\geqslant k\|A_{\iota_2}(-x_0-(x_1+x_0))\|+k^2(\beta+2);$$

继续这样做下去,便可以选出一点列$\{x_n\}$和下标列$\{\iota_n\}$,使得

$x_n\in\bar{S}_n(-x_0)=\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}[\bar{S}(-x_0,\delta_0/2^n)\cap\bar{S}(-x_0,\delta_{\iota_k}/2^{n-k})]$, $\iota_n\in I(n=1,2,\cdots)$, 并满足

$$\|A_{\iota_n}(x_n)\|\geqslant k\left\|A_{\iota_n}\left[-x_0-\sum_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)\right]\right\|+k^2(\beta+n).$$

(上面,根据其取法可知

$$\begin{aligned}&\left\|\left[-x_0-\sum_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)\right]-(-x_0)\right\|\\&=\left\|\sum_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\|x_k+x_0\|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\delta_0}{2^k}<\delta_0.\end{aligned}$$

从而有

$$\left[-x_0-\sum_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)\right]\in\bar{S}(-x_0,\delta_0)\qquad(n=2,3,\cdots).$$

由上面假设条件 (ii), 可知上述的 $p\left[-x_0-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)\right]$对任意的 $n\geqslant2$ 均为确定的有限正数.)因此, 根据空间的完备性和上面括号内的范数估计式可知元 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k+x_0)$ 是存在的 (§1.2 习

题 9)，且由于

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+x_0)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\|(x_k+x_0)\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_0}{2^k}=\delta_0,$$

从而知 $x^*=-x_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k+x_0)\in\bar{S}(-x_0,\delta)$，因而由所设条件(ii)应有

$$\sup_{l\in I}\|A_l(x^*)\|<\infty. \tag{3}$$

但另一方面，又由

$$\left\|\left[x_0-\sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k+x_0)\right]-x_0\right\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k+x_0)\right\|$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\|x_k+x_0\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_{l_n}}{2^k}=\delta_{l_n},$$

因而知 $x_0-\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(x_k-x_0)\in\bar{S}(x_0,\delta_{l_n})$ $(n=1,2,\cdots)$，故由假设条件(i)应有

$$\left\|A_{l_n}\left(x_0-\sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k+x_0)\right)\right\|\leqslant\beta \quad (n=1,2,\cdots). \tag{4}$$

最后，再由算子的按范 k-拟次加性，我们可得到

$$\|A_{l_n}(x^*)\|=\left\|A_{l_n}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+x_0)-x_0\right]\right\|$$

$$=\left\|A_{l_n}\left[(x_n+x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)-x_0\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k+x_0)\right]\right\|=\left\|A_{l_n}\left\{x_n-\left[-x_0\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\sum_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)\right]-\left[x_0-\sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k+x_0)\right]\right\}\right\|$$

$$\geqslant\frac{\|A_{l_n}(x_n)\|}{k^2}-\frac{\left\|A_{l_n}\left[-x_0-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_k+x_0)\right]\right\|}{k}$$

$$-\left\|A_{l_n}\left[x_0-\sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k+x_0)\right]\right\|,$$

根据前面$\{x_n\}$的取法及式(7)，我们可推得

$$\|A_{l_n}(x^*)\|\geqslant\beta+n-\beta=n\ (n=1,2,\cdots),$$

从而导出

$$\sup_{l\in I}\|A_l(x^*)\|=+\infty. \tag{5}$$

然而，式(5)与(3)不能同时成立。因此矛盾。证毕。

注 10. 在定理 2 中，当把Banach空间 E 换为 E 内的单位闭球 $\bar{S}(0,1)$ 时，其相应命题仍是正确的。

习 题

1. 试验证本节注 5.

2. 试证明：如果赋范线性空间 E 上的泛函 $p(x)$ 满足条件

$$p(x-y)\leqslant k[p(x)+p(y)],\ \forall x,y\in E,$$

其中，k 为一正常数，那么，

(i) $p(x)$ 亦为拟次加泛函。

(ii) $p(x)<\infty\Leftrightarrow p(-x)<\infty,\ \forall x\in E.$

3. 试证明：如果 $p(x)$ 为"k-拟次加"有限(不取$\pm\infty$)泛函，则

(i) 当 $k>\frac{1}{2}$ 时，必有 $p(\theta)\geqslant 0$；

(ii) 当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，必有 $p(x)\leqslant 0,\ \forall x\in E$ (负泛函)。

(iii) 如果 $p(\theta)=0$ 时，则有当 $k>1$ 时，$p(x)\geqslant 0$ (正泛函)；当 $k<1$ 时，$p(x)\leqslant 0$ (负泛函)。

4. 试证明：在正实轴$[0,\infty)$上定义的两实函数 $f(x)$，$g(x)$有如下性质：

(i) 如果 $f(x)$ 是正的 k-拟次加函数，$g(x)$是正的单减函数，则 $f(x)g(x)$ 亦为 k-拟次加函数。

(ii) 如果 $f(x)$ 是 k-拟次加单增函数，$g(x)$ 是一次加正函数，则 $f[g(x)]$ 亦为 k-拟次加函数。

(iii) 如果 $f(x)$ 为一次加正函数，则对于任意数 $\alpha\geqslant 0$，函数 $\ln[f(x)+(1+\alpha)]$ 亦必为次加函数。

(iv) 如果函数 $F(x)$ 满足条件 $\sup\limits_{x}F(x)\leqslant k\cdot\inf\limits_{x}F(x)$，($k$ 为某一正数)，

则$F(x)$必为"$\frac{k}{2}$-拟次加"函数.

5. 试证明本节注7.

6. 设$\{A_l | l \in I\}$为定义在Banach空间E上的一族按范k-拟次加算子,并满足

$$\sup_l \|A_l(x)\| < \infty, \quad \forall x \in E.$$

试证明:只要存在E中一点x_0,使得$\sup_l \|A_l(x_0)\| < \infty$,且泛函$\|A_l(x)\|$ $(l \in I)$均在x_0点"上半连续",那么有

$$\sup_l \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_l(x)\| < \infty.$$

7. 在习题6中,如果在点$x_0 \in E$,泛函$\sup_l \|A_l(x)\|$是"上半连续"的,那么,当算子族定义的空间E不是完备时,原结证亦正确.

8. 在习题6中,如果在点$x_0 \in E$,泛函

$$w(x) = \sup_l \|A_l(x)\| - \inf_l \|A_l(x)\|$$

是"上半连续"的,则当算子族定义的空间E不完备时,原结论亦正确.

9. 设$\{T_l | l \in I\}$为赋范线性空间E上定义的一族有界可加算子. 试证明:泛函$p(x) = \sup_l \|T_l(x)\|$必为E上的次加正齐性"下半连续"的泛函.

(注意,我们称赋范线性空间E上的泛函$p(x)$在x_0点是"上(下)半连续"的,是指$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow p(x) \leq p(x_0) + \varepsilon$, $(p(x_0) - \varepsilon \leq p(x))$成立.)

10. 证明Гельфанд引理:对于Banach空间E上的非负、次加、正齐性泛函$p(x)$,如果$\forall x \in E, x_n \to x$,均有$\lim_{n \to \infty} p(x_n) \geq p(x)$,那么,$p(x)$必强有界.

§4.2. 不完备空间中的共鸣定理

(一)

本节介绍不完备的"第二纲"线性赋范空间中,一类非线性算子族的共鸣定理. 由于空间无完备性的假设,因此,上一节定理的证明方法已经失效了. 我们必须充分利用这个"第二纲"集的特点给出另一个新的证明方法. 在本节中,在空间以及算子族的要求条件方面都把上节的共鸣定理作了进一步的推广.

下面,我们首先来介绍一下"纲"(Baire纲)的概念:

定义 1. 距离空间E中的集A称为是第一纲的，是指它可以表示成可列个"疏集"之并，即

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n;\quad \overline{E\backslash \overline{B}_n}=E \quad (n=1,2,\cdots).$$

凡不是第一纲的集，则称为是第二纲的. 一个空间称为第一纲的或第二纲的是指它自身是第一纲集或第二纲集.

注 1. 完备的距离空间必为第二纲的.

反之，若设一完备空间E是第一纲的即有

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中，B_n均是E中的疏集. 任取E中的一个闭球$\bar{S}(x_0,1)$ ($x_0\in E$)，由B_1是疏集的性质可知，在$\bar{S}(x_0,1)$内存在一闭球$\bar{S}(x_1,r_1)$使得$r_1<\frac{1}{2}$，并且$\bar{S}(x_1,r_1)$不含有集B_1中的点；类似地，我们对于所得的球$\bar{S}(x_1,r_1)$对疏集B_2讨论；……. 这样用§4.1定理1证明中的所谓"纲推理"方法，便可得到一点$x'\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{S}(x_n,r_n)$，且有$x'\notin B_n(n=1,2,\cdots)$. 因此与上面$E$的分解关系式矛盾. 验完.

注 2. 当E为一个距离空间，E_0为其一子空间时，E_0为E内的第一纲集与E_0"自身"是第一纲空间的概念并不是一回事.

例如，在二维实欧氏空间$\boldsymbol{R}^2$中，其中的一维子空间$\boldsymbol{R}$虽然是$\boldsymbol{R}^2$内的第一纲集(因$\boldsymbol{R}$的闭包不含$\boldsymbol{R}^2\backslash\boldsymbol{R}$的内点，故其自身就是$\boldsymbol{R}^2$内的一个"疏集")，然而$\boldsymbol{R}$自身却构成一个完备距离空间，因而，由上面注1可知，其是第二纲空间.

注 3. 设E为一距离空间，$E_0\subset E$，如果E_0是E内的第一纲集，且E_0稠于E，则E_0自己也构成第一纲空间.

事实上，当$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$时，如果有一集$B_n\subset E_0$，使得$B_n$在$E_0$内的闭包$\bar{B}_n^{\triangle}\supset\bar{S}^{\triangle}(x_0,\delta_0)$ (E_0内的闭球)，那么，由E_0稠于E，

故知 B_n 在 E 内的闭包 $\bar{B}_n \supset \bar{S}(x_0, \delta_0)$ (E 内的闭球). 因而与 E_0 为 E 内的第一纲集的假设矛盾.

注 4. 利用"Hamel 基底"可以在任意无穷维 Banach 空间 E 内找出不完备的第二纲线性子空间 (Hausdorff)[65].

令 E 的 Hamel 基底是 B (即 E 中任意元均可用 B 中的有限元之线性组合来唯一表出), 从 B 中取一可列真子集 $\{h_n\} \subset B$, 并令线性子空间

$$E_0 = [B \setminus \{h_n\}]; \quad E_n = [B \setminus \{h_k |_{k \geqslant n+1}\}] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(这里, 与过去一样, 符号 $[M]$ 表示由 M 所张成的线性子空间). 那么, 显然我们有

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

并且由 E 的完备性, 由注 1 可知, E 是第二纲的, 因此, $E_n (n \geqslant 0)$ 不能全为第一纲集 (因为由定义显然可知, 可列个第一纲集之并仍为第一纲的), 因而不妨设 E_{n_0} 为第二纲的线性子空间. 并且, 当注意到第二纲集的定义时, 可知 $\bar{E}_{n_0}$ 在 E 中必有内点, 即有 E 中一球 $\bar{S}(x_0, \delta_0) \subset \bar{E}_{n_0}$, 于是, 由 $\bar{E}_{n_0}$ 是线性的可推出 $\bar{E}_{n_0} = E$. 另一方面由定义我们显然可知 $E_{n_0} \subsetneqq E$, 因此可导得 $E_{n_0} \neq \bar{E}_{n_0}$, 即 E_{n_0} 不是闭集, 当然 E_{n_0} 不会是完备空间. 所以, E 的线性子空间 E_{n_0} 即为所要求的.

下面, 我们引出较上节更广泛的一类非线性算子族.

定义 2. 从赋范线性空间 E 分别到赋范线性空间 $\{E_\iota | \iota \in I\}$ 的一类算子族 $\{A_\iota | \iota \in I\}$ 称为是广义按范 k-拟次加的[15], 是指存在一正常数 k, 其对于任意的"下标" $\iota \in I$, 对应地有 $\iota' \in I$, 使得一致地有式

$$\|A_\iota(x+y)\| \leqslant k[\|A_{\iota'}(x)\| + \|A_{\iota'}(y)\|], \quad \forall x, y \in E$$

成立, 我们常称 ι' 为 ι 的对应拟次加指标.

有了上面的定义, 我们就可把上节的共鸣定理中关于空间完备性以及算子族的要求条件均予以减弱, 从而得到下面两个推广定理[15].

定理 1. 设在"第二纲"空间 E 上定义的"广义"按范 k-拟次加算子族 $\{A_\iota | \iota \in I\}$[1]满足下面条件:

(i) 存在 E 内的某一族"同心球" $\{\bar{S}(x_0, \delta_\iota) | \iota \in I\}$ 和一正常数 β, 使得一致地有

$$\|A_\iota(x)\| < \beta, \quad \forall x \in \bar{S}(x_0, \delta_\iota) \ (\iota \in I),$$

并有 $\sup\limits_\iota \|A_\iota(-x_0)\| < \infty$;

(ii) 在 E 的某球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 内的一个稠的第二纲集 Q 上, 均有

$$\sup_\iota \|A_\iota(x)\| < \infty, \quad \forall x \in Q,$$

并有一正数 λ_1, 使得 $\sup\limits_\iota \|A_\iota(-\lambda_1 x_1)\| < \infty$,

那么,对于 E 的任意闭"原心球" $\bar{S}(\theta, r)$, 必有

$$\sup_\iota \sup_{\|x\| \leq r} \|A_\iota(x)\| < \infty.$$

证. 首先,我们假设

$$p(x) = \sup_\iota \|A_\iota(x)\|, \quad \forall x \in E.$$

显然, $p(x)$ 为空间 E 上的(可取 $+\infty$ 的) k-拟次加泛函(注意 § 4.1 定义 1). 当又设集列

$$P_N = \{x | p(x) < N, x \in Q\} \quad (N = 1, 2, \cdots)$$

时,由定理 1 中的条件(ii)可知,由于 $Q = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} P_N$ 是第二纲集,因而必存在 E 中一球 $\bar{S}(a, \bar{\delta}) \subset \bar{S}(x_1, \delta_1)$ 使得其中某一集 P_{N_0} 满足关系式 $\bar{P}_{N_0} \supset \bar{S}(a, \bar{\delta})$.

下面证明泛函 $p(x)$ 在球 $\bar{S}(a, \bar{\delta})$ 上的值是有上界的. 事实上, $\forall x \in \bar{S}(a, \bar{\delta})$, 当设任给的 $\iota \in I$, 其对应拟次加指标为 $\iota' \in I$, 而 ι' 的对应拟次加指标为 $\iota'' \in I$ 时, 那么, 由于集 P_{N_0} 是稠于球 $\bar{S}(a, \bar{\delta})$的故对上述元 x, 必存在一元 $y \in P_{N_0}$,使得 $\|x - y\| < \delta_{\iota'}$, 即 $x_0 + x - y \in \bar{S}(x_0, \delta_\iota)$. 由算子族的广义按范 k-拟次加性以及上面的假设条件(i)可得到

1) A_ι 为从"赋范线性空间" E 到"赋范线性空间" E_ι 内的算子($\forall \iota \in I$). 以下不再一一说明.

$$\begin{aligned}\|A_\iota(x)\| &= \|A_\iota(x_0 + x - y + y - x_0)\| \\ &\leqslant k(\|A_{\iota'}(x_0 + x - y)\| + \|A_{\iota'}(y - x_0)\|) \\ &\leqslant k\{\beta + k(\|A_{\iota''}(y)\| + \|A_{\iota''}(-x_0)\|)\} \\ &\leqslant k\beta + k^2[p(y) + p(-x_0)] \\ &\leqslant k\beta + k^2N_0 + k^2p(-x_0) \quad (<\infty).\end{aligned}$$

由于最后的结果乃是一与 x 及均无关的有限常数，因此有

$$p(x) = \sup_\iota \|A_\iota(x)\| \leqslant k\beta + k^2N_0 + k^2p(-x_0),$$

即 k-拟次加泛函 $p(x)$ 在球 $\bar{S}(a, \delta)$ 上的数值是有上界的(设其上界为 β_1).

其次，把上面的球 $\bar{S}(a,\delta)$作"平移"，我们取一正整数 m_0，使其

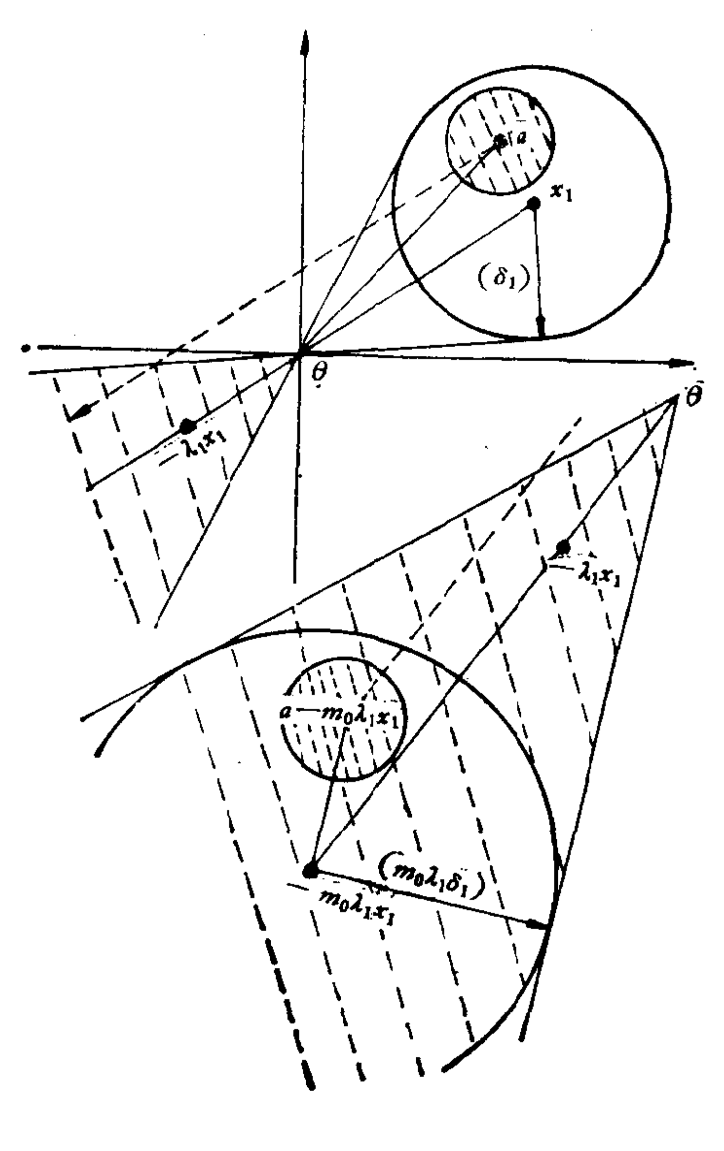


图 4.1

满足 $m_0 > \frac{1}{\lambda_1}\left(1 + \frac{\|a\|}{\bar{\delta}}\right)$，然后，研究球 $\bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta)$ 的性质．由于 $\forall z \in \bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta)$，我们有

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z + m_0\lambda_1 x_1 - m_0\lambda_1 x_1) \\ &\leqslant k\,[p(z + m_0\lambda_1 x_1) + p(-m_0\lambda_1 x_1)], \end{aligned}$$

注意到 $\|z + m_0\lambda_1 x_1 - a\| \leqslant \bar{\delta}$，故知 $z + m_0\lambda_1 x_1 \in \bar{S}(a, \bar{\delta})$．从而由 $p(x)$ 在 $\bar{S}(a, \bar{\delta})$ 上的值有一上界 β_1 以及 $p(-\lambda_1 x_1) < \infty$ 的假设，可得到

$$p(z) \leqslant k\left[\beta_1 + \left(\sum_{i=1}^{m_0-2} k^i + 2k^{m_0-1}\right)p(-\lambda_1 x_1)\right] \ (< \infty).$$

因而导出泛函 $p(x)$ 在球 $\bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta)$ 上也数值有界；另一方面，注意到 m_0 的取法可知，$\forall z \in \bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta)$，我们又有

$\|z + m_0\lambda_1 x_1\| = \|a + [z - (a - m_0\lambda_1 x_1)]\| \leqslant \|a\| + \bar{\delta} < m_0\lambda_1\bar{\delta}$，

即得出 $z \in \bar{S}(-m_0\lambda_1 x_1, m_0\lambda_1\bar{\delta})$．由 E 为赋范线性空间，因而有

$$\bar{S}(-m_0\lambda_1 x_1, m_0\lambda_1\bar{\delta}) = m_0\lambda_1\bar{S}(-x_1, \bar{\delta}) = -m_0\lambda_1\bar{S}(x_1, \bar{\delta}),$$

也即导出

$$\bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta) \subset -m_0\lambda_1\bar{S}(x_1, \bar{\delta}) \subset -m_0\lambda_1\bar{S}(x_1, \delta_1).$$

这样一来，注意到定理的假设条件(ii)，Q 是稠于球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 的，因此必有球 $\bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta)$ 的一个内点 x'，

$$x' \in \bar{S}(x', \delta') \subset \bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta),$$

使得 $x' = -m_0\lambda_1 y'$，其中，$y' \in Q$．同样，由 Q 的假设还可以得到

$$p\left(\frac{-x'}{m_0\lambda_1}\right) = p(y') < \infty.$$

最后，根据前面已知 k-拟次加泛函 $p(x)$ 在球 $\bar{S}(a - m_0\lambda_1 x_1, \delta)$ 上的值是有上界的，且在球 $\bar{S}(x', \delta')$亦如此，所以直接由引理 2 的结果，可导出

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} p(x) < \infty,$$

即 $\sup_t \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|A_t(x)\| < \infty$．证毕．

由定理 1 我们直接可以导出下面的一个常用的推论：

推理. 设在第二纲的赋范线性空间E上定义的广义按范κ-拟次加算子族$\{A_\iota|\iota\in I\}$满足下列条件:

(i) $\sup_\iota\|A_\iota(x)\|<\infty\Longleftrightarrow\sup_\iota\|A_\iota(-x)\|<\infty$, $\forall x\in E$;

(ii) 存在一个正常数β和E中某一族"同心球"$\{\bar S(x_0,\delta_l)|l\in I\}$, 使得一致地有

$$\|A_\iota(x)\|<\beta,\ \forall x\in\bar S(x_0,\delta_\iota)\ (\iota\in I).$$

那么,只要在E的某一个第二纲集Q上,均有

$$\sup_\iota\|A_\iota(x)\|<\infty,\ \forall x\in Q,$$

则对于任意正数r, 便有

$$\sup_\iota\sup_{\|x\|\leqslant r}\|A_\iota(x)\|<\infty.$$

下面,我们再转到一个涉及到"下半连续"的情况来讨论. 我们可以从定理1得出下面的定理:

定理 2. 在定理1中如果将那里的条件(i)换为条件

(i)′ 在E中存在某一族"同心球"$\{S(x_0,\delta_\iota)|\iota\in I\}$, 使得$\forall\iota\in I$, 泛函$\|A_\iota(x)\|$在对应的球$S(x_0,\delta_\iota)$内均是"下半连续"的;并且有

$$\sup_\iota\|A_\iota(x_0)\|<\infty,\ \sup_\iota\|A_\iota(-x_0)\|<\infty,$$

那么,原定理的结论亦成立.

证. 如果我们能从现在的假设条件中将定理1中的假设条件(i)推出来,那么,本定理的结论也就得到了.

首先,与定理1的推导一样,由假设条件(ii)可以得到一球$\bar S(a,\bar\delta)\subset\bar S(x_1,\delta_1)$, 使得集$\bar P_{N_0}\supset\bar S(a,\bar\delta)$.

其次,取一正整数n_0, 使得它满足不等式$[n_0\lambda_1]>1+\dfrac{2\|x_1\|}{\delta_1-\|x_1-a\|}$. (这里,同样用$[\alpha]$表示小于$\alpha$的最大整数). 那么,当设元$b=2n_0\lambda_1x_1-[n_0\lambda_1]a$时,一方面由于

$$\begin{aligned}\|b-[n_0\lambda_1]x_1\|&\leqslant\|2n_0\lambda_1x_1-2[n_0\lambda_1]x_1\|+\|[n_0\lambda_1]x_1-[n_0\lambda_1]a\|\\&\leqslant2\|x_1\|+[n_0\lambda_1]\|x_1-a\|\\&<[n_0\lambda_1](\delta_1-\|x_1-a\|)+[n_0\lambda_1]\|x_1-a\|=[n_0\lambda_1]\delta_1,\end{aligned}$$

知元 $b\in\bar{S}([n_0\lambda_1]x_1, [n_0\lambda_1]\delta_1)=[n_0\lambda_1]\bar{S}(x_1, \delta_1)$；另一方面，由集 Q 的假设不难推出，集 $[n_0\lambda_1]Q$ 亦是稠于球 $[n_0\lambda_1]\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 的(参看图 4.2)．因此，必存在一元 $b^*\in[n_0\lambda_1]Q$，使得 $\|b-b^*\|<\frac{\bar{\delta}}{2}$．

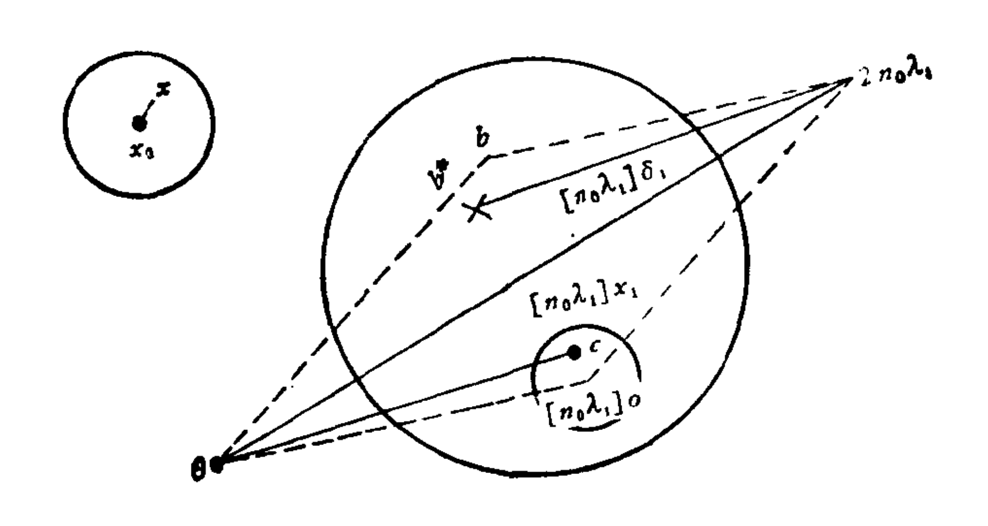


图 4.2

这样，$\forall\iota\in I$，当令 $\bar{\delta}_\iota=\min\left(\delta_\iota, \frac{\bar{\delta}}{2}\right)$ 时，我们证明，相应的泛函 $\|A_\iota(x)\|$ 在开球 $S(x_0, \bar{\delta}_\iota)$ 内的值是一致有上界的($\iota\in I$)．事实上，$\forall$ 元 $x\in S(x_0,\bar{\delta}_\iota)\subset S(x_0, \delta_\iota)$，由于泛函 $\|A_\iota(x)\|$ 在此点是"下半连续"的，故对给定的一正数 ε_0，$\exists\delta_l^*>0$，使得当 $\|y-x\|\leqslant\delta_l^*$ 时，就有

$$\|A_\iota(y)\|\geqslant\|A_\iota(x)\|-\varepsilon_0. \tag{1}$$

于是，当取一元 $c=x-x_0-b^*+2n_0\lambda_1x_1$ 时，由于

$$\|c-[n_0\lambda_1]a\|=\|x-x_0-b^*-2n_0\lambda_1x_1-[n_0\lambda_1]a\|$$

$$\leqslant\|x-x_0\|+\|b-b^*\|<\bar{\delta}_\iota+\frac{\bar{\delta}}{2}\leqslant\frac{\bar{\delta}}{2}+\frac{\bar{\delta}}{2}=\bar{\delta},$$

故知 $c\in\bar{S}([n_0\lambda_1]a, \bar{\delta})\subset[n_0\lambda_1]\bar{S}(a, \bar{\delta})$．因而，$\exists c^*\in[n_0\lambda_1]P_{N_0}$ 使得 $\|c-c^*\|\leqslant\delta_l^*$，即

$$\|x-x_0-b^*+2n_0\lambda_1x_1-c^*\|$$

$$=\|x-[x_0+b^*-2n_0\lambda_1x_1+c^*]\|\leqslant\delta_l^*,$$

因此由式(1)可导出

$$\|A_\iota(x)\| \leqslant \|A_\iota(x_0 + b^* - 2n_0\lambda_1 + c^*)\| + \varepsilon_0$$
$$\leqslant k\|A_{\iota_2}(x_0)\| + k^2\|A_{\iota_2}(b^*)\| + k^3\|A_{\iota_3}(c^*)\|$$
$$+ 2k^4\|A_{\iota_4}(-n_0\lambda_1 x_1)\| + \varepsilon_0.$$

这里，ι_1 为 ι 对应的拟次加指标 ι_{k+1} 为 ι_k 对应的拟次加指标（$k=1, 2, 3$）．注意到假设条件和上式中各元的取法，由上式可导出

$$\|A_\iota(x)\| \leqslant kp(x_0) + k^2p(b^*) + k^3N_0^*$$
$$+ 2\left(\sum_{i=5}^{n_0+2} k^i + 2k^{n_0+3}\right) \quad p(-\lambda_1 x_1) + \varepsilon_0, \ \forall x \in S(x_0, \bar{\delta}_l) \ (\iota \in I).$$

且知上式右端乃是一个与 ι 和 x 均无关的有限正常数．此即推出了$\{A_\iota | \iota \in I\}$在相应的闭“同心球”族 $\left\{\bar{S}\left(x_0, \dfrac{\delta_\iota}{2}\right) \middle| \iota \in I\right\}$ 上是满足定理 1 中的假设条件(i)的．证毕

同样由定理 2， 也可以直接得到下面一个常用的推论:

推理． 设在第二纲赋范线性空间 E 上定义的广义按范 k-拟次加算子族$\{A_\iota | \iota \in I\}$满足

(i) $\sup\limits_\iota \|A_\iota(x)\| < \infty \Longleftrightarrow \sup\limits_\iota \|A_\iota(-x)\| < \infty, \ \forall x \in E$；

(ii) 在 E 中存在某一族 “同心球” $\{\bar{S}(x_0, \delta_\iota) | \iota \in I\}$，使得 $\forall \iota \in I$，泛函 $\|A_\iota(x)\|$ 在对应的球 $S(x_0, \delta_\iota)$ 内均是“下半连续”的，并且有$\sup\limits_\iota \|A_\iota(x_0)\| < \infty$，

那么，只要在 E 的某一个第二纲集 Q 上，均有

$$\sup_\iota \|A_\iota(x)\| < \infty; \ \forall x \in Q.$$

则对于任意的正数 r，便有

$$\sup_\iota \sup_{\|x\| \leqslant r} \|A_\iota(x)\| < \infty.$$

注 5. 上面关于“共鸣定理”的所有命题（只要对证明略作修改)对于具有“β 级绝对齐性”($\beta > 0$)的第二纲赋“准范” 线性空间亦是正确的．

注 6. 在定理 1，2 中，如果将假设条件(i)和(i)′中的元 x_0 取为 θ，那么，当改空间 E 为其内的闭单位球 $\bar{S}_1 = \bar{S}_1(0, 1)$ 时，将原定理的证明略作修改仍是可行的．

注 7. 在上面两定理中所涉及到的假设条件 (ii) 的后半部分是不可取消的（甚至当加强那里的条件为整个球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 时也不行）. 例如，在一维实欧氏空间中，我们就可取一反例为一列函数 $p_n(x)=n(x+|x|)\ (n=1,2,\cdots)$. 其中，将那里的球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 取为负实轴内的任一闭区间，我们就不难看出来了.

注 8. 由定理 1 和定理 2 我们可以看出，如果对于满足那里条件(i)或(i)′ 的 k-拟次加算子族 $\{A_\iota | \iota \in I\}$ 有 $\sup\limits_{\iota} \sup\limits_{\|x\|\leqslant r} \|A_\iota(x)\| = \infty$，那么，$\forall x_1 \in E$ 如有 $\sup\limits_{\iota} \|A_\iota(x_1)\| < \infty$，则在任意以元 $-\lambda x_1$ (λ 为任一正数）为中心的球 $S(-\lambda x_1, \delta)$ 内满足 $\sup\limits_{\iota} \|A_\iota(x)\| < \infty$ 的稠集必定是第一纲的（参看图 4.3）.

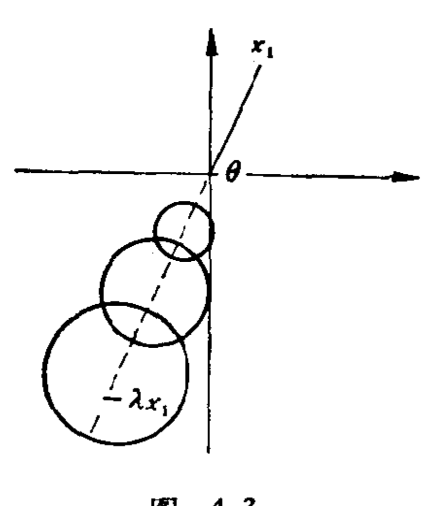


图 4.3

注 9. 定理 1，2 中的条件 (ii) 也可以用条件

(ii)′ 在 E 中某一球 $\bar{S}(x_1, \delta_1)$ 内的某第二纲集 Q 上，以及其对应的某一球 $\bar{S}(-\lambda_1 x_1, \lambda_1 \delta_1)$ (λ_1 为某一正数）内一稠集 D 上，均有 $\sup\limits_{\iota} \|A_\iota(x)\| < \infty$

来代替[15].

注 10. 当上面的定理（推理）成立时，我们还可以对其结论中的值给出下面的估计式为

$$\sup_{\iota} \sup_{\|x\|\leqslant r} \|A_\iota(x)\| = O(r^c)\ (r \to \infty),$$

其中，$c = \dfrac{\ln k}{\ln 2} + 1$. 这个结论对于任意在 E 的单位球上其数值有界的 k-拟次加泛函也均是正确的[140].

（二）

下面，用与上一段的类似方法同样可以得到在第二纲空间上定义（可取 $\pm\infty$）的“凸泛函”族的两个共鸣定理[17].

定理 3. 设 E 为第二纲的赋范线性空间，$\{p_\iota | \iota \in I\}$ 为 E 上定

义的一凸泛函族，其满足条件

(i) 存在 E 内的某一族"同心球" $\{S(x_0, \delta_\iota) | \iota \in I\}$ 和一正常数 β，使得一致地成立下面相应的关系式：

$$p_\iota(x) < \beta, \quad \forall x \in S(x_0, \delta_\iota) \ (\iota \in I);$$

(ii) 在 E 的某一球 $S(x_1, \delta_1)$ 内一第二纲集 Q 上以及对应的球 $S(-\lambda_1 x_1, \lambda_1 \delta_1)$（$\lambda_1$ 为某一正数）内一稠集 D 上，均有

$$\sup_\iota p_\iota(x) < \infty, \ \forall x \in Q, D.$$

那么，在 E 中必存在一闭"原心球" $\bar{S}(\theta, r_0)$，使得或者有 $p_\iota(x) = -\infty$, $\forall x \in \bar{S}(\theta, r_0)$, $\forall \iota \in I$；或者有

$$\sup_\iota \sup_{\|x\| \leq r_0} |p_\iota(x)| < \infty.$$

证. 首先，我们假设泛函

$$p(x) = \sup_\iota p_\iota(x), \quad \forall x \in E.$$

显然，$p(x)$ 亦为空间上（可取 ∞ 值）的凸泛函. 并且，当设集列

$$P_N = \{x | p(x) < N, \ x \in Q\} \qquad (N = 1, 2, \cdots)$$

时，由集 Q 第二纲的假设，同样可以得到 E 中的一球 $\bar{S}(a, \delta^*) \subset S(x_1, \delta_1)$，使得有上述某一集 P_{N_0} 满足关系式，$\bar{P}_{N_0} \supset \bar{S}(a, \delta^*)$.

其次，证明上面定义的凸泛函 $p(x)$，在球 $S(a, \delta^*)$ 内的值是有上界的. 事实上，$\forall x \in S(a, \delta^*)$ 及任意泛函 $p_\iota(\iota \in I)$，由于 $\|x - a\| < \delta^*$，及 x 是球 $S(a, \delta^*)$ 的内点（参看图 4.4），因而，

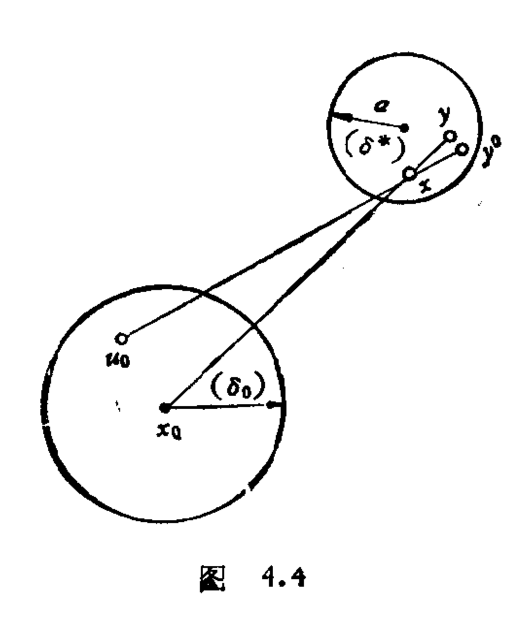


图 4.4

$\exists\lambda_0>0$ $\left(例如,可以取\ \lambda_0=\dfrac{\delta^*-\|x-a\|}{\|x-x_0\|+1}\right)$, 使得元 $y=x+\lambda_0(x-x_0)\in S(a,\delta^*)$. 因而, 注意到集 P_{N_0} 在 $S(a,\delta^*)$ 内稠的假设,我们则可找到一元 $y_0\in P_{N_0}$ 使得 $\|y-y_0\|<\lambda_0\delta_\iota$,于是,当令元 $u_0=x+\dfrac{1}{\lambda_0}(x-y_0)$时, 由

$$\|u_0-x_0\|=\left\|\left[x+\frac{1}{\lambda_0}(x-y_0)\right]-x_0\right\|$$

$$=\left\|\frac{1}{\lambda_0}(x-y_0)-(x_0-x)\right\|=\frac{1}{\lambda_0}\|(x-y_0)-\lambda_0(x_0-x)\|$$

$$=\frac{1}{\lambda_0}\|[x+\lambda_0(x+x_0)]-y_0\|=\frac{1}{\lambda_0}\|y-y_0\|<\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_0\delta_\iota)=\delta_\iota,$$

可导得元 $u_0\in S(x_0,\delta_\iota)$. 于是,由上面 u_0 的取法, 我们有 $x=\dfrac{\lambda_0}{1+\lambda_0}u_0+\dfrac{1}{1+\lambda_0}y_0$, 故由泛函 $p_\iota(x)$ 的凸性以及上面元 u_0, y_0 的性质,可导出

$$p_\iota(x)=p_\iota\left(\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}u_0+\frac{1}{1+\lambda_0}y_0\right)$$

$$\leqslant\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}p_\iota(u_0)+\frac{1}{1+\lambda_0}p_\iota(y_0)$$

$$<\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}\beta+\frac{1}{1+\lambda_0}N_0$$

$$\leqslant\beta+N_0,\quad \forall x\in S(a,\delta^*)\ (\iota\in I).$$

注意到上式最后端乃是一个与 x 及 ι 均无关的常数;因而,导出

$$p(x)=\sup_\iota p_\iota(x)<\beta+N_0,\ \forall x\in S(a,\delta^*).$$

下面,证明上述凸泛函 $p(x)$ 在 E 的某一"原心闭球" $\bar S(\theta,r)$ 上的值也是有上界的. 事实上,如果上面的元 $a\neq\theta$, 我们取正数

$$r_0=\lambda_1\left[\frac{\delta^*(\|a\|+\delta^*-\varepsilon)-\varepsilon\|a\|}{\lambda_1(\|a\|+\delta^*-\varepsilon)+\|a\|}\right]$$

(其中, $0<\varepsilon<\delta^*$), 那么,由于元

$$\left(1+\frac{\delta^*-\varepsilon}{\|a\|}\right)(-\lambda_1 a)\in\bar S(-\lambda_1 a,\lambda_1\delta^*)\subset\bar S(-\lambda_1 x_1,\lambda_1\delta_1),$$

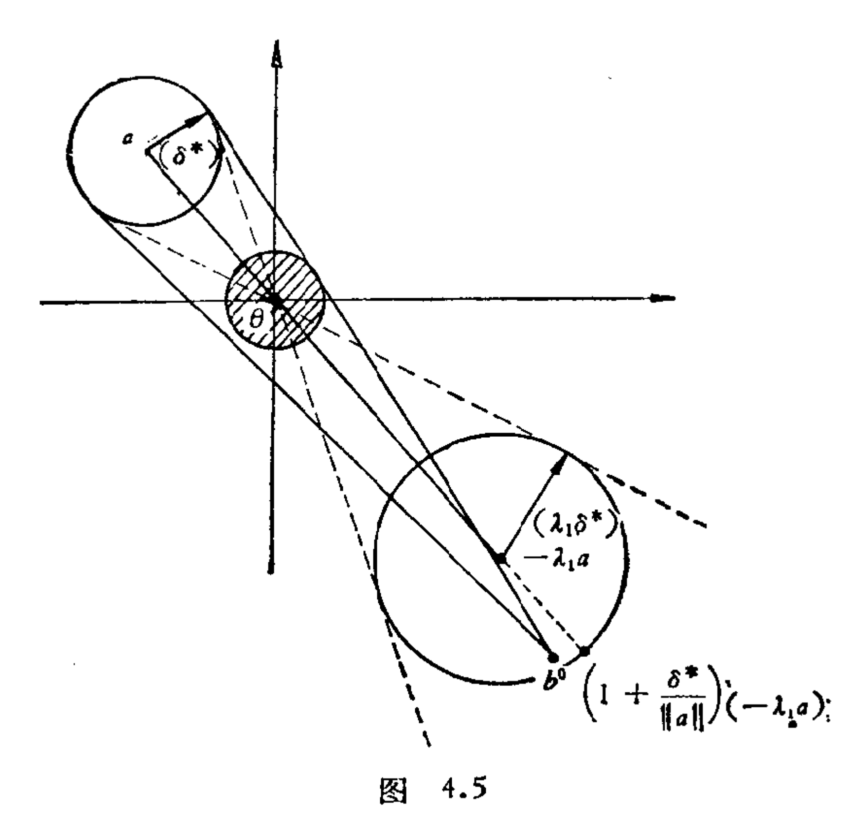


图 4.5

因此，由定理假设可知，必有一元 $b_0 \in D$，使得

$$\left\| b_0 - \left(1 + \frac{\delta^* - \varepsilon}{\|a\|}\right)(-\lambda_1 a) \right\| < \lambda_1 \varepsilon.$$

从而，$\forall x \in \bar{S}(\theta, r_0)$，由于元

$$y = b_0 + \frac{\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) + \|a\|}{\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon)}(x - b_0),$$

满足

$$\|y - a\| = \frac{1}{\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon)} \Big\| \lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) b_0 + [\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) + \|a\|](x - b_0) - \lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) a \Big\|.$$

由上式中范数的关系式，

$$\|(\cdot)\| = \Big\| -\|a\| b_0 + [\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) + \|a\|] x - \lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) a \Big\| \leqslant [\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) + \|a\|]\|x\| + \|a\| \cdot \left\| b_0 - \left(1 + \frac{\delta^* - \varepsilon}{\|a\|}\right)(-\lambda_1 a) \right\|,$$

注意到元 b_0 以及元 x 的取法，我们可得到

$$(\text{上式}) < [\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) + \|a\|]r_0 + \|a\|\lambda_1\varepsilon$$
$$= \lambda_1[\delta^*(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) - \varepsilon\|a\|] + \lambda_1\varepsilon\|a\|$$
$$= \lambda_1\delta^*(\|a\| + \delta^* - \varepsilon).$$

于是，回到原来的关系式，则可导出

$$\|y - a\| < \frac{\lambda_1\delta^*(\|a\| + \delta^* - \varepsilon)}{\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon)} = \delta^*,$$

即 $y \in S(a, \delta^*)$，这样，当假设数

$$\mu = \frac{\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon) + \|a\|}{\lambda_1(\|a\| + \delta^* - \varepsilon)} \quad (0<\varepsilon < \delta^*)$$

时（显然有 $\mu > 1$），由 y 的形成可知 $y - b_0 = \mu(x - b_0)$，因而元 x 可以解出，$x = \frac{1}{\mu}y + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)b\left(0 < \frac{1}{\mu} < 1\right)$. 故由 $p_\iota(x)$ 的凸性以及元 y 与元 b_0 的性质，我们便可导出

$$p_\iota(x) = p_\iota\left[\frac{1}{\mu}y + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)b_0\right] \leqslant \frac{1}{\mu}p_\iota(y) + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)p_\iota(b_0)$$
$$< \beta + N_0 + |\sup_\iota p_\iota(b_0)|, \quad \forall x \in \bar{S}(\theta, r_0) \ (\iota \in I).$$

（当 $\sup\limits_\iota p_\iota(b_0) = -\infty$ 时，上式最后一项可以略去，此时下面的结论仍成立），由上式后端乃为一与 x 及 ι 均无关的常数（设为 β_0^*），我们得到

$$\sup_{\|x\|\leqslant r_0} p(x) = \sup_{\|x\|\leqslant r_0} \sup_\iota p_\iota(x) < \beta_0^*.$$

最后，证明 $p(x)$ 在闭球 $\bar{S}(\theta, r_0)$ 上如果不是恒为 $-\infty$ 的话，则其必也是数值有下界的. 事实上，由于此时存在元 $z_0 \in \bar{S}(\theta, r_0)$，使得 $p(z_0) > -\alpha_0$（这里，α_0 为某一正数），因而，由 $\forall x \in \bar{S}(\theta, r_0)$，$\exists y \in \bar{S}(\theta, 2r_0)$，使得 $\|y\| = 2r_0$ 和 $z_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y$，其中，$0 < \lambda \leqslant 1$（其实，当 $x = z_0$ 时，y 是容易得到的；而当 $x \neq z_0$ 时，先令 $\|x + \mu(z_0 - x)\| = \varphi(\mu)$，显然 $\varphi(\mu)$ 是连续的，且有 $\varphi(0) = \|x\| \leqslant r_0$，$\varphi(\mu) \geqslant \|\mu(z_0 - x)\| - \|x\| \to \infty$ $(\mu \to \infty)$；从而必存在一正数 μ_0，使得 $\varphi(\mu_0) = 2r_0$，故那时可取 $y = x + \mu_0(z_0 - x)$）. 这样，由于 $(1 - \lambda)$ $(y - z_0) = \lambda(z_0 - x)$，和

$\|y-z_0\| \geqslant r_0, \|z_0-x\| \leqslant 2r_0$，则有$\frac{1}{\lambda} \leqslant 3$．由泛函 $p(x)$ 的凸性及以上论述可导出

$$p(z_0) \leqslant \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y),$$

因而有(注意到上段结果)

$$p(x) \geqslant \frac{1}{\lambda}[p(z_0)-(1-\lambda)p(y)]$$

$$\geqslant 3(-\alpha_0-\beta_0^*) > -\infty, \qquad \forall x \in \bar{S}(\theta, r_0).$$

综合上面两段的结论，我们立即导出

$$\sup_{\iota} \sup_{\|x\| \leqslant r_0} |p_\iota(x)| < \infty.$$

证毕．

定理 4. 如果将定理 3 中的条件(i)换为条件

(i)′ 存在 E 内的某一族"同心球" $\{S(x_0, \delta_\iota) | \iota \in I\}$，使得对于任意的 $\iota \in I$，泛函 $p_\iota(x)$ 在对应的球 $S(x_0, \delta_\iota)$ 内均是"下半连续"的；并且存在一正数 λ_0，使得

$$\sup_{\iota} p_\iota[(1+\lambda_0)x_0] < \infty,$$

那么，原定理的结论亦成立．

证．如果能从现在的假设条件中将定理 3 中的假设条件 (i) 推出来，那么，本定理的结论也就得到了．下面，我们就来验证这一事实．

首先，从假设条件 (ii) 同样可得到一球 $\bar{S}(a, \delta^*) \subset S(x_1, \delta_1)$，使得有 $\bar{P}_{N_0} \supset \bar{S}(a, \delta^*)$．

其次，根据定理 3 的证明的中间一段，我们不难用类似方法严格证明：那里所求之"原心球" $\bar{S}(\theta, r_0)$ 必定包含在点 b_0 与球 $S(a,\delta^*)$所张成的凸集内，因此，点 b_0 与集 $P_{N_0} \cap \bar{S}(a, \delta^*)$所张成的凸集亦是稠于球 $\bar{S}(\theta, r_0)$ 的．类似地，由于在"原心球" $\bar{S}(\theta, r_0)$ 与点$(1+\lambda_0)x_0$所张成的凸集中，点 x_0 必为此凸集之内点(参看图 4.6)，因此也必有 x_0 的一球 $S(x_0, \delta_0)$ 含于此凸集内，并且同样可以证明，由集 P_{N_0}，点 b_0 及点 $(1+\lambda_0)x_0$ 所张成的凸集

$$V = \mathrm{cov}[P_{N_0}, b_0, (1+\lambda_0)x_0],$$

也必稠于该球 $S(x_0, \delta_0)$.

这样一来，当我们取 $\bar{\delta}_\iota = \min(\delta_\iota, \delta_0)$ $(\iota \in I)$ 时，对某给定的正数 ε_0, $\forall \iota \in I$ 及 $\forall x \in S(x_0, \bar{\delta}_\iota)$, 由于 $S(x_0, \bar{\delta}_\iota) \subset S(x_0, \delta_\iota)$, 故从凸泛函 P_ι 在 x 点的“下半连续”的假设可知，$\exists \delta_\iota^* > 0$，使得当 $\|y - x\| < \delta_\iota^*$ 时就有

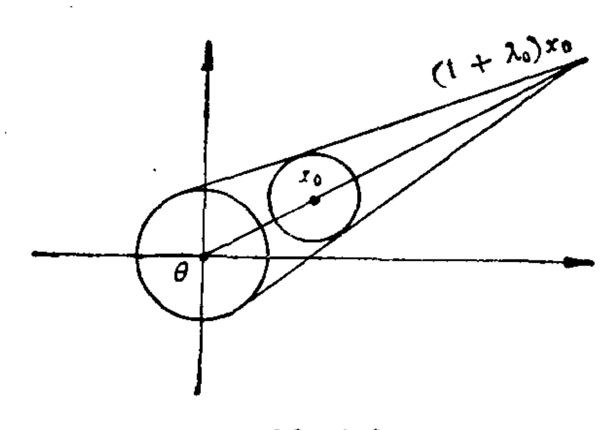


图 4.6

$$p_\iota(x) - \varepsilon_0 < p_\iota(y). \tag{2}$$

于是，由 $\bar{V} \supset S(x_0, \delta_0) \supset S(x_0, \bar{\delta}_\iota)$，故 $\exists \bar{y} \in V$，使得 $\|\bar{y} - x\| < \delta_\iota^*$.
由 V 的定义，我们不妨设

$$\bar{y} = \alpha_1 y_0 + \alpha_2 b_0 + \alpha_3 (1 + \lambda_0) x_0,$$

其中，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. 最后，由泛函 p_ι 的凸性、各元 $\bar{y}$, y_0, b_0, $(1 + \lambda_0)x_0$ 的性质以及式(2)我们可导出

$$\begin{aligned} p_\iota(x) &< p_\iota(\bar{y}) + \varepsilon_0 \leqslant \alpha_1 p_\iota(y_0) + \alpha_2 p_\iota(b_0) + \alpha_3 p_\iota[(1 + \lambda_0)x_0] \\ &\leqslant \alpha_1 N_0 + \alpha_2 \sup_\iota p_\iota(b_0) + \alpha_3 \sup_\iota [(1 + \lambda_0)x_0] \\ &\leqslant N_0 + |\sup_\iota p_0(b_0)| + |\sup_\iota p_\iota[(1 + \lambda_0)x_0]|, \\ &\qquad \forall x \in S(x_0, \bar{\delta}_\iota) \quad (\iota \in I) \end{aligned}$$

(与前面一样，当上式最后的两上确界之值为 $-\infty$ 时，则可略去此时，下面的结论仍成立). 由于上式之最后端乃是与 ι 及 x 均无关的正常数，因而此即导出了凸泛函族 $\{p_\iota | \iota \in I\}$ 在相应的“同心球”族 $\{S(x_0, \bar{\delta}_\iota) | \iota \in I\}$ 内满足前面定理 3 的假设条件(i). 证毕.

由上面的两个定理，直接可以得到下面的四个推论:

推理 1. 在第二纲赋范线性空间 E 上定义的凸泛函族 $\{p_\iota | \iota$

$\in I\}$ 如果满足条件:

(i) $\sup_{\iota} p_{\iota}(x) < \infty \Longleftrightarrow \sup_{\iota} p_{\iota}(-x) < \infty, \ \forall x \in E$

及

(ii) 存在某一正数 β 及 E 内的一族 "同心球" $\{S(x_0, \delta_{\iota}) | \iota \in I\}$, 使得一致地有

$$p_{\iota}(x) \leqslant \beta, \ \forall x \in S(x_0, \delta_{\iota}) \ (\iota \in I);$$

或者,

(ii)′ 存在 E 的一族"同心球" $\{S(x_0, \delta_{\iota}) | \iota \in I\}$, 使得对于任意的 $\iota \in I$, 泛函 $p_{\iota}(x)$ 在对应的球 $S(x_0, \delta_{\iota})$ 内均是 "下半连续" 的, 并且有某一正数 λ_0, 使得 $\sup_{\iota} p_{\iota}[(1+\lambda_0)x_0] < \infty$。那么, 只要在 E 的某一个第二纲集 Q 上,有

$$\sup_{\iota} p_{\iota}(x) < \infty, \quad \forall x \in Q,$$

则必存在一正数 r_0, 使得或 $p_{\iota}(x) \equiv -\infty, \forall x \in \bar{S}(\theta, r_0), \ \forall_{\iota} \in I$; 或者有

$$\sup_{\iota} \sup_{\|x\| \leqslant r_0} |p_{\iota}(x)| < \infty.$$

推理 1′. 在推理 1 的假设条件下, 如果泛函族 $\{p_{\iota} | \iota \in I\}$ 在 E 的任意"原心球" $\bar{S}(\theta, \delta)$ 上的值均不是一致有界的, 那么, 满足关系式

$$\sup_{\iota} p_{\iota}(x) < \infty$$

的点集必是 E 中的第一纲集。

结合 § 3.2 中关于凸泛函在一球内数值有上界与其连续性的关系,我们还可以得到下面的推理:

推理 2. 如果 $\{p_{\iota} | \iota \in I\}$ 为第二纲赋范空间 E 上定义的(取有限值的)一族凸泛函,并且在 E 内一稠的第二纲集 Q 上均有

$$\sup_{\iota} p_{\iota}(x) < \infty, \ \forall x \in Q,$$

那么,只要在 Q 的某一点 x_0,泛函 $p_{\iota}(x)(\iota \in I)$ 均是"上半连续"的, 或者有 x_0 的某一族"同心球",$\{S(x_0, \delta_{\iota}) | \iota \in I\}$, 使得对于任意的 $\iota \in I$, 各泛函 $p_{\iota}(x)$ 在对应的球 $S(x_0, \delta_{\iota})$ 内均是 "下半连续" 的,

就有

$$p(x) = \sup_{\iota} p_{\iota}(x), \ \forall x \in E$$

必为整个空间 E 上的连续(凸)泛函.

证. 如果泛函 $p_{\iota}(x)$ $(\iota \in I)$ 均在点 x_0"上半连续",那么,对于给定的一正数 ε_0,我们必可找到正数 δ_{ι},使得当 $\|x - x_0\| \leqslant \delta_{\iota}$ 时,有

$$p_{\iota}(x) < p_{\iota}(x_0) + \varepsilon_0 < \sup_{\iota} p_{\iota}(x_0) + \varepsilon_0 \ (\iota \in I).$$

注意到 $x_0 \in Q$,因此 $\beta = \sup_{\iota} p_{\iota}(x_0) + \varepsilon_0$ 为一有限常数,并且,我们不妨设其为正的(否则可以改变 ε_0 而做到),于是,便得出

$$p_{\iota}(x) < \beta, \quad \forall x \in \bar{S}(x_0, \delta_{\iota}) \ (\iota \in I).$$

不难看出,定理 3 中的假设条件仍是满足的. 另外,当本推理中关于泛函族$\{p_{\iota} | \iota \in I\}$的"下半连续"的相应条件满足时,由于这里的第二纲集 Q 稠于整个空间 E 的假设,因此,虽然这里没有 $\sup_{\iota} p_{\iota}[(1+\lambda_0)x_0] < \infty$ 的假设条件,然而,注意到前面定理 4 的证明,不难看出定理 4 的结论仍是成立的. 所以我们总可得到一闭"原心球" $\bar{S}(\theta, r_0)$,使得

$$\sup_{\|x\| \leqslant r_0} p(x) = \sup_{\iota} \sup_{\|x\| \leqslant r_0} p_{\iota}(x) < \infty.$$

即凸泛函 $p(x)$ 在球 $\bar{S}(\theta, r_0)$ 上的值是有上界的(且知 $p(x)$ 在 $\bar{S}(\theta, r_0)$ 均取有限值). 这样,由 § 3.2 的定理 6,可知凸泛函 $p(x)$ 在 $S(\theta, r_0)$ 内是连续的.

最后,$\forall x \in E$,类似于定理 3 的证明,利用集 Q 稠于 E 的假设,找出与元 $2x$ 距离充分接近的一元 $y \in Q$,使得 x 为由点 y 和球 $\bar{S}(\theta, r_0)$ 所张成之凸集(凸体)的一个内点(参看图 4.7),即 x 的某一个球

$$S(x, \delta) \subset \operatorname{Cov}[y, \bar{S}(\theta, r_0)].$$

最后利用泛函 $p(x)$的凸性以及其在点 y,球 $\bar{S}(\theta, r_0)$的性质,不难导出凸泛函 $p(x)$ 在球 $S(x, \delta)$内也数值有上界. 因而同样由 § 3.2 的定理 6 我们便可得到泛函 $p(x)$ 在 x 点也是连续的,此即 $p(x)$

为 E 上的连续函数．证毕．

特别地，当 $\{p_\iota | \iota \in I\}$ 仅由一个(取有限值的)凸泛函 $p(x)$ 所组成时，由推理 2，可以得到下面一个有趣的推论：

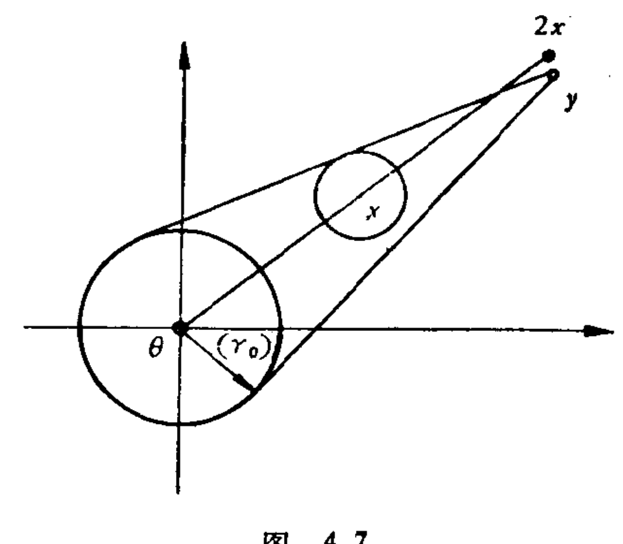


图 4.7

推理 2′. 设 $p(x)$ 为第二纲赋范线性空间 E 上(不取 $-\infty$) 的一凸泛函，并且在 E 内一稠的第二纲集 Q 上其取有限值．那么，只要 $p(x)$ 在 Q 的某一点 x_0 为心的一球 $S(x_0, \delta_0)$ 内均"下半连续"则 $p(x)$ 就是 E 上的连续泛函．

注 11. 在推理 2′ 的假设条件下，如果 $p(x)$ 在 x_0 点是"上半连续"的，则当空间不必要"第二纲"的假设时，原结论仍成立．事实上，只要应用上半连续的定义以及推理 2 证明中的方法就不难导出此时 $p(x)$ 在空间 E 的任何一点 x 的值均是"局部有上界"的，从而直接利用 § 3.2 的定理 6 的结果就可得到注的结论．

注 12. 本段中的命题，对于具有"β 级绝对齐性"($\beta > 0$) 的第二纲赋"准范"线性空间及几乎对"拟凸泛函"，亦均是正确的．[17]

(三)

由于共鸣定理的重要性（这里及以后我们把上面所有的命题均统称为"共鸣定理"，而不一一区别了)，除了下面几节我们专门来讲述它的一些重要应用之外，在这里我们再给出几个由本节(一)的命题导出的常见的推论．

首先，注意到 § 4.1 的引理 2 以及本节的定理 2，我们不难直接得到下面两个极简单的结论：

推理 1. 设 $p(x)$ 为赋范线性空间 E 上的次加正齐性泛函(可取 $\pm\infty$)，并且在 E 中某一点 x_0，$p(\pm x_0)$均取有限值．那么，只要

$p(x)$ 在 x_0点"上半连续"，则 $p(x)$ 必为 E 上的(强有界)连续泛函.

推理 2. 泛函 $p(x)$ 的假设与推理 1 类似. 那么，当空间 E 是第二纲的时，只要 $p(x)$ 在 x_0 的某一球 $S(x_0, \delta_0)$内"下半连续"，并且在其内的某一第二纲稠集 Q 上均有

$$p(x) < \infty, \quad \forall x \in Q,$$

则 $p(x)$ 必为 E 上的(强有界)连续泛函.

注 13. 推理 2 就是著名的 Гельфанд 引理的推广形式. 在 Гельфанд 引理中，空间要求是完备的泛函 $p(x)$ 要求是取有限值的，且在全空间"下半连续".

下面，给出关于一算子列的收敛极限的命题，同样，由定理 1，2 直接可以得出下面两个推论:

推理 3. 设 E 为一第二纲的赋范线性空间，$\{A_n\}$ 为 E 上的一按范 k-拟次加算子列，并设在 E 中极限

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = A(x), \ \forall x \in E$$

均存在. 那么，只要在 E 的某一列"同心球 $\{\bar{S}(x_0, \delta_n)\}$ 上对应地有

$$\|A_n(x)\| < \beta, \ \forall x \in \bar{S}(x_0, \delta_n) \ (n = 1, 2, \cdots)$$

(其中，β 为某一常数)，则 A 也必为 E 的任意闭球上数值有界的按范 k-拟次加算子.

推理 4. 设 $\{A_n\}$ 的假设同推理 3 在 E 中极限 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$ ($\forall x \in E$)均存在. 那么，只要在 E 的某一列"同心球"，$\{S(x_0, \delta_n)\}$ 内对应地有: 泛函 $\|A_n(x)\|$ 在对应的球 $S(x_0, \delta_n)$ 内是"下半连续"的，则 A 也必为在 E 的任意闭球上数值有界的按范 k-拟次加算子.

作为上面两个推理的特殊情况，我们可以得到下面一个常见的推论:

推理 5. 设 $\{T_n\}$ 为第二纲赋范线性空间 E 上定义的一列有界线性算子. 那么，只要极限 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$，($\forall x \in E$) 在 E 中均存在，则 T 也必为 E 上的有界线性算子.

注 14. 必须注意，推理 5 的结论对于第一纲的赋范线性空

间未必成立.

反例. 设在原来的空间 (l^1) 中以空间 (c) 的形式来定义范数，并设此（作为 (c) 的子空间）换了范数后的赋范线性空间为 (l^1_*). 那么,如果定义一列从 (l^1_*) 到 (l^1) 内的算子 $\{T_n\}$,

$$T_n(x) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, \cdots) \in (l^1), \forall x = \{\xi_n\} \in (l^1_*),$$

$\{T_n\}$ 必为 (l^1_*) 上一列有界线性算子,在 (l^1) 中 $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ $(\forall x \in (l^1_*))$ 均存在,但 T 却不是有界的.

验. 我们分别验证结论.

1) $\{T_n\}$ 为 (l^1_*) 上的一列有界线性算子. 事实上,由于

$$\|T_n(x)\|_{(l^1)} = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \leqslant n \cdot \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k| \leqslant n \cdot \sup_{1\leqslant k<\infty} |\xi_k|$$

$$= n \cdot \|x\|_{*(l^1_*)}, \forall x = \{\xi_k\} \in (l^1_*) (n = 1, 2, \cdots),$$

因此,立即可知 $\|T_n\| \leqslant n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 至于 $\{T_n\}$ 均分配算子则是明显的.

2) 显然, 在 (l^1) 中, $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ 存在.

3) T 不是有界的. 反之,如果 T 是有界的,不妨令其一界为 β_0, 那么,则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|T(x)\| \leqslant \beta_0\|x\| = \beta_0 \cdot \sup_{k\geqslant 1} |\xi_k|,$$

$$\forall x = \{\xi_k\} \in (l^1_*),$$

然而,特别当取 (l^1_*) 中一列元 $\{x_n\}$ 为 $x_n = (1, 1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots)$ 时,则可得到 $n \leqslant \beta_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$,矛盾. 验毕.

注 15. 反过来，我们也可在上例中利用推理 5 说明，当 (l^1) 空间的范数换为空间 (c) 的范数时,其在新范数定义下构成了一个第一纲的赋范线性空间 (l^1_*)（关于第一纲赋范线性空间的详细讨论见 § 4.4).

本节最后,再给出一个关于有界线性算子列“逐点收敛”(强收敛)的充要条件的命题.

推理 6. 当 E 为第二纲赋范线性空间时，为了在其上定义而在一 Banach 空间 E_1 上取值的有界线性算子列 $\{T_n\}$ 是强收敛的.

必须且只须其满足下列条件:

(i) $\{\|T_n\|\}$是有界数列;

(ii) 对于E中某一集D: $\overline{[D]}=E$(即D的线性组合稠于E), $\{T_n(x)\}$ $(\forall x\in D)$均收敛.

证. "$\Rightarrow$" 由共鸣定理直接可得.

"$\Leftarrow$" $\forall x\in E$, 如果$x\in[D]$, 那么,由算子列$\{T_n\}$的分配性,根据假设条件(ii)得出结论; 而当$x\in E\backslash[D]$时, $\forall\varepsilon>0$由设$\overline{[D]}=E$, 因而, $\exists y\in[D]$, 使得$\|y-x\|<\frac{\varepsilon}{4\beta}$(其中, $\beta=\sup\limits_n\|T_n\|$,由假设条件知其为有限正数), 这样,便有

$$
\begin{aligned}
\|T_n(x)-T_m(x)\| &\leqslant \|T_n(x)-T_n(y)\|+\\
&\quad \|T_n(y)-T_m(y)\|+\|T_m(y)-T_m(x)\|\\
&\leqslant (\|T_n\|+\|T_m\|)\|y-x\|+\|T_n(y)-T_m(y)\|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\|T_n(y)-T_m(y)\| \ (n,\ m=1,\ 2,\ \cdots).
\end{aligned}
$$

注意到前段结论可知,对上述正数ε, $\exists N$(自然数)使得当$n,m\geqslant N$时,有

$$\|T_n(y)-T_m(y)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

代入上式,可导出$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\|T_n(x)-T_m(x)\|=0$, 即$\{T_n(x)\}$为$E_1$中一Cauchy列,最后,当注意到$E_1$的完备性时, 可导出$\{T_n(x)\}$是收敛的. 证毕.

注 16. 在推理6中,根据$\{\|T_n\|\}$是有界的条件还可得知,此时由关系式$T_0(x)=\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)\forall x\in E$, 所确定的极限算子$T_0$也必为$E$上的有界线性算子,并且由

$$\|T_0(x)\|=\lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|,\ \forall x\in E,$$

还可导出

$$\|T_0\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|.$$

因而可知"有界线性算子所组成的空间 $B(E\to E_1)$ (参看 § 2.2) 当 E 是第二纲，而 E_1 是完备的时候，其对于"强收敛"("逐点收敛")也是"封闭"的. 即此时其内的强收敛算子列的极限亦为有界线性算子.

习　　题

1. 试证明本节定理 1 后面的推理.

2. 试证明本节注 5.

3. 试证明本节注 6.

4. 试证明本节(三)中的推理 2.

5. 试证明本节(三)中的推理 3.

6. 试证明：(异点凝聚原理)如果 $T_{m,n}(m,n=1,2,\cdots)$ 均为在第二纲赋范线性空间 E 上定义的有界可加算子，并且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_{m,n}\|=\infty\quad(m=1,2,\cdots),$$

那么，必在 E 中存在一第二纲集 Q，其使 $E\backslash Q$ 是第一纲集，并且均有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_{m,n}(x)\|=\infty,\quad\forall x\in Q\ (m=1,2,\cdots).$$

并解释此原理名称的含义.

(注意：关于有界线性算子族的更一般的"异点凝聚原理"可以表述如下：

定理. 设 $T_n(x,\tau)$ 是定义在 Banach 空间上的一族有界线性算子，它依赖于连续参数 $\tau\in[0,1]$，并设对于任意元 $x\in E$，$T_n(x,\tau)$ 是连续地依赖于 τ 的，并设对于每个 $\tau\in[0,1]$，存在一点 x_τ，使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_n(x_\tau;\tau)\|=\infty.$$

那么，必存在元 x，使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_n(x,\tau)\|=\infty$$

对 τ 的一个预定的不可数集成立(参看文献[113]).

7. 举一反例说明本节最后的推理 6，当空间 E_1 不是 Banach 空间时，结论未必成立.

8. 将本节最后的推理 6 中的算子列 $\{T_n\}$：(i) 换为泛函列 $\{f_n\}\subset E^*$，(ii)换为元列 $\{x_n\}\subset E$ 后，叙述相应的命题.

9. 试证明：当 E 为一赋范线性空间时，E 内任意弱列紧集必是有界集. 从而可知，对一个自反空间而言，集的有界性与弱列紧性是等价的.

§ 4.3. 共鸣定理的一些应用

这一节，我们列举几个关于共鸣定理应用的例子.

例 1 (Fourier 级数的发散问题). 存在"无穷多"个以 2π 为周期的实值连续函数，使其在任意给定的点上其 Fourier 级数是发散的.

验. 设以 2π 为周期的实值连续函数的全体构成的实 Banach 空间，记为 $C_{2\pi}$ (其中，范数 $\|x\| = \sup\limits_{t} |x(t)|$, $\forall x \in C_{2\pi}$). 于是, $\forall x = x(t) \in C_{2\pi}$, 当我们将其 Fourier 级数的前 $n+1$ 项的和表示为

$$f_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(s, t)x(s)ds,$$

其中

$$k_n(s,t) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(s-t)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(s-t)\right]}$$

时，易知，对于任意固定的 t_0 及 n，上面的 $f_n(x, t_0)$ 乃是空间 $C_{2\pi}$ 上的一线性泛函. 为讨论简单起见，我们不妨设 $t_0 = 0$，则有

$$f_n(x, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(s, 0)x(s)ds, \quad \forall x = x(s) \in C_{2\pi}$$

与 § 2.2 (二)段的例 2 类似，我们可知

$$\|f_n\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s, 0)|ds,$$

再由

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s, 0)|ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right]}{\sin\frac{1}{2}s}\right|ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{s}{2}\right]}{\frac{s}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right| ds$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{s}{2}\right]}{\frac{s}{2}}\right| ds$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{\frac{s}{2}}\right| ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{2n+1}{2}\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right| du \to \infty \quad (n\to\infty)$$

(上面,我们利用了数学分析中熟知的 $|\sin s| \leqslant |s|$ 以及广义积分 $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin u}{u}\right| du$ 是发散的),则可导出泛函列 $\{f_n\}\subset C_{2\pi}^*$,有关系式

$$\sup_n \|f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n\| = \infty.$$

因此注意到 $C_{2\pi}$ 为 Banach 空间,由上面共鸣定理的逆否命题可知,此时 $C_{2\pi}$ 内必有一个第二纲集 Q,使得 $C_{2\pi}\backslash Q$ 为第一纲集,且对任意的元 $x\in Q\subset C_{2\pi}$,均有

$$\sup_n |f_n(x,0)| = \infty.$$

此即说明对于空间 $C_{2\pi}$ 中第二纲集 Q 内的任一元(连续函数) $x(t)$,其 Fourier 级数在 $t=0$ 点均是发散的. 验毕.

注 1. 这个结果不但"定性"地回答了著名的关于 Fourier 级数的发散问题,而且也"定量"地得出:这种在任给定点发散的连续函数其实比收敛的连续函数"多的多"(即前者是第二纲集而后者是第一纲集).

例 2 (无穷级数求和法). 在这个例子里,我们给出一个在数学分析中作为 Stolz 定理的直接推广的定理. 为此,我们先给出下面的定义:

定义 1. 设有一无穷矩阵 $A=(\alpha_{ij})$，我们称数列 $x=\{\xi_i\}\in(s)$ 为 A-有和的是指

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j \quad (i=1,2,\cdots)$$

存在(有穷)，以及

$$A(x)=\lim_{i\to\infty}A_i(x)$$

也存在(有穷). 这时，我们还称 $A(x)$ 为数列 $x=\{\xi_i\}$ 的 A-极限.

定义 2. 一个无穷矩阵 A 称为是保存的，是指对于任意收敛数列 $\{\xi_i\}\in(c)$，$\{\xi_i\}$ 必是 A-有和的. 并且 $\{\xi_i\}$ 的 A-极限等于 $\{\xi_i\}$ 的(平常)极限.

例如. 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ \cdots & & & & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \\ \cdots\cdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

就是"保存"的，因为对于任意的元 $x=\{\xi_i\}\in(c)$，如果 $\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i=\xi_0$，则由

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j=\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i}{i}$$

及熟知的数学分析知识可知，必亦有

$$A(x)=\lim_{i\to\infty}A_i(x)=\lim_{i\to\infty}\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i}{i}=\lim_{i\to\infty}\xi_i=\xi_0.$$

又如单位无穷矩阵 I 也是保存的.

关于"保存矩阵"我们有一个极有用的判别定理.

定理（Steinhaus-Toeplitz）. 为了无穷矩阵 $A=(\alpha_{ij})$ 是保存的，必须且只须其满足

(i) $\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|\leqslant\beta(<\infty)(i=1,2,\cdots)$（各行之“绝对和”一致有界）；

(ii) $\lim_{i\to\infty}\alpha_{ij}=0(j=1,2,\cdots)$（各列趋于0）；

(iii) $\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}=1$（各行之和趋于1）.

证. 1)“$\Longrightarrow$” 首先，$\forall x=\{\xi_i\}\in(c)$，$\forall n$（自然数）；当设

$$A_{in}(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j$$

时，此时易见 $\{A_{in}|n=1,2,\cdots\}\subset(c)^*$；且由于 A 是保存的，故

$$A_i(x)=\lim_{n\to\infty}A_{in}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j$$

均是存在的.从而由上节推理5可知，对于任意的自然数 i 亦应有 $A_i\in(c)^*$；同样地，又由 A 的保存性，我们还知对任意的元 $x\in(c)$，极限

$$A(x)=\lim_{i\to\infty}A_i(x)$$

也均存在，从而同理可得到 $A\in(c)^*$；且由上节推理6的必要性还可导出，存在一正常数 β，使得一致有

$$\|A_i\|\leqslant\beta\qquad(i=1,2,\cdots).$$

最后，因为 $(c)^*=(l^1)$，由上面泛函 A_i 的取法，得出

$$\|A_i\|=\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|\leqslant\beta\quad(i=1,2,\cdots).$$

从而也得到了定理所求之条件(i)，

其次，与§2.3命题2的证明所设的一样，当令元 $e_j=(0,0,\cdots,0,\underset{(j)}{1},0,0,\cdots)$

时，可得到

$$A_{in}(e_j)=\alpha_{ij}\ (n\geqslant j),$$

并且由于$\{e_j\}\subset(c)$，故当设元 $e_j=\{\xi_i^{(j)}\}$ 时有

$$\lim_{i\to\infty}\xi_i^{(j)}=0 \qquad (j=1,2,\cdots).$$

从而由A的保存性，可得出 $A(e_j)=0(j=1,2,\cdots)$. 即有

$$0=A(e_j)=\lim_{i\to\infty}A_i(e_j)=\lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}A_{in}(e_j)$$

$$=\lim_{i\to\infty}\alpha_{ij} \qquad (j=1,2,\cdots).$$

此即得出了定理所求之条件(ii).

最后，与§2.3命题2的证明所设的一样，当令元 $e_0'=(1,1,\cdots)$ 时，由于$e_0'\in(c)$. 且 $\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i^{(0)}=1$（其中，设 $e_0'=\{\xi_i^{(0)}\}$），从而由A的保存性应有 $A(e_0')=1$，即

$$1=A(e_0')=\lim_{i\to\infty}A_i(e_i')=\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}.$$

从而得出了定理所求之条件(iii).

2）"$\Longleftarrow$" 首先，由定理的假设条件(i)我们可知(注意§2.3命题2)，$\forall i$（自然数），均有

$$\{\alpha_{ij}\,|\,j=1,2,\cdots\}\in(l^1),$$

因而有 $A_i\in(c)^*$；且还有 $\|A_i\|\leqslant\beta(i=1,2,\cdots)$.

其次，由定理的假设条件(ii)，(iii)得知，对于上所设元$e_j(j=1,2,\cdots)$，e_0'，我们有

$$\lim_{i\to\infty}A_i(e_j)=0\ \ (j=1,2,\cdots);$$

$$\lim_{i\to\infty}A_i(e_0')=1,$$

因此，再由 $e_j=\{\xi_i^{(j)}\}$，$e_0'=\{\xi_i^{(0)}\}$ 的定义，可导出

$$\lim_{i\to\infty}A_i(e_j)=I(e_j),\ \lim_{i\to\infty}A_i(e_0')=I(e_0').$$

（其中，I 代表"单位矩阵"，$\forall x=\{\xi_i\}\in(c)$，有 $I(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i$.）

最后，由§2.3命题2的证明可知，$\forall x=\{\xi_i\}\in(c)$，均有分解式 $x=\xi_0e_0'+\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\xi_0)e_i$（即$\{e_0',e_i\}$为空间$(c)$的一组基底）. 因而，由元 e_0', e_1, e_2, $\cdots$, e_n, $\cdots$所张成的线性子空间D是

空间(c)内一稠集．于是，当注意到上节推理6的充分性时，根据上面两段的结果则可导出$\forall x=\{\xi_i\}\in(c)$，均有

$$\lim_{i\to\infty}A_i(x)=l(x),$$

也即导出$A(x)=l(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i$．此即证得$A$是保存的．证毕．

例3（机械求积公式的收敛性）．设$p(t)\geqslant 0$，$x(t)\in C[0,1]$，又设"机械求积"公式

$$\int_0^1 p(t)x(t)dt\cong\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)})\quad(0\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant 1)$$

对于次数$\leqslant n$的一切多项式是准确的(即等号成立)，那么，为了上面近似过程收敛(即$\forall x(t)\in C[0,1]$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)})=\int_0^1 p(t)x(t)dt \tag{1}$$

成立)，必须且只须存在一个与n无关的常数β，使得

$$\sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|\leqslant\beta\quad(n=1,2,\cdots).$$

验． 事实上，这里所需要的结果可以直接由上节推理6直接得到．因为，当我们令泛函

$$f(x)=\int_0^1 p(t)x(t)dt,$$

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)});\ \forall x(t)\in C[0,1]\quad(n=1,2,\cdots)$$

时，易见$\{f_n\}\subset C^*$，且有$\|f_n\|=\sum\limits_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|(n=1,2,\cdots)$．

并且，由于假设对任何次数$\leqslant n_0\leqslant n$的多项式$x_q^0(t)$均有

$$\int_0^1 p(t)x_q^0(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x_q^0(t_k^{(n)}).$$

所以，我们推得，对于每个多项式$x_q(t)$，均有上面关系式(1)成立，即

$$f_n(x_q)\to f(x_q)\ (n\to\infty).$$

最后，注意到所有多项式的全体所成的线性子空间是稠于空

间 $C[0,1]$ 的,因而知道上述结论就是上节推理 6 的结果. 验毕.

注 2. 上面的结果的充分性首先由 B. A. Стеклов 证得,而必要性最先由 G. Pólya 证得(详细结果可参看文献 [112] 的第六章).

例 4 (Lagrange 插值公式的发散性 Faber 定理). 假设在区间 $[0,1]$ 内插入点 $(t_k^{(n)})$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ n=1,2,\cdots)$, 其构成无穷维三角矩阵 T,

$$T = \begin{pmatrix} t_1^{(1)} & & & & \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & & \mathbf{0} & \\ t_1^{(3)} & t_2^{(3)} & t_3^{(3)} & & \\ \cdots & \cdots & & & \\ t_1^{(n)} & t_2^{(n)} & t_3^{(n)} & \cdots & t_n^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

那么, 必存在一连续函数 $x(t) \in C[0,1]$, 使其与插入点 $(t_k^{(n)})$ 相应的 Lagrange (n 次)插值多项式

$$[\mathrm{L}_n(x)](t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k^{(n)}) l_k^{(n)}(t) \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中

$$l_k^{(n)}(t) = \frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(t_k^{(n)})(t - t_k^{(n)})},$$

$$\omega_n(t) = (t - t_1^{(n)})(t - t_2^{(n)}) \cdots (t - t_n^{(n)}),$$

当 $n \to \infty$ 时, 不一致收敛于 $x(t)$.

验. 事实上,我们考察在空间 $C[0,1]$ 上定义的上述一列算子 L_n,

$$[\mathrm{L}_n(x)](t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k^{(n)}) l_k^{(n)}(t),$$

$$\forall x = x(t) \in C[0,1] \qquad (n=1,2,\cdots).$$

那么, L_n 显然均是分配的,而且容易证明

$$\|\mathrm{L}_n\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(t)| \quad (n=1,2,\cdots).$$

因而，$\{L_n\}$为 $C[0,1]$ 上的一列有界线性泛函；此外，还可以证明(参看[112])，

$$\max_{0\leq t\leq 1}\sum_{k=1}^{n}|l_k^{(n)}(t)|>\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}\quad(n=1,2,\cdots);$$

于是，有

$$\|L_n\|\to\infty\ (n\to\infty).$$

因而，由上节推理 6 的逆否命题可知，不可能对任何元 $x\in C[0,1]$，均有 $L_n(x)\to x\ (n\to\infty)$ 成立，即必存在一连续函数 $x(t)\in C[0,1]$，使得其 Lagrange 内插多项式 $[L_n(x)](t)$ 当 $n\to\infty$ 时是不一致收敛于它的. 验毕.

注 3. 关于共鸣定理在偏微分方程解对边值条件的连续依赖性证明中的应用、无穷联立一次方程求解中的应用等等可以参看其它的书[1]，这里我们就不详细介绍了.

习　　题

1. 试说明数学分析中关于极限的 Stolz 定理乃是本节关于保存矩阵定理的特例.

2. 设序列 $\{\alpha_n\}$ 满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1;\ \alpha_n\geq 0\ (k=1,2,\cdots)$，且 $\forall x=\{\xi_n\}\in(m)$，序列集

$$M_x=\left\{\{\eta_i\}\,|\,\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{n_{i+j}}\alpha_j,\ \{\xi_{n_i}\}\subset\{\xi_n\};i=1,2,\cdots\right\}.$$

试证明：$x=\{\xi_n\}$ 的任意极限点必为集 M_x 中某一数列的极限.

3. 设数列$\{\alpha_k\}$对于任意元 $x=\{\xi_k\}\in(c)$ 均使级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$ 收敛，试证明：此时必有 $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|<\infty$.

4. 设积分$\int_0^1 b(t)x(t)dt$ 对于一切元 $x=x(t)\in L^2[0,1]$ 均存在，试证明：$b(t)\in L^2[0,1]$.

5. 设$\{x_k\}$是赋范线性空间 E 中的任一给定元列，试证明：如果有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(x_k)|<\infty,\quad\forall f\in E^*$$

成立，则必存在一正常数 β，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(x_k)|\leqslant\beta\|f\|,\quad\forall f\in E^*.$$

6．设 E 为任一第二纲的赋范线性空间，$\{f_k\}$ 为 E 上的任一给定有界线性泛函列，试证明：如果有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|<\infty,\quad\forall x\in E$$

成立，则必有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(f_k)|<\infty,\quad\forall F\in E^{**},$$

7．设 T 为赋范线性空间 E 到 E_1 内的分配算子，并设 E_1^* 内有某一闭线性子空间 G_1^*，其为 E_1 的"确定集"(即有关系式 $\|y\|=\sup\limits_{\substack{\|g\|=1\\ g\in G_1^*}}|g(y)|$，$\forall y\in E_1$)，且有 $G_1^*\subset\mathscr{D}(T^*)$．试证明：此时 T 必为一连续线性算子．

§4.4. 第一纲的赋范线性空间

本节，作为共鸣定理的另一应用，我们要介绍一些我们熟知的 Banach 空间在改变范数的定义之后变成为一个第一纲的赋范线性空间的例子[15]．这再一次说明(作为 §1.2 的补充)，对于同一个线性空间而言，当范数定义的形式不同时其不但能在"质"上使空间的"完备"性质起相反的变化，而且在"量"上也能使空间起极大的变化(由"第二纲"变为"第一纲"，或者相反)．并且在这一节中，同样作为以前的补充，我们可以由"定性"地了解空间之间(在线性同构下)的"包含"关系(例如：$(c)\subset(m)$，当 $0<\alpha<\beta$ 时，$(l^{\alpha})\subset(l^{\beta})$ 等等)，到进一步转为"定量"地了解这些空间．对被包含的空间其在包含它的空间内所占的"数量"原来是"很少很少"的；精确地说，它只是包含它的空间内的"第一纲"集．

下面，我们分别按照"数列空间"与"函数空间"给出推论．

推理 1. 假设$\{a_i\}$是分别以正数 M，m 为其绝对值之上、下界的已知复数列．那么，对于任意的非负有界实数列 (λ_i)，满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \xi_i^{\lambda_i}| < \infty$$

的所有复数列$\{\xi_i\}$的全体所组成的集 P，必满足

(i) 当 $\varliminf_{i\to\infty} \lambda_i = \alpha_0 > 0$ 时，集 P 包含着一切空间 (l^α) $(0 < \alpha < \alpha_0)$ 内的所有元，特别，当 $\lambda_i \geqslant \alpha_0$ $(i \geqslant i_0)$ 时，集 P 亦包含着空间 (l^{α_0}) 的所有元；

(ii) 当 $\varlimsup_{i\to\infty} \lambda_i = \beta_0 > 0$ 时，对于任意的空间 (l^β) $(\beta > \beta_0)$，集 P 在其内按该空间的范数（准范数）构成一个第一纲的线性子空间；

特别，当 $\lambda_i \leqslant \beta_0$ $(i \geqslant i_0)$ 时，集 P 在空间(l^{β_0}) 内亦有上述性质.

证. 首先，由空间(l^α)元的定义：当 $x = \{\xi_i\} \in (l^\alpha)$ 时，必有

$$\|x\| = \left(\sum_i |\xi_i|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty \text{（当 } \alpha \geqslant 1 \text{ 时），}$$

或者

$$\|x\|_\alpha = \sum_i |\xi_i|^\alpha < \infty \text{（当 } \alpha < 1 \text{ 时）.}$$

因而，我们不难立即导出上面的结论 (i).

下面，证明本命题的结论(ii). 事实上由以上讨论可知，集 P 的元均是被包含在任意的空间 (l^β) $(\beta > \beta_0)$ 内的，因此，如果对某一非负有界数列$\{\lambda_i^\circ\}$，其满足

$$\sum_i |a_i \xi_i^{\lambda_i^\circ}| < \infty$$

的复数列 $\{\xi_i\}$ 之全体所成的集 P_0，在某一个空间 $(l^{\beta_1})$$(\beta_1 > \beta_0 = \varlimsup_{i\to\infty} \lambda_i^\circ)$ 内构成了其内的一个第二纲集，那么，在此空间(l^{β_1})上定义一列泛函

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |a_i \eta_i^{\lambda_i^\circ}|, \ \forall x = \{\eta_i\} \in (l^{\beta_0}) \ (n = 1, 2, \cdots),$$

并设 N_0 为非负数列 $\{\lambda_i^\circ\}$ 的一个上界，我们就得到 $\forall x = \{\eta_i\} \in$

(l^{β_1}), $y=\{\xi_i\}\in(l^{\beta_1})$, 均有

$$p_n(x+y)=\sum_{i=1}^{n}|a_i(\eta_i+\xi_i)^{\lambda_i^\circ}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|(|\eta_i|+|\xi_i|)^{\lambda_i^\circ}.$$

由 § 4.1 中关于 k-拟次加泛函的例子,可直接推出

$$\begin{aligned}p_n(x+y)&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|2^{[\lambda_i^\circ]}(|\eta_i|^{\lambda_i^\circ}+|\xi_i|^{\lambda_i^\circ})\\&\leqslant 2^{N_0}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i||\eta_i|^{\lambda_i^\circ}+\sum_{i=1}^{n}|a_i||\xi_i|^{\lambda_i^\circ}\right)\\&=2^{N_0}[p_n(x)+p_n(y)].\end{aligned}$$

此即 $p_n(x)(n=1,2,\cdots)$乃是空间 (l^{β_1}) 上的一个"2^{N_0}-拟次加"非负泛函列.

此外,由空间(l^{β_1})的"元列收敛"蕴涵着其元列的"坐标收敛",易知,上述每一个泛函 $p_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 均是空间 (l^{β_1}) 上的连续泛函. 并且对于任意的 n, 显然有 $p_n(-x)=p_n(x)$, $x\in(l^{\beta_1})$. 这样,根据空间(l^{β_1})在上面的范数定义下(当 $\beta_1\geqslant 1$ 时),乃是一个 Banach 空间;或者在一个具有"β_1 级绝对齐性"的准范数定义下(当 $\beta_1<1$ 时),乃是一个 Fréchet 空间,利用 § 4.2 中定理 2 的推理(注意到 §4.2 注 5)就可推出, 对于空间(l^{β_1})内的任意闭圆心球 $\bar{S}(\theta,r)$ 均有

$$\sup_{\|x\|\leqslant r}p(x)=\sup_{n}\sup_{\|x\|\leqslant r}p_n(x)<\infty.$$

但另一方面, 由于数 $\beta_1>\overline{\lim_{i\to\infty}}\lambda_i^\circ$ 的取法,故知必存在着一正数 β_2和对应的正整数 i_0, 使得当 $i>i_0$时, 有 $\lambda_i^\circ<\beta_2<\beta_1$. 于是,我们特别取一元 $x_0=\{\eta_i^\circ\}=\{(i)^{-\frac{1}{\beta_2}}\}$, 由于 $\frac{\beta_1}{\beta_2}>1$,故知元 $x_0\in(l^{\beta_1})$. 然而,由于$i>i_0$, 有 $\frac{\lambda_i^\circ}{\beta_2}<1$, 故推得

$$p(x_0)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i i^{-\frac{\lambda_i^\circ}{\beta_2}}|\geqslant m\left(\sum_{i=1}^{i_0}i^{-\frac{\lambda_i^\circ}{\beta_2}}+\sum_{i=i_0+1}^{\infty}i^{-1}\right)=\infty.$$

此显然与上面所得的结果是矛盾的.由此,即证得集 p 在任意空间 (l^β) $(\beta>\beta_1)$ 内均构成其一个第一纲的线性子空间("线性"已在上

面证明过程中明显可见).特别地,当 $\lambda_i \leqslant \beta_0$ ($i \geqslant i_0$)时,上面结论(ii)的相应结果可以用类似的方法直接推出. 证毕.

从上面的命题我们可以立即得到下面的推论.

推理 1′. 对于任意两个空间 (l^α), (l^β), 如果 $0 < \alpha < \beta$, 那么, 空间 (l^α) 的元的全体在空间 (l^β) 内组成一个第一纲的线性子空间;从而,它在空间 (l^β) 的(准)范数下构成一个第一纲的赋(准)范线性空间.

注 1. 值得注意的是,为了得到上面命题的后半段结论,我们应看到 (l^α) 的元在空间 (l^β) 的范数(准范数)下是稠于 (l^β) 的. 因而,由 §4.2 节注 3 便可得出该结论.

推理 2. 任意空间 (l^α) $(\alpha > 0)$ 的元的全体在空间 (c_0) 内组成一个第一纲线性子空间, 从而,它在空间 (c_0) 的范数下构成一个第一纲的赋范线性空间.

证. 在这里, 我们只要在空间 (c_0) 上定义一列"2^α-拟次加"非负泛函列

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^\alpha, \ \forall x = \{\xi_i\} \in (c_0) \ (n = 1, 2, \cdots),$$

同时注意到 §4.2 中的共鸣定理, 就不难利用归谬法导出本命题的前半部分结论.同样地,注意到 (l^α) 的元之全体在空间 (c_0) 的范数下是稠于 (c_0) 的,便得出后半部分结论. 证毕.

推理 3. 空间 (c_0) 的元的全体在空间 (c) "内"组成一个第一纲的线性子空间.

证. 在这里,我们只要注意到空间 (c) 上定义的泛函列

$$p_n(x) = n \cdot \lim_{i\to\infty} \xi_i, \quad \forall x = \{\xi_i\} \in (c) \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

就不难用归谬法证出本命题结论. 证毕.

推理 4. 空间 (c) 的元之全体在空间 (m) "内"组成一个第一纲的线性子空间.

证. 在这里, 我们只要注意到空间 (m) 上定义的一个泛函列

$$p_n(x) = n(\overline{\lim_{i\to\infty}} \xi_i - \underline{\lim_{i\to\infty}} \xi_i), \ \forall x = \{\xi_i\} \in (m) \ (n = 1, 2, \cdots),$$

便不难证明此结论。证毕.

下面,我们讨论函数空间. 同样地,我们也将给出一些熟悉的空间在他们彼此"包含"时关于"纲"的性质.

推理 5. 对于任意两个空间 $L^\beta[0, 1]$, $L^\alpha[0, 1]$, 如果 $0 < \alpha < \beta$, 那么, 空间 $L^\beta[0, 1]$ 的元之全体在空间 $L^\alpha[0, 1]$ 内组成一个第一纲的线性子空间;从而,它在空间 $L^\alpha[0, 1]$ 的(准)范数下构成一个第一纲的赋(准)范线性空间.

证. 首先,我们强调一下,虽然当正数 $\alpha < 1$ 时, $\|x\|_\alpha$ 已经不是"范数"了, 然而, 由于此时空间 $L^\alpha[0, 1]$ 在"准范数" $\|x\|_\alpha = \int_0^1 |x(t)|^\alpha dt$ 下构成一个 Fréchet 空间(也是"第二纲"的), 并且此"准范数"是"α 级绝对齐性"的,因此,由 §4.2 注 1 可知,那里的共鸣定理的命题均是成立的. 下面证明本命题.

事实上,与前面"数列空间"的情况类似,只要在空间 $L^\alpha[0, 1]$ 上定义一列泛函

$$p_n(x) = \int_0^1 |x(t)|_n^\beta dt, \quad \forall x(t) \in L^\alpha[0, 1] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(其中,函数

$$|x(t)|_n = \begin{cases} |x(t)|, & 当\ |x(t)| \leqslant n\ 时; \\ n, & 当\ |x(t)| > n\ 时, \end{cases} \quad t \in [0, 1]),$$

并由著名的 Hölder 不等式所得到的关系式

$$\begin{aligned} |p_n(x)| &= \int_0^1 |x(t)|_n^\beta dt \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|_n^\alpha dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|_n^{\frac{(\beta-1)\alpha}{\alpha-1}} dt\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \\ &\leqslant n^{\beta-1} \cdot \|x\|, \quad \forall x = x(t) \in L^\alpha[0, 1] \end{aligned}$$

(当 $\alpha \geqslant 1$ 时)和熟悉的 Schwarz 不等式所得到的关系式

$$\begin{aligned} |p_n(x)| = \int_0^1 |x(t)|_n^\beta dt &\leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|_n^{2\beta-\alpha} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(t)|_n^\alpha dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant n^{\beta-\frac{\alpha}{2}} \|x\|_\alpha^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x = x(t) \in L^\alpha[0, 1] \end{aligned}$$

(当 $\alpha < 1$ 时),以及控制收敛定理便可导出

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x(t)|_n^{\beta} dt = \int_0^1 |x(t)|^{\beta} dt < \infty,$$

$$\forall x = x(t) \in L^{\beta}[0,1] \subset L^{\alpha}[0,1].$$

于是，如果在 $L^{\beta}[0,1]$ 中的元之全体在空间 $L^{\alpha}[0,1]$ 内构成了一个第二纲集，那么，对于上面的"$2^{[\beta]}$-拟次加"泛函列，应用 §4.2 节定理 1 后之推理(并注意该段注 5)，则可导出

$$\sup_n \sup_{\|x\|\leq 1} |p_n(x)| < \infty, \quad \forall x = x(t) \in L^{\alpha}[0,1].$$

即

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \int_0^1 |x(t)|^{\beta} dt < \infty, \quad \forall x = x(t) \in L^{\alpha}[0,1]. \tag{1}$$

但另一方面，由 $0 < \alpha < \beta$ 的假设，我们可知，上面的关系式是不能在全空间 $L^{\alpha}[0,1]$ 成立的，例如，当取 $x_0 = x_0(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ 时，虽然从("广义积分"收敛)

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} dt < \infty,$$

可知 $x_0 \in L^{\alpha}[0,1]$. 然而由于有：当令 $\gamma = \max(1, \frac{1}{\alpha})$ 时，

$$\int_0^1 \left|\frac{x_0(t)}{\|x_0\|^{\gamma}}\right|^{\beta} dt = \frac{1}{\|x_0\|^{\gamma\beta}}\int_0^1 |x_0(t)|^{\beta} dt = \frac{1}{\|x_0\|^{\gamma\beta}}\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = \infty,$$

此显然与上面关系式(1)矛盾. 从而推理之前半部分结论证得.

至于本推理之后半部分结论，我们只要注意到上面形式的函数 $\{|x(t)|_n | x(t) \in L^{\alpha}[0,1], n = 1, 2, \cdots\}$ 是属于 $L^{\beta}[0,1]$ 的，而这些元却又是稠于空间 $L^{\alpha}[0,1]$ 的(按 $L^{\alpha}[0,1]$ 空间的范数)，因此，$L^{\beta}[0,1]$ 的元在 $L^{\alpha}[0,1]$ 内也是稠的. 同样由 §4.2 注 3 我们立即得 $L^{\beta}[0,1]$ 在 $L^{\alpha}[0,1]$ 的范数下自己也构成一个第一纲的赋范线性空间. 证毕.

推理 6. 当 $\mu(\Omega) < +\infty$ 时，"殆遍有界"复值可测函数空间 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 的元之全体在任意空间 $L^{\alpha}(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ $(\alpha > 0)$ 内组成一个第一纲的线性子空间；从而它在空间 $L^{\alpha}(\Omega,, \mathscr{B}, \mu)$ $(\alpha > 0)$ 的(准)范数下构成一个第一纲的赋(准)线性空间.

证. 在这里我们只要注意到在空间 $L^{\alpha}(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上定义的

一泛函族

$$p_\lambda(x) = \lambda \cdot \mu\{t \mid |x(t)|^\alpha \geqslant \lambda, t \in \Omega\},$$
$$\forall x(t) \in L^\alpha(\Omega, \mathscr{B}, \mu) \ (\lambda > 0);$$

由于集间的关系式

$$\{t \mid |x(t) + y(t)|^\alpha \geqslant \lambda, t \in \Omega\}$$
$$\subset \left\{t \mid |x(t)| \geqslant \frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}, t \in \Omega\right\} \cup \left\{t \mid |y(t)| \geqslant \frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}, t \in \Omega\right\},$$

因而我们可知

$$p_\lambda(x+y) = \lambda \cdot \mu\{t \mid |x(t) + y(t)|^\alpha \geqslant \lambda, t \in \Omega\}$$
$$\leqslant \lambda \left[\mu\left\{t \mid |x(t)| \geqslant \frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}, t \in \Omega\right\} + \mu\left\{t \mid |y(t)| \geqslant \frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}, t \in \Omega\right\}\right] = 2^{\alpha+1}\left[\frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}\mu\left\{t \mid |x(t)| \geqslant \frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}, t \in \Omega\right\} + \frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}\mu\left\{t \mid |y(t)| \geqslant \frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}, t \in \Omega\right\}\right]$$
$$= 2^{\alpha+1}\left[p_{\frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}}(x) + p_{\frac{\lambda}{2^{\alpha+1}}}(y)\right],$$
$$\forall x, y \in L^\alpha(\Omega, \beta, \mu) \ (\lambda > 0).$$

也即推得 $\{p_\lambda \mid \lambda > 0\}$ 为一非负的"广义" $2^{\alpha+1}$–拟次加泛函族. 并且,当设集 $E_\lambda(x) = \{t \mid |x(t)|^\alpha \geqslant \lambda, t \in \Omega\}$时, 还可以得到

$$|p_\lambda(x)| = \lambda \cdot \mu[E_\lambda(x)] \leqslant \int_{E_\lambda(x)} |x(t)|^\alpha \mu(dt)$$
$$\leqslant \int_\Omega |x(t)|^\alpha \mu(dt)$$
$$= \begin{cases} \|x\|^\alpha, & \text{当 } \alpha \geqslant 1 \text{ 时;} \\ \|x\|_{(\alpha)}, & \text{当 } \alpha < 1 \text{ 时,} \end{cases}$$
$$\forall x \in L^\alpha(\Omega, \mathscr{B}, \mu) \quad (\lambda > 0).$$

因而, 我们也就不难直接利用 §4.2 定理 1 后之推理(及注 5)用归谬法导出本命题的前半部分结论; 类似地,由 $M(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 的元之全体是在 $L^\alpha(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 中稠的,因而也就容易得到本命题的后半部分结论,证毕。

推理 7. 空间$R[0,1]$（Riemann 可积函数之全体在范 $\|x\| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$ 下构成的 Banach 空间)的元之全体在有界函数空间 $M[0,1]$"内"组成一个第一纲的线性子空间.

证. 在这里只要注意到空间 $M[0,1]$ 上定义的一列泛函

$$p_n(x) = n\cdot \lim_{\lambda(T)\to 0}[S_T(x(t)) - s_T(x(t))],$$

$$\forall x(t)\in M[0,1]\quad (n=1,2,\cdots)$$

(其中，$S_T(x(t))$，$s_T(x(t))$ 分别表示在$[0,1]$上对应于任意"分法 T"，函数 $x(t)$ 的 Riemann 积分"大和"与"小和")，便不难证明本命题．证毕

推理 8. 空间 $C[0,1]$ 的元的全体在空间 $R[0,1]$"内"组成一个第一纲的线性子空间.

证. 这里，只要注意到空间 $R[0,1]$ 上定义的一列泛函.

$$p_n(x) = n\cdot \sup_{t_0\in[0,1]}(\overline{\lim_{t\to t_0}}\, x(t) - \underline{\lim_{t\to t_0}}\, x(t)),$$

$$\forall x(t)\in R[0,1]\quad (n=1,2,\cdots)$$

就可以了．证毕.

推理 9. 设空间 $MC_0[0,\infty)$是$[0,+\infty)$上的有界殆遍连续，且 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ 的函数的全体在范数 $\|x\| = \sup_{[0,+\infty)} |x(t)|$ 下所成的 Banach 空间．那么，对于其内满足关系式

$$\sup_{\alpha>0}\left|\int_0^\alpha x(t)dt\right| < +\infty$$

的函数 $x(t)$ 之全体 $MR_0[0,+\infty)$，在空间 $MC_0[0,+\infty)$ 内组成一个第一纲的线性子空间，从而，在 $MC_0[0,+\infty)$的范数下它构成一个第一纲的赋范线性空间.

证. 这里，只要注意到空间 $MC_0[0,+\infty)$ 上定义的一族泛函

$$p_\alpha(x) = \int_0^\alpha x(t)dt,\quad \forall x(t)\in MC_0[0,+\infty)\ (\alpha>0)$$

就不难验证上命题的前半部分.

至于后半部分的证明，只要注意到函数族

$$x_\alpha(t)=\begin{cases}x(t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\alpha \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } t>\alpha \text{ 时,}\end{cases}$$

$$\forall x(t)\in MC_0[0,+\infty);\alpha\geqslant 0$$

是稠于空间 $MC_0[0,+\infty)$ 的就可以了. 证毕.

为了讨论有关囿变函数的集,下面先给出两个引理:

引理 1. 设 $\{f_\iota(t)|\iota\in I\}$ 为 $[a, b]$ 区间上的一族复值 (R)-可积函数,并且有

$$\sup_\iota\int_a^b|f_\iota(t)|dt=\infty,$$

那么,所有使得关系式

$$\sup_\iota\left|\int_a^b f_\iota(t)x(t)dt\right|<\infty$$

成立的 (R)-可积复值函数 $x(t)$ 的全体, 在空间 $R[a, b]$ "内" 组成一个第一纲的线性子空间.

证. 只要注意到空间 $R[a, b]$ 上定义的一族泛函

$$p_\iota(x)=\left|\int_a^b f_\iota(t)\cdot x(t)dt\right|,\quad\forall x(t)\in R[a, b];\ \iota\in I.$$

利用 §4.2 定理 1 的推理归谬证明, 且注意到 $R[a, b]$ 空间闭单位球 $\bar{S}(0, 1)$ 上的一特殊元族

$$\left\{e_\iota(t)=\frac{\overline{f_\iota(t)}}{|f_\iota(t)|}\,\middle|\,\iota\in I\right\}(\text{其中,当 } f_\iota(t)=0 \text{ 时,令 } e_\iota(t)=1)$$

即可. 证毕.

引理 1′. 在引理 1 中, 如果将后面的 "$R[a, b]$ 空间" 换为 "$C[a, b]$ 空间",使关系式成立的所有"(R)-可积函数"换为"连续函数",那么,原引理的结论亦成立.

证. 这里,比引理 1 的证明复杂一些, 即在归谬证明中要用到函数论的知识[112], 从而相应地注意到空间 $C[a,b]$ 闭单位球 $\bar{S}(0,1)$ 上的一族特殊元

$$e_{k,\iota}(t)=\frac{k}{2}\int_{t-\frac{1}{k}}^{t+\frac{1}{k}}e_\iota(s)ds,\ k=1, 2, \cdots, \iota\in I\ (t\in[a, b]).$$

(其中

$$e_l(s)=\begin{cases}\dfrac{\overline{f_\iota(s)}}{|f_\iota(s)|}, & \text{当 } s\in[a,b], \text{且 } f_\iota(s)\neq 0 \text{ 时};\\ 1, & \text{其它情况}, \iota\in I.)\end{cases}$$

以及性质 $e_{k,\iota}(t)\xrightarrow[(\text{概})]{}e_\iota(t)(k\to\infty)$; $t\in[a,b]$ $(\iota\in I)$ 和关系式.

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_\iota(t)e_{k,\iota}(t)dt=\int_a^b f_\iota(t)e_l(t)dt=\int_a^b|f_\iota(t)|dt\ (l\in I)$$

就可以了. 证毕.

根据上面的两个引理,我们不难得到下面的两个推理.

推理 10. 囿变函数空间 $V[0,1]$ 的元之全体在空间 $R[0,1]$ "内"组成一个第一纲的线性子空间.

证. 这里,只要在引理 1 中,特别取 (R)-可积函数族 $\{f_l(t)|\iota\in I\}$ 为函数列

$$f_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos\frac{1}{t}}{t}, & t\in\left[\frac{1}{n},\ 1\right],\\ 0, & t\in\left[0,\ \frac{1}{n}\right]\end{cases}\ (n=1,2,\cdots)$$

并注意到囿变函数的特性,从而借助于广义积分的 Abel 收敛性判别法就易证明本命题. 证毕.

类似地,我们也可以由引理 1′ 直接导出下面的推理:

推理 10′. 在区间 $[0.1]$ 上连续的囿变函数的全体,在空间 $C[0,1]$ 内组成一个第一纲的线性子空间;从而,它在空间 $C[0,1]$ 的范数下构成一个第一纲的赋范线性空间.

注 2. 由引理 1′,特别当在空间 $C[-\pi,\pi]$ 上讨论时,并在 $[-\pi,\pi]$ 上取一列 (R)-可积函数为

$$f_n(t)=k_n(s_0,t)=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(S_0-t)\right]}{2\pi\cdot\sin\left[\frac{1}{2}(s_0-t)\right]},$$

$$\forall t,\ s_0\in[-\pi,\pi](n=1,2,\cdots).$$

那么，我们便再次导出了著名的关于“Fourier 级数的发散问题”的结果.

注 3. 在关于“桶形空间”的论著中(可参看文献[33]，[104])，我们知道有一个重要的命题 T：“在[0,1]内某一点存在着右导数的连续函数的全体是空间 $C[0,1]$ 内的第一纲集”，在那里，它的证明是较麻烦的. 但在推理 10′ 中却较容易地得出了比命题 T 较弱的结果.

同样地，利用 §4.2 的结果，我们还可以较容易地得到比命题 T 较弱的另外一个例子如下：

推理 11.* 设 t_0 为[0,1] 内的任一给定点，那么，在 t_0 点存在着左、右导数的连续函数的全体 G，在空间 $C[0,1]$ 内组成一个第一纲的线性子空间；从而，它在空间 $C[0,1]$ 的范数下构成一个第一纲的赋范线性空间.

证. 对于空间 $C[0,1]$ 中的元，当作适当扩展处理后，我们就可以应用关于 Fourier 级数的 Fejér 算子的 Никольский 定理[93]. 这样一来，当在空间 $C[0,1]$ 上做一列泛函

$$p_n(x)=\frac{F_n(x,t_0)-x(t_0)}{F_n\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right|,\ 0\right)},$$

$$n=1,2,\cdots;x\in C[0,1].$$

(其中，$F_n(x,t_0)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t_0+s)\ \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$.) 由通常的“共鸣定理”和 Стеклов 定理我们就可推出：如果上面的集 G 在空间 $C[0,1]$ 内是第二纲集. 那么，$\forall x(t)\in C[0,1]$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)$ 必存在. 即空间 $C[0,1]$ 中的任一函数 $x(t)$ 在 t_0 点均有左、右导数存在. 但这显然是不可能的. 因而用归谬法证得本命题的前半部分结论.

最后，由在区间 [0,1] 上的多项式全体是稠于空间 $C[0,1]$

的，可知上述集G亦在$C[0, 1]$中稠，因此立即得到本命题的后半部分结论，证毕.

注 4. 由第一纲集的定义，进而可知，在区间$[0,1]$内给定的某一点列$\{t_i^0\}$中的某些点上存在着左、右导数的连续函数的全体，是空间$C[0,1]$内的第一纲集. 特别地，在$[0,1]$内的任意"有理点"上存在着左、右导数的连续函数的全体是空间$C[0,1]$内的第一纲集.

注 5.* 推理 10′ 和推理 11 中所举出的第一纲赋范线性空间都不是"桶形空间". 在推理 10′ 的情形是人们已知的. 至于推理 11 的情形，为方便起见，我们取空间为$C[-1, 1]$，取$t_0 = 0$来讨论就可以了. 如果在所涉及的第一纲赋范线性空间G中，对应于囿变函数列

$$g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin t}, & \text{当}\dfrac{1}{2n} \leqslant t < \dfrac{1}{n}\text{时}, \\ \dfrac{-1}{\sin t}, & \text{当}\dfrac{-1}{n} \leqslant t < -\dfrac{1}{2n}\text{时}, \\ 0, & \text{其它的 } t \in [-1, 1]; \end{cases}$$

作出空间G的一列有界线性泛函

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} x(t)dg_n(t), \quad \forall x(t) \in G \ (n = 1, 2, \cdots),$$

那么，通过"积分和"的特定取法并作一些归并和运算，就可得到

$$\begin{aligned} |p_n(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} x(t)dg_n(t)\right| \\ &\leqslant \max_{t', t'' \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]} |x(t') - x(-t'')| \cdot \left[g_n\left(\frac{1}{2n}\right) - g_n\left(\frac{1}{n} - 0\right)\right] \\ &\quad + \left|x\left(\frac{1}{2n}\right) - x\left(-\frac{1}{2n}\right)\right| \cdot g_n\left(\frac{1}{2n}\right) \\ &\quad + \left|x\left(\frac{1}{n}\right) - x\left(-\frac{1}{n}\right)\right| g_n\left(\frac{1}{n} - 0\right) \\ &\leqslant (|x(t_n') - x(0)| + |x(-t_n'') - x(0)|) \\ &\quad \times \left[g_n\left(\frac{1}{2n}\right) + g_n\left(\frac{1}{n} - 0\right)\right] + \left[\left|x\left(\frac{1}{2n}\right) - x(0)\right|\right. \end{aligned}$$

$$+\left|x\left(-\frac{1}{2n}\right)-x(0)\right|\Big]\cdot g_n\left(\frac{1}{2n}\right)+\Big[\left|x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)\right|$$

$$+\left|x\left(-\frac{1}{n}\right)-x(0)\right|\Big]g_n\left(\frac{1}{n}-0\right)$$

$\left(\text{其中，}\frac{1}{2n}\leqslant t_n', t_n''\leqslant\frac{1}{n}\right)$. 然而，空间$G$中的元$x(t)$在$t=0$点是存在着左、右导数$x'_-(0)$、$x'_+(0)$的，因此，可得到

$$|x(t_n')-x(0)|\cdot g_n\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{|x(t_n')-x(0)|}{\sin\frac{1}{2n}}$$

$$=\frac{t_n'}{\frac{1}{2n}}\left|\frac{x(t_n')-x(0)}{t_n'}\right|\cdot\frac{\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}}$$

$$\leqslant\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n}}\left|\frac{x(t_n')-x(0)}{t_n'}\right|\frac{\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}}$$

$$\to 2|x'_+(0)|\qquad(n\to\infty).$$

$$|x(-t_n'')-x(0)|g_n\left(\frac{1}{n}-0\right)=\frac{|x(-t_n'')-x(0)|}{\sin\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{t_n''}{\frac{1}{n}}\cdot\left|\frac{x(-t_n'')-x(0)}{-t_n''}\right|\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\left|\frac{x(-t_n'')-x(0)}{-t_n''}\right|\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$$

$$\to|x'_-(0)|\qquad(n\to\infty)\cdots,$$

从而，立即推得

$$\sup_n |p_n(x)| < \infty, \quad \forall x \in G.$$

但另一方面，显然

$$\|p_n\| = \bigvee_{-1}^{1} (g_n) \to \infty \quad (n \to \infty),$$

故知，在赋范线性空间 G 中，一致有界原理是不成立的．从而，由线性拓扑空间中著名的定理，立即推知此空间不是“桶形空间”．

习　　题

1．试验证本节的推理 1′．

2．试详细验证本节的推理 2．

3．试详细验证本节的推理 4．

4．试详细验证本节的推理 7．

5．试详细验证本节的引理 1．

6．试详细验证本节的推理 10．

§4.5．元列的弱收敛与强收敛

(一)

作为 §4.2 推理 6 的直接结果，我们首先可以得到关于元列弱收敛一个充要条件．

定理 1． 设 E 为一赋范线性空间，$\{x_n\} \subset E, x_0 \in E$．那么，为了 $x_n \xrightarrow[(弱)]{} x_0 (n \to \infty)$，必须且只须满足条件

(i) 数列 $\{\|x_n\|\}$ 有界（且有 $\|x_0\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$）；

(ii) 对于 E^* 中的集 G^*，当 $\overline{[G^*]} = E^*$ 时，有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$，$\forall f \in G^*$．

证． 事实上，由元 $\{x_n\}$，x_0 均可视为 E^* 上的有界线性泛函（注意到 $E \subset E^{**}$），而 E^* 是完备的（因此是第二纲的）赋范线性空间，泛函的值域是数域 $\boldsymbol{K}$，也是一个 Banach 空间，因此可以利用 §4.2 推理 6 得出本定理结论．证毕．

注 1. 由上面的定理可知，对于 E 中任一个无界的元列 $\{x_n\}$ 来说，其绝不可能弱收敛，由此可得下面一例：

例. 在 $L^2[-\pi, \pi]$ 空间中，元列 $\{x_n\} = \{n \sin nt\}$ 是不弱收敛的.

验. 由于

$$\|x_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} n^2 \sin^2 nt\,dt = 2n\int_0^{n\pi} (\sin u)^2 du$$

$$= 2n\left(\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right)\Big|_0^{n\pi} = n^2\pi \to \infty \quad (n \to \infty).$$

因而由上面的定理 1 的逆命题直接可知，$\{x_n\}$ 在 $L^2[-\pi, \pi]$ 内是不存在弱收敛极限的. 验毕.

注 2. 虽然根据定理 1 我们能非常简单地得到上例的结论，然而，若要直接验证却是并不简单的(例可参看[146]第十三章的杂题 19 中 F. Riesz 给出的证法，从中我们可再次体会“抽象”定理的重要性和其丰富内容).

作为定理 1 的应用，我们可以经出几个具体空间弱收敛的充要条件(证明作为习题留给读者完成).

推理 1. 在空间(c)和空间(l^p) $(p > 1)$中，为了元列 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}(n = 1, 2, \cdots)$ 弱收敛到元 $x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}$，必须且只须其满足

(i) 数列 $\{\|x_n\|\}$ 是有界的；

(ii) 对于元 x_n 的每一个坐标 $\xi_k^{(n)}(n = 1, 2, \cdots)$，均有

$$\xi_k^{(n)} \to \xi_k^{(0)} \quad (n \to \infty, k = 1, 2, \cdots).$$

推理 2. 在 $L^p[a, b]$ 空间中 $(p > 1)$，为了元列 $x_n = x_n(t)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 弱收敛到元 $x_0(t)$，必须且只须满足

(i) 数列$\{\|x_n\|\}$是有界的；

(ii) $\forall t \in [a, b]$，均有

$$\int_0^t x_n(s)ds \to \int_0^t x_0(s)ds \quad (n \to \infty).$$

(二)

在 §2.3 中，我们曾经说过，虽然我们可知元列的“强收敛”必

蕴含着其“弱收敛”，然而在一般的赋范线性空间中，“弱收敛”却导不出“强收敛”. 然而，在这一段我们将要指出：在任意有限维的赋范线性空间中以及在空间(l^1)中（虽然它是无穷维的!!)，元列的弱收敛与强收敛却是等价的.

定理 2. 在任意有限维的赋范线性空间中，元列的弱收敛与强收敛是等价的.

证. 由 §1.1 的引理 2（即在有限维空间中，元列的强收敛等价于其各坐标收敛），我们不难看出：只要能证明，对于此有限维空间 E^n 中的任一元列$\{x_k\}$（其中，与 §1.1 一样，设 $x_k=\xi_1^{(k)}e_1+\xi_2^{(k)}e_2+\cdots\xi_n^{(k)}e_n$)，当其弱收敛于元 $x_0=\xi_1^{(0)}e_1+\xi_2^{(0)}e_2+\cdots+\xi_n^{(0)}e_n$ 时，我们就可导出其各坐标收敛，即

$$\xi_i^{(k)}\to\xi_i^{(0)}\quad(k\to\infty,\ i=1,2,\cdots,n).$$

这时，定理便得证. 下面来验证这一事实.

由 Hahn-Banach 定理的推论（§3.3 的定理 1），我们可以得出：由于$\{e_i|i=1,2,\cdots,n\}$是线性无关的，因此，$\forall e_i(1\leqslant i\leqslant n)$，$\exists f_i\in E^*$，使得

$$f_i(e_i)=1;\ f_i(e_j)=0\ \ (i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j).$$

于是，根据$\{x_k\}$弱收敛于 x_0 的假设，则有

$$f_i(x_k)\to f_i(x_0)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\ (k\to\infty).$$

注意到 $f_i(1\leqslant i\leqslant n)$的选法，即导出

$$\xi_i^{(k)}\to\xi_i^{(0)}\qquad(i=1,2,\cdots,n)(k\to\infty).\ \text{证毕.}$$

下面给出关于(l^1)空间强、弱收敛等价的有趣命题：

定理 3 (Schur 定理). 在(l^1)空间中，元列的弱收敛与强收敛是等价的.

证. 其实，我们只要证明，在空间(l^1)中，如果有元列$\{x_n\}$，使得 $x_n\xrightarrow[(\text{弱})]{}\theta(n\to\infty)$，则有 $x_n\to\theta$ $(n\to\infty)$，那么，本定理也就证得了. 下面用归谬法证明此结论.

首先，由 §2.3 我们已知$(l^1)^*=(m)$，因此，如果有 $x_n\xrightarrow[(\text{弱})]{}\theta$ $(n\to\infty)$，则当我们设 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$时，对于任何

的坐标 $\xi_i^{(n)}(i=1,2,\cdots)$，必可导出

$$\xi_i^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{1}$$

其次，如果有 $\|x_n\| \not\to 0$ $(n \to \infty)$，则必有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| = \frac{6}{5}\varepsilon_0 > 0$，且必有自然数 n_0，使得在 $n \geqslant n_0$ 之后，均有 $\|x_n\| < \frac{7}{5}\varepsilon_0$。故由 (l^1) 空间上范数的定义，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| = \frac{6}{5}\varepsilon_0 > 0. \tag{2}$$

因而，由"上极限"的定义及式(2)，可取一自然数 $n_1(>n_0)$ 及其相应的项数 i_1，使得

$$\sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n_1)}| \geqslant \frac{4}{5}\varepsilon_0; \tag{3}$$

由式(1)和(2)，当上面项数 i_1 固定时，我们又可找到一自然数 $n_2 > n_1$，使得

$$\sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n_2)}| < \frac{1}{5}\varepsilon_0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_2)}| > \varepsilon_0; \tag{4}$$

图 4.8

且有项数 i_2，使得

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2} |\xi_i^{(n_2)}| \geqslant \sum_{i=1}^{i_2} - \sum_{i=1}^{i_1} \geqslant \frac{4}{5}\varepsilon_0. \tag{5}$$

一般说来，与上面类似，如果已找出了自然数 n_{k-1} 及与此元 $x_{n_{k-1}}$ 的相应项数 i_{k-1} 时，同样由式(1)和(2)，当项数 i_{k-1} 固定时，必可找到自然数 $n_k > n_{k-1}$，使得

$$\sum_{i=1}^{i_{k-1}} |\xi_i^{(n_k)}| < \frac{1}{5}\varepsilon_0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| > \varepsilon_0; \tag{6}$$

且有项数 i_k，使得

$$\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |\xi_i^{(n_k)}| \geqslant \sum_{i=1}^{i_k} - \sum_{i=1}^{i_{k-1}} \geqslant \frac{4}{5}\varepsilon_0. \tag{7}$$

这样一来，选出了两自然数列$\{n_k\}$和$\{i_k\}$，它们满足相应的上述不等式.

最后，同样由 $(l^1)^* = (m)$，在 (l^1) 上定义一有界线性泛函 $f_0 = \{f_i^{(0)}\} \in (m)$ 为 $f_i^{(0)} = \mathrm{sgn}\xi_i^{(n_k)} = \dfrac{\xi_i^{(n_k)}}{|\xi_i^{(n_k)}|}$，当 $i_{k-1}+1 \leqslant i \leqslant i_k$ 时 $(k = 1,2,\cdots)$（其中，令 $i_0 = 0$）. 我们有

$$\begin{aligned}
|f_0(x_{n_k}(| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(0)}\xi_i^{(n_k)}\right| \\
&\geqslant \left|\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} f_i^{(0)}\xi_i^{(n_k)}\right| - \left|\sum_{(\text{其它})} f_i^{(0)}\xi_i^{(n_k)}\right| \\
&\geqslant \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |\xi_i^{(n_k)}| - \sum_{(\text{其它})} |\xi_i^{(n_k)}| \\
&\geqslant \frac{4}{5}\varepsilon_0 - \frac{3}{5}\varepsilon_0 = \frac{1}{5}\varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}$$

（这里，注意到开始的假设 $\|x_{n_k}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| < \frac{7}{5}\varepsilon_0\,(k=1, 2, \cdots)$）. 从而知

$$f_0(x_{n_k}) \not\to f_0(\theta) = 0 \quad (k \to \infty).$$

此也即 $x_{n_k} \not\xrightarrow{(\text{弱})} \theta(k \to \infty)$，注意到 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，故此显然与原设 $x_n \xrightarrow[(\text{弱})]{} \theta(n \to \infty)$ 矛盾. 证毕.

注 3. 在定理 3 的证明中，我们可以看到，在论证中主要用到的乃是元列的“坐标”收敛于 0 的性质. 因此，我们也可将该定理

精确改述为下面定理：

定理 3′. 在空间(l^1)中，如果元列$\{x_n\}$的各"坐标"均收敛于0，那么，当$\{x_n\}$不强收敛于θ时，必存在一子列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$及一泛函$f_0\in(l^1)^*$，使得

$$f_0(x_{n_k})\geqslant\varepsilon_0>0\quad(k=1,2,\cdots)$$

一致成立.

注 4. 从上面的定理也可看出，虽然在有穷维赋范线性空间中，元列的强收敛与弱收敛是等价的，然而，强、弱收敛等价并不是赋范线性空间为有限维的特征(这与 Hilbert 空间是不同的)

(三)

在本段，我们将讨论当一个元列弱收敛于一元x_0时，如何从该元列构造出另一新的元列，使其以x_0为其强收敛元．这些结果在逼近证中是非常有用的.

首先，利用 §3.3 节定理 1 后的推理以及该节后面的推理 2 可以直接得出下面两个命题：

定理 4. 设E为一赋范线性空间，并设E中的元列$\{x_n\}$弱收敛于元x_0．那么，必定存在由该元列线性组合构成的一个元列$\left\{\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_i\right\}$，使其强收敛于元$x_0$.

定理 5. 设E为一赋范线性空间，并设E中的元列$\{x_n\}$弱收敛于元x_0，那么，必定存在由该元列凸组合构成的一个元列

$$\left\{\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_i\;\middle|\;\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}=1,\lambda_i^{(n)}\geqslant 0,\right.$$
$$\left.i=1,2,\cdots,m(n);n=1,2,\cdots\right\},$$

使其强收敛于元x_0.

注 5. 当一个元列$\{x_n\}$弱收敛于x_0时，其内任何子列$\{x_{n_k}\}$也必弱收敛于x_0，因此，在上述的两定理中，当将那里线性组合或凸组合的元列中的x_i换为x_{n_i}时，其结论仍成立.

定理 5′. 设E为一赋范线性空间，$\{x_n\}\subset E$，$x_0\in E$．那么，

为了$\{x_n\}$弱收敛于 x_0，必须且只须对于任一自然数(增)子列$\{n_i\}$，必存在由$\{x_{n_i}\}$构成的凸组合元列 $\{y_n\}=\left\{\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_{n_i}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}=1,\right.$ $\left.\lambda_i^{(n)}\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m(n);\ n-1,2,\cdots\right\}$，使其强收敛于元 x_0。

证. 必要性已由注 5 得到. 下面仅证明定理的充分性.

事实上，$\forall 0\neq f\in E^*$，先令$\beta_f=\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)$，$\alpha_f=\underline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)$，那么，由下极限定义可知$\forall\varepsilon>0$，$\exists\{n_k\}$（自然数列），使得

$$f(x_{n_i})<\alpha_f+\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\cdots.\tag{8}$$

今对于此自然数列

$$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_i<\cdots,$$

由定理假设，对于上述正数ε，则可找到一凸组合元

$$y_{n_0}=\sum_{i=1}^{m(n_0)}\lambda_i^{(n_0)}x_{n_i}\in\{y_n\},$$

使得

$$\|y_{n_0}-x_0\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\|f\|},\tag{9}$$

于是，就得到

$$\begin{aligned}f(x_0)&=f(x_0-y_{n_0})+f(y_{n_0})\\&\leqslant\|f\|\,\|x_0-y_{n_0}\|+\sum_{i=1}^{m(n_0)}\lambda_i^{(n_0)}f(x_{n_i}).\end{aligned}$$

由式(8)和(9)，可导得

$$f(x_0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{m(n_0)}\lambda_i^{(n_0)}\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\alpha+\varepsilon,$$

注意到ε任意性，还可导出

$$f(x_0)\leqslant\alpha_f=\underline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n),\quad\forall f\in E^*.$$

于是，再当用 $-f$ 代替 f 时，从上、下极限的转换关系，有

$$f(x_0)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n),\quad\forall f\in E^*.$$

最后,当把上面的$\{x_n\}$换为$\{x_n\}$的任何一个子列$\{x_{n_i}\}$时,那里的结论仍是成立的. 因此,可导出

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n),\quad \forall f\in E^*$$

也即得到 $x_n \xrightarrow[(弱)]{} x_0\ (n\to\infty)$. 证毕.

为了介绍下面一个关于"线性组合"的元(强)逼近的较一般性之定理,我们来介绍一个引理(为此,我们先回忆在155页脚注中关于任意线性空间中(关于θ点)"对称"集V的定义,即有: $\forall x\in V$, $\forall\lambda\in \boldsymbol{K}, |\lambda|=1\Rightarrow \lambda x\in V$):

引理. 设E为一赋范线性空间, V是E中一关于原点θ"对称"的凸集,并设

$$\rho(V)=\inf_{\|f\|=1}\ \sup_{x\in V}|f(x)|\quad (f\in E^*).$$

那么,为了集V在"原心球"$\bar{S}(\theta,\rho_0)$中是稠的,必须且只须其满足条件$\rho(V)\geqslant\rho_0$.

证. 1)"$\Longrightarrow$" 这是显然的. 由V在$\bar{S}(\theta,\rho_0)$稠的假设,我们有

$$\sup_{x\in V}|f(x)|\geqslant\sup_{\|x\|\leqslant\rho_0}|f(x)|=\rho_0\|f\|,\qquad \forall f\in E^*,$$

因而,直接导出: $\rho(V)=\inf\limits_{\|f\|=1}\ \sup\limits_{x\in V}|f(x)|\geqslant\rho_0$.

2)"$\Longleftarrow$" 反之,如果在定理所设条件下,却有元$x_0\in\bar{S}(\theta,\rho_0)$,使得 $x_0\notin\bar{V}$, 那么, 当我们先将E视为"实"赋范线性空间时,由§3.3的定理则知,存在一个E上的"实"有界线性泛函R_1,使得

$$\sup_{x\in V}R_1(x)<R_1(x_0).$$

类似§3.3推理1的证明,如果当E为复空间时,令$f_1(x)=R_1(x)-iR_1(ix)$, $\forall x\in E$. 那么, $f_1\in E^*$; 且由V关于原点θ的对称性可知,对任意$x\in V$,如果设$\theta_0=\arg f_1(x)$则亦有$e^{-i\theta_0}x\in V$, 从而由上式以及x_0的假设,我们可得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in V}|f_1(x)|&=\sup_{x\in V}[e^{-i\theta_0}f_1(x)]=\sup_{x\in V}f_1(e^{-i\theta_0}x)\\&=\sup_{x\in V}\mathrm{Re}f_1(e^{-i\theta_0}x)=\sup_{x\in V}R_1(e^{-i\theta_0}x)\end{aligned}$$

$$= \sup_{x \in V} R_1(x) < R_1(x_0) \leqslant |f_1(x_0)|$$
$$\leqslant \|f_1\|\|x_0\| \leqslant \|f_1\|\rho_0.$$

由此便导出

$$\rho(V) = \inf_{\|f\|=1} \sup_{x \in V} |f(x)| \leqslant \frac{1}{\|f_1\|} \sup_{x \in V} |f_1(x)| < \rho_0.$$

显然与假设条件 $\rho(V) \geqslant \rho_0$ 矛盾．证毕．

定理 6. 设 E 为一赋范线性空间，$\{x_n\} \subset E$，那么，为了对每个元 $x \in E$ 及任意正数 ε，必定存在元列的一线性组合 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$，使其满足条件

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| < \varepsilon, \quad \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - x \right\| < \varepsilon,$$

必须且只须 $\forall f \in E^*$，如果 $\sup_n |f(x_n)| < \infty$，则有 $f = 0$（零泛函）．

证．1)"$\Longrightarrow$" 由定理条件可导出 $\forall f \in E^*$，有

$$|f(x)| \leqslant \left| f(x) - f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \right| + \left| f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \right|$$
$$\leqslant \|f\| \cdot \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot |f(x_k)|$$
$$\leqslant \|f\| \cdot \varepsilon + (\sup_n |f(x_n)|)\varepsilon, \quad \forall x \in E$$

成立．因而不难导出 $f = 0$．

2)"$\Longleftarrow$" 由定理假设可知(用逆否命题形式)，如果有一泛函 $f_1 \neq 0$（零泛函），则 $\sup_n |f_1(x_n)| = \infty$．因此，当定义集

$$V_k = \left\{ y \middle| y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leqslant \frac{1}{k}, m = 1, 2, \cdots \right\}$$
$$(k = 1, 2, \cdots)$$

时，显然可以看出，对每一自然数 k，V_k 均是关于 θ 点"对称"的凸集，并且有元 $\frac{x_n}{k} \in V_k$ $(n = 1, 2, \cdots)$；于是，由关于泛函 f_1 的假

设，我们就有

$$\sup_{x\in V_k}|f_1(x)|\geqslant\sup_n\left|f_1\left(\frac{x_n}{k}\right)\right|=\frac{1}{k}\sup_n|f_1(x_n)|=\infty$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

由此可导出

$$\rho(V_k)=\inf_{\|f\|=1}\sup_{x\in V_k}|f(x)|=\infty\quad(k=1,2,\cdots).$$

最后，由上面的引理则可导出，对于E中任意球$\bar{S}(\theta,\rho)$，均有$\bar{V}_k\supset\bar{S}(\theta,\rho)$，也即每一个集$V_k(k=1,2,\cdots)$均是稠于空间$E$的。证毕.

注 6. 借助于上面的命题，我们不难看出，著名的(关于闭区间上的连续函数可以由多项式“一致逼近”) Weierstrass 定理其实与下面的推理是等价的:

推理 (Lerch). 设$g(t)$是$[a,b]$上的一个有界变差函数，并设其在$[a,b]$上左连续，$g(b)=0$. 那么，如果有

$$\int_a^b t^n dg(t)=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

则在$[a,b]$上必有$g(t)\equiv 0$(关于这个推理的证明及其等价性的证明，我们留给读者自己完成).

(四)

在什么条件下，一个元列的强收敛与其弱收敛能够等价呢?这是一个仍待研究的有趣问题. 下面，我们给出几个已知的结果.

定理 7. 当赋范线性空间E为一“内积空间”时，那么，为了弱收敛于x_0的元列$\{x_n\}$也强收敛于x_0，必须且只须其“范数”也收敛，即有$\|x_n\|\to\|x_0\|\ (n\to\infty)$.

证. 必要性是显然的. 下面证明其充分性. 此时，只要注意到“内积”性质，由

$$\|x_n-x_0\|^2=(x_n-x_0,x_n-x_0)$$

$$=\|x_n\|^2-(x_0,x_n)-(x_n,x_0)+\|x_0\|^2\quad(n=1,2,\cdots),$$

并注意到内积是连续的以及定理的假设，直接可以导出

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\|^2 = \|x_0\|^2 - 2(x_0, x_0) + \|x_0\|^2 = 0,$$

也即导得 $x_n \to x_0 (n\to\infty)$. 证毕.

由上面定理的启发，回忆到 §3.6 关于"一致凸"空间的概念，可以将其推广得到下面的定理：

定理 8. 设 E 为"一致凸"的赋范线性空间. 那么，为了弱收敛于 x_0 的元列 $\{x_n\}$ 也强收敛于 x_0，必须且只须其有 $\|x_n\| \to \|x_0\|$ $(n\to\infty)$.

证. 同样，只要证明定理的充分性就可以了. 首先，我们假设 $x_0 \neq \theta$（否则定理结论已得），并且不妨假设 $x_n \neq \theta$ $(n = 1, 2, \cdots)$，于是，当设 $x_0' = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$，$x_n' = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 时，由定理假设显然可以看出

$$x_n' \xrightarrow[(弱)]{} x_0' \quad (n\to\infty).$$

此时，必有 $x_n' \to x_0'$ $(n\to\infty)$.

反之，如果 $\|x_n' - x_0'\| \not\to 0$ $(n\to\infty)$，那么，由空间的一致凸的假设，可得

$$\|x_n' + x_0'\| \not\to 2 \quad (n\to\infty).$$

注意到 $\|x_n' + x_0'\| \leqslant \|x_n'\| + \|x_0'\| = 2 (n = 1, 2, \cdots)$，由上式则知，必存在一子列 $\{x_{n_k}'\} \subset \{x_n'\}$ 及一正数 ε_0，使得一致有

$$\|x_{n_k}' + x_0'\| < 2 - \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{10}$$

但另一方面，由$\{x_n'\}$弱收敛于 x_0' 的假设，我们还有

$$x_{n_k}' + x_0' \xrightarrow[(弱)]{} 2x_0' \ (k\to\infty).$$

从而由前面的定理 1 及式(10)，可导出

$$\|2x_0'\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\|x_{n_k}' + x_0'\| \leqslant 2 - \varepsilon_0,$$

也即 $\|x_0'\| \leqslant 1 - \dfrac{\varepsilon_0}{2} < 1$，此显然与 x_0' 的取法矛盾. 从而即知 $x_n' \to x_0' (n\to\infty)$.

最后，根据定理假设以及关于 $\{x_n'\}$，x_0' 的性质，我们从式

$$
\begin{aligned}
\|x_n - x_0\| &= \left\| \|x_n\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - x_0 \right\| \\
&\leqslant \left\| \|x_n\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{\|x_n\|}{\|x_0\|} x_0 \right\| + \left\| \frac{\|x_n\|}{\|x_0\|} x_0 - x_0 \right\| \\
&\leqslant \|x_n\| \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\| + \left| \frac{\|x_n\|}{\|x_0\|} - 1 \right| \cdot \|x_0\| \\
&= \|x_n\| \cdot \|x_n' - x_0'\| + \left| \frac{\|x_n\|}{\|x_0\|} - 1 \right| \cdot \|x_0\| \\
&\qquad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

不难导出 $x_n \to x_0 \, (n \to \infty)$. 证毕.

注 7. 上面的定理对于非一致凸空间未必成立

反例. 在 (c) 空间中，我们取元列 $x_n = (1, 1, \cdots, \underset{(n)}{1}, 0, 0, \cdots) \, (n = 1, 2, \cdots)$. 那么,必有 $x_n \rightharpoonup e_0' = (1, 1, \cdots)$; $\|x_n\| \to \|e_0'\| (n \to \infty)$. 然而, $x_n \not\to e_0' \, (n \to \infty)$.

验. 我们逐条来验证所需的结论:

1) 注意到 $(c)^* = (l^1)$, 且有 $\forall f = \{f_i\} \in (l^1)$, 均有

$$
f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k \to \sum_{k=1}^{\infty} f_k = f(e_0') \quad (n \to \infty)
$$

成立,因而,可知 $x_n \rightharpoonup e_0' (n \to \infty)$.

2) 从(c)空间范数的定义，我们显然可知 $\|x_n\| = 1 = \|e_0'\| \, (n = 1, 2, \cdots)$.

3) 同样由空间(c)中范数的定义,我们还有

$$
\|x_n - e_0'\| = \|(0, \cdots, \underset{(n)}{0}, 1, 1, \cdots)\| = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots).
$$

从而可知 $x_n \not\to e_0' \, (n \to \infty)$. 验毕.

在本段最后,我们(借助于 §3.6 关于 $C[0,1]$空间的“万有性”定理)将要给出一个与上两定理形式相关联的一个重要定理,它将深刻地揭示出，在一个可分的 Banach 空间中，其元列的强、弱收敛与其范数收敛之间紧密的内在联系[81]. 为此，我们先介绍两个引理.

引理 1. 设元列$\{x_n^\circ\} \subset C[0, 1]$ 满足条件 $\|x_n^\circ\| = 1 \; (n = 1, 2, \cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty} x_n^\circ(t) = 0, \quad \forall t \in [0,1]$$

那么，$\forall \delta > 0$，当设 $\omega(x_n^\circ, \delta) = \max\limits_{|t'-t''|\leqslant\delta} |x_n^\circ(t') - x_n^\circ(t'')|$ 时，我们有

$$\varliminf_{n\to\infty} \omega(x_n^\circ, \delta) \geqslant 1$$

（为了简单起见，数 $t', t'' \in [0,1]$. 我们均省略不写了）.

证. 首先，由 Егоров 定理我们可知：$\forall \delta > 0, \exists E \subset [0,1]$，使得 $\mu(E) > 1 - \delta$，且在 E 上，$x_n^\circ(t) \underset{(一致)}{\Longrightarrow} 0 \ (n \to \infty)$. 于是，$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$（自然数），使当 $n > n_0$ 时，就有 $|x_n^\circ(t)| < \varepsilon, \forall t \in E$. 这样，当设 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_n^\circ(t)| = |x_n^\circ(t_n')|$ 时，$\forall t'' \in E$，只要 $|t_n'' - t_n'| \leqslant \delta$（从 E 的测度性质，这样的点 t_n'' 一定是存在的），则有

$$\begin{aligned}|x_n^\circ(t_n') - x_n^\circ(t_n'')| &> |x_n^\circ(t_n')| - |x_n^\circ(t_n'')| \\ &> \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_n^\circ(t)| - \varepsilon = \|x_n^\circ\| - \varepsilon \\ &= 1 - \varepsilon, \quad \forall n > n_0.\end{aligned}$$

从而导出

$$\begin{aligned}\omega(x_n^\circ, \delta) &= \max_{|t'-t''|\leqslant\delta} |x_n^\circ(t') - x_n^\circ(t'')| \\ &\geqslant |x_n^\circ(t_n') - x_n^\circ(t_n'')| > 1 - \varepsilon, \quad \forall n > n_0.\end{aligned}$$

也即有

$$\varliminf_{n\to\infty} \omega(x_n^\circ, \delta) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

最后，注意到正数 ε 的任意性，我们则可直接得出本引理的结论. 证毕.

引理 2. 如果元列 $\{x_n^\circ\} \subset C[0,1]$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty} x_n^\circ(t) = 0, \ \forall t \in [0,1],$$

那么，$\forall x \in C[0,1]$，$\forall \delta > 0$，均有

$$\varliminf_{n\to\infty} \omega(x + x_n^\circ, \delta) \geqslant \omega(x, \delta).$$

证. 假设 $t', t'' \in [0,1]$，满足 $|t' - t''| \leqslant \delta$ 及 $|x(t') - x(t'')| = \omega(x, \delta)$. 那么，由 $x_n^\circ(t)$ 的假设，$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$（自然数），使得当 $n > n_0$ 时，就有 $|x_n^\circ(t')| < \varepsilon/2, |x_n^\circ(t'')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 这样一来，我们就有

$$|[x(t')+x_n^\circ(t')]-[x(t'')+x_n^\circ(t'')]|$$
$$\geqslant |x(t')-x(t'')|-|x_n^\circ(t')|-|x_n^\circ(t'')|$$
$$>\omega(x,\delta)-\varepsilon,\quad \forall n>n_0.$$

从而导出

$$\omega(x+x_n^\circ,\delta)>\omega(x,\delta)-\varepsilon,\quad \forall n>n_0,$$

由此则得:

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega(x+x_n^\circ,\delta)\geqslant\omega(x,\delta)-\varepsilon.$$

最后,由正数 ε 的任意性,我们可直接得出本引理结论. 证毕.

有了上面两个引理,我们就可引出下面定理:

定理 9 (**Кадец**) 如果 E 为一个"可分的" Banach 空间, 那么,我们能够在 E 中引入一个新的范数"$\|\cdot\|^*$", 使它与 E 的原范数等价; 并且, 在此范数下, 对于任意一个弱收敛于 x_0 的元列 $\{x_n\}$, 只要有 $\|x_n\|^*\to\|x_0\|^*(n\to\infty)$, 就可导出 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0.

证. 首先,从§3.6 后的附录关于 $C[0,1]$空间"万有性"定理,由于每一个可分的 Banach 空间均与 $C[0,1]$内某一个闭线性子空间等价,因此,我们只要对空间 $C[0,1]$ 证明本命题就可以了.

其次,我们在 $C[0,1]$ 空间中重新定义一个新的范数

$$\|x\|^*=\|x\|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right),\ \forall xC\in[0,1].$$

($\|\cdot\|^*$ 构成一个范数是容易验证的), 由于

$$\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)=\max_{|t'-t''|\leqslant\frac{1}{k}}|x(t')-x(t'')|\leqslant 2\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|=2\|x\|,$$

因此,导出

$$\|x\|\leqslant\|x\|^*\leqslant 3\|x\|,\ \forall x\in C[0,1].$$

即上面定义的新范数"$\|\cdot\|^*$"与原空间的范数是等价的. 我们将此新范数下的连续函数空间记为 C_*.

于是,为了在 C_*空间中证明本定理的结论,只要证明, $\forall\{x_n^\circ\}\subset C_*$, 如果 $x_n^\circ\xrightarrow[(弱)]{}\theta$, 而 $x_n^\circ\not\to\theta\ (n\to\infty)$; 那么, $\forall x\in C_*$,必有

$\|x+x_n^\circ\|^* \not\to \|x\|^* (n\to\infty)$就可以了(即原命题变形后的逆否命题).下面我们就利用上面两个引理来证明这个结论.

事实上,由 $x_n^\circ \not\to 0$ $(n\to\infty)$,可找出一正数 $\varepsilon_0<1$ 及一子列(为简单起见,我们就取为$\{x_n^\circ\}$本身)$\{x_n^\circ\}$,使得均有$\|x_n^\circ\|^*>3\varepsilon_0$.由 $\{x_n^\circ\}$ 弱收敛于 θ 的假设,不难导出(注意 $V[0,1]$ 上的元均为 $C[0,1]$ 上的有界线性泛函,但根据上面范数的等价性,知其亦为 C_*上的有界线性泛函),$\{x_n^\circ(t)\}$是逐点收敛于 0 的,因而由引理 1 导出(注意,$\|x_n^\circ\|\geqslant\dfrac{\|x_n^\circ\|^*}{3}>\varepsilon_0$)

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega\left(x_n^\circ,\frac{1}{k}\right)>\varepsilon_0\quad(k=1,2,\cdots).\tag{11}$$

此外,对任意的元 $x\in C_*$,由 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上的一致连续性,对上述正数 ε_0,我们又可找到一自然数 k_0,使得均有

$$\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)<\frac{\varepsilon_0}{8},\ \forall k>k_0.\tag{12}$$

于是,对任意自然数 N,由式(11),及下极限的性质,可找到一(公共的时刻)自然数 n_0,使得

$$\omega\left(x_n^\circ,\frac{1}{k}\right)>\varepsilon_0\ (k=1,2,\cdots,k_0+N);\ \forall n\geqslant n_0.$$

从而有

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x_n^\circ,\frac{1}{k}\right)>\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+1}},\quad\forall n\geqslant n_0.\tag{13}$$

当注意到引理 2 时,同样由下极限的性质,我们可以得到一个自然数 N_1,使得

$$\omega\left(x+x_n^\circ,\frac{1}{k}\right)>\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}}\text{(当 }k\leqslant k_0\text{ 时)};\quad\forall n\geqslant n_1.\tag{14}$$

这样,由于

$$\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\frac{1}{k}\right)$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\ \frac{1}{k}\right), \tag{15}$$

利用式(14)和(12)，我们可对(15)式右端的第一个和数作如下的估计：

$$\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\ \frac{1}{k}\right)\overset{(4)}{>}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\left[\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}}\right]$$

$$>\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}}$$

$$=\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}}$$

$$\overset{(2)}{>}\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\left(\frac{\varepsilon_0}{\delta}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}}$$

$$>\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+2}}; \tag{16}$$

由式(13)和(12)，我们又可对(15)式中的第二个和数作如下的估计：

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\ \frac{1}{k}\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x_n^\circ,\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)$$

$$\overset{(3),\ (2)}{>}\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+1}}-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}}=\frac{3\varepsilon_0}{2^{k_0+3}}; \tag{17}$$

于是,将上式(16)和(17)相加,可得到

$$\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\ \frac{1}{k}\right)>\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}},$$

$$\forall n\geqslant\max(n_0,\ n_1).$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\ \frac{1}{k}\right)\geqslant\sum_{k=1}^{k_0+N}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+3}};$$

根据N的任意性，可导出

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(x+x_n^\circ,\ \frac{1}{k}\right)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\omega\left(x,\frac{1}{k}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2^{k_0+2}}.$$

最后，同样由在 $V[a,b]$中的元亦为 C_* 上的有界线性泛函，因此，由假设条件亦可导出，在原来的空间 $C[0,1]$ 内亦有 $x_n^\circ \xrightarrow[(弱)]{} \theta$，即 $x+x_n^\circ \xrightarrow[(弱)]{} x\ (n\to\infty)$，所以由定理 1 我们还有

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x+x_n^\circ\|\geqslant\|x\|.$$

将上面两式相加，可导出

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x+x_n^\circ\|^*>\|x\|^*,\quad \forall x\in C_*.$$

即 $\|x+x_n^\circ\|^*\not\to\|x\|^*, \forall x\in C_*$. 证毕.

（五）

本节最后，介绍弱收敛元在“全连续”线性算子作用下的性质，为此，我们先给出一个引理(它的证明留给读者完成)：

引理. 设$\{x_n\}$为赋范线性空间E中的一元列，T为从E到另一赋范线性空间E_1内的一有界线性算子. 那么，只要有 $x_n \xrightarrow[(弱)]{} x_0\ (n\to\infty)$，则亦有 $T(x_n) \xrightarrow[(弱)]{} T(x_0)\ (n\to\infty)$.

定理 10. 设A为赋范线性空间E到E_1内的全连续线性算子. 那么，$\forall\{x_n\}\subset E$，如果有 $x_n \xrightarrow[(弱)]{} x_0\,(n\to\infty)$. 则必有$A(x_n)\to A(x_0)\ (n\to\infty)$.

证. 首先，由上面的引理我们可得（联系 §2.2 中关于全连续线性算子的性质.）

$$A(x_n) \xrightarrow[(弱)]{} A(x_0)\ (n\to\infty),$$

其次，如果此时 $A(x_n)\not\to A(x_0)\ (n\to\infty)$，那么，$\exists\varepsilon_0>0,\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使得

$$\|A(x_{n_k})-A(x_0)\|\geqslant\varepsilon_0\quad(k=1,2,\cdots).$$

另一方面，注意到本节的定理 1 我们可知，数列$\{\|x_{n_k}\|\}$作为$\{\|x_n\|\}$的子列，因而也是有界的；因此，由全连续算子的定义可知，$\{A(x_{n_k})\}$

中必存在一收敛子列 $\{A(x_{n_{k_\nu}})\}$. 最后,由于元列的强收敛之极限元必亦为其弱收敛的极限元,以及弱收敛的极限元是一意确定的,因此便可得到

$$A(x_{n_{k_\nu}}) \to A(x_0) \quad (\nu \to \infty).$$

但由元列 $\{x_{n_{k_\nu}}\} \subset \{x_{n_k}\}$, 因而此式与上式矛盾. 从而可知应有 $A(x_n) \to A(x_0)$ $(n \to \infty)$. 证毕.

有意思的是,当空间 E 是自反的时候,上面定理的把"弱"收敛转变为"强"收敛的性质也表明一个线性算子是全连续算子的特征.

定理 10′. 当 E 是自反空间时, 从 E 到赋范线性空间 E_1 内的线性算子 A, 如果对于任意元列 $\{x_n\} \subset E$,只要有 $x_n \xrightarrow[\text{(弱)}]{} x_0$,就必有 $A(x_n) \to A(x_0)$ $(n \to \infty)$成立. 那么, A 必为全连续的.

证. 事实上,由 §3.5 可知, 自反空间内的任意有界闭集必是弱自列紧的. 因此对于任意有界无穷点集 M, 必定存在一元列 $\{x_n\} \subset M$, 使得

$$x_n \rightharpoonup x_0 \in \overline{M} \quad (n \to \infty).$$

因而由定理假设,则应有

$$A(x_n) \to A(x_0) \quad (n \to \infty)$$

也即$\{A(x_n)\}$是 E_1 中一收敛列,从而知 A 为全连续算子. 证毕.

习　　题

1. 试证明本节定理 1 后的推理 1.
2. 试证明本节定理 1 后的推理 2.
3. 试证明本节注 6.
4. 试证明本节注 6 中的推理.
5. 试证明本节定理 10 前面的引理.
6. 设 $\{x_n\}$ 为赋范线性空间一弱收敛于 x_0 的元列. 试证明: 为了 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0, 必须且只须$\{x_n\}$是列紧集.
7. 设元列$\{x_n\} \subset (l^1)$满足 $\forall f \in (l^1)^*$, $\{f(x_n)\}$ 均为收敛数列. 试证明: 必定存在一元 $x_0 \in (l^1)$,使得 $x_n \xrightarrow[\text{(弱)}]{} x_0$ $(n \to \infty)$.

§ 4.6. 关于拟次加泛函的有限性

利用 § 4.2 中关于共鸣定理的证明方法，我们也可以讨论拟次加泛函 $p(x)$ 取 $\pm\infty$ 的点的分布情况以及满足 $p(x) < \infty$ 的区域的构造情况[16]．根据拟次加泛函的定义，我们要求它不必定义在整个空间 E 上而只需要定义在空间内的一个所谓"半模"(加法半群)的集合中就可以了.

定义. 空间 E 中的集合 Σ 称为半模，是指在 Σ 内定义了一个加法运算"+"，使其满足

(i) 当 $x \in \Sigma$, $y \in \Sigma$ 时，唯一确定一元 $x + y \in \Sigma$ (封闭);

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \Sigma$ (结合);

(iii) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \Sigma$ (交换).

如果 E 为距离空间，且半模 $\mathfrak{S}$ 是以零元 θ 为极限点的一个开集，则称 $\mathfrak{S}$ 为 E 中的角形半模.

(一)

首先，我们讨论拟次加泛函取有限值与取 $\pm\infty$ 的区域间的相互关系，特别是当其值"上有限"(即不取 $+\infty$)时，其取 $-\infty$ 的区域的情况．为此，我们先给出一个引理(它的证明留给读者完成):

引理. 设 $S(x_0, \delta_0)$ 为赋范线性空间 E 内的一个球．那么，集 $V = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda S(x_0, \delta_0)$ 必满足

(i) $V + V \subset V$; (ii) $\lambda V \subset V$ $(\forall \lambda > 0)$.

定理 1. 设定义在 E 中集 $V = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda S(x_0, \delta_0)$ 内的 k-拟次加泛函 $p(x)$ 满足

(i) 在(开凸集) $V_1 = \bigcup_{0 < \lambda \leq 1} \lambda S(x_0, \delta_0)$ 内均有 $p(x) < \infty$;

(ii) 在 V_1 的"底边界" $(V \setminus V_1) \cap \{x \mid \|x - x_0\| = \delta_0\}$ 上均有 $p(x) = -\infty$.

那么，泛函 $p(x)$ 必在整个集 $V\backslash V_1$ 内恒取 $-\infty$（本节，我们均假定在赋范线性空间 E 上来讨论，有时，为简便起见，我们就不一一指明了）.

证. 首先，由上面的假设条件(i)我们由泛函 $p(x)$ 的拟次加性及引理，显然容易导出

$$p(x) < \infty, \quad \forall x \in V \tag{1}$$

其次，$\forall y \in V\backslash V_1$，必有 $\|y - x_0\| \geqslant \delta_0$ 成立. 事实上，如若不然，当 $\|y - x_0\| = \delta_1 < \delta_0$ 时，我们可取数 $\lambda_1 = \dfrac{\delta_1 + \|x_0\|}{\delta_0 + \|x_0\|}$，其显然有 $0 < \lambda_1 < 1$，并且有

$$\begin{aligned}\|y - \lambda_1 x_0\| &\leqslant \|y - x_0\| + \|x_0 - \lambda_1 x_0\| \\ &= \delta_1 + (1 - \lambda_1)\|x_0\| = \lambda_1 \delta_0.\end{aligned}$$

从而得到 $y \in \lambda_1 S(x_0, \delta_0) \subset V_1$ 其与原假设矛盾.

这里，对 $\|y - x_0\| > \delta_0$ 的情况来讨论（因为在 $\|y - x_0\| = \delta_0$ 时，由假设已经得出 $p(y) = -\infty$）.

此时，由 y 的假设可知，$\exists \lambda_1 > 1$，$x_1 \in V$，使得

$$y = \lambda_1 x_1, \quad \|x_1 - x_0\| < \delta_0.$$

此外，当令函数

$$\varphi(\lambda) = \|\lambda x_1 - x_0\|$$

时，显然 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的连续函数(参看图 4.9)，且有

$$\varphi(\lambda_1) = \|\lambda_1 x_1 - x_0\| = \|y - x_0\| > \delta_0,$$

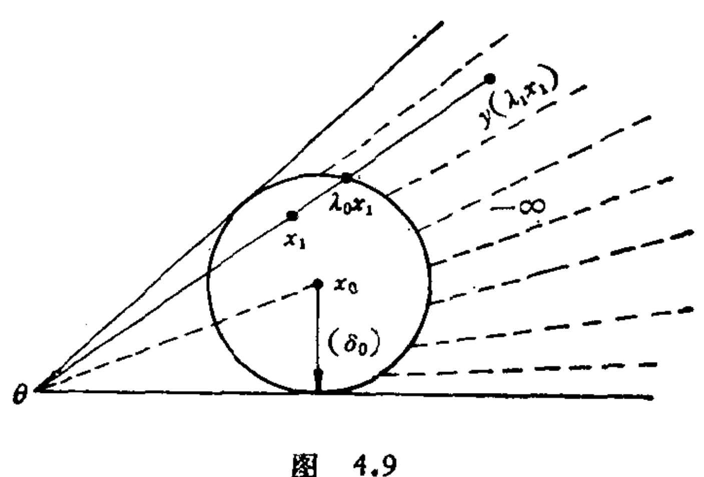


图 4.9

$$\varphi(1) = \|x_1 - x_0\| < \delta_0.$$

因而，由连续函数性质可知，当令数

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda \mid \varphi(\lambda) < \delta_0, \lambda \in [1, \lambda_1]\}$$

时，必有 $\varphi(\lambda_0) = \delta_0$，即有 $\|\lambda_0 x_1 - x_0\| = \delta_0$（以及 $1 < \lambda_0 < \lambda_1$）.

下面验证元 $\lambda_0 x_1 \in V \setminus V_1$. 事实上，由上面引理我们显然可知 $\lambda_0 x_1 \in V$，另外，如果 $\lambda_0 x_1 \in V_1$，那么，$\exists 0 < \lambda_2 < 1$，$x_2 \in V$，使得

$$\lambda_0 x_1 = \lambda_2 x_2, \quad \|x_2 - x_0\| < \delta_0.$$

由此可导出

$$\left\| \frac{\lambda_0}{\lambda_2} x_1 - x_0 \right\| = \|x_2 - x_0\| < \delta_0.$$

也即有 $\varphi\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}\right) < \delta_0$. 但由上面 λ_0 的取法应有 $\frac{\lambda_0}{\lambda_2} < \lambda_0$. 矛盾.

将上面两段结论合起来，得出元

$$\lambda_0 x_1 \in (V \setminus V_1) \cap \{x \mid \|x - x_0\| = \delta_0\},$$

因此，从定理假设应有 $p(\lambda_0 x_1) = -\infty$. 最后由 x_1，λ_0 的取法有 $x_1 \in S(x_0, \delta_0)$，$\lambda_1 - \lambda_0 > 0$，故由上面的引理应有 $(\lambda_1 - \lambda_0) x_1 \in V$. 因而由泛函的拟次加性以及式(1)，可导出

$$p(y) = p(\lambda_1 x_1) \leqslant k\{p(\lambda_0 x_1) + p[(\lambda_1 - \lambda_0) x_1]\} \leqslant -\infty.$$

即

$$p(y) = -\infty, \quad \forall y \in V \setminus V_1.$$

证毕.

定理 2. 假设定义在（凸锥）$V = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda S(x_0, \delta_0)$ 内的拟次加泛函 $p(x)$ 满足

(i) 在（开凸集）$V_1 = \bigcup_{0 < \lambda \leqslant 1} \lambda S(x_0, \delta_0)$ 内均有 $p(x) < \infty$；

(ii) 在开球 $S(x_0, \delta_0)$ 内 $p(x)$ 的数值有上界（或不取∞）.

那么，泛函 $p(x)$ 或者在 x_0 的某一球 $S(x_0, \delta_0)$ 内的值是有界的（相应地不取$\pm\infty$）或者在开集 $\bigcup_{\lambda \geqslant 1} \lambda S(2x_0, \delta_0)$ 内恒取$-\infty$.

证. 假若泛函 $p(x)$ 在 x_0 的任意球 $S(x_0, \delta) \subset S(x_0, \delta_0)$ 内的值均无下界（相应地有取$-\infty$的点），那么，必定存在一元列 $\{x_n\} \subset$

$S(x_0, \delta_0)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，且

$$p(x_n) < -n \text{（相应地，} p(x_n) = -\infty\text{）} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

今考虑 V 内的球 $S(2x_0, \delta_0)$，由上面的论述知，$\forall x \in S(2x_0, \delta_0)$ $\exists N$（自然数），使得当 $n > N$ 时，均有

$$\|x_n - x_0\| < \delta_0 - \|x - 2x_0\|.$$

从而有

$$\|(x - x_n) - x_0\| \leqslant \|x - 2x_0\| + \|x_n - x_0\| < \delta_0.$$

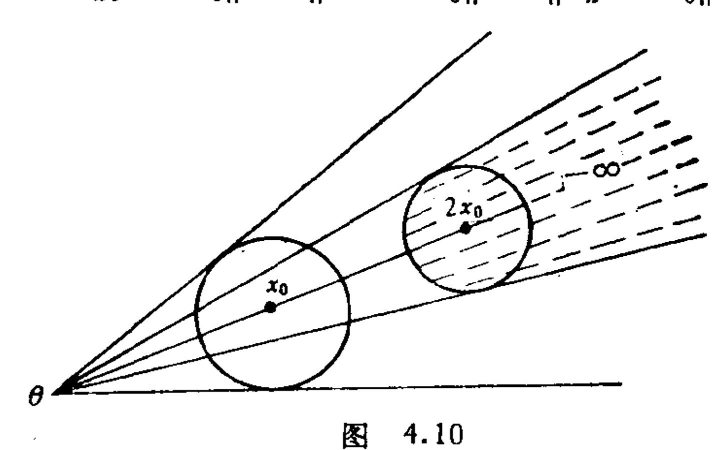


图 4.10

这样，当 $n > N$ 时，便导出

$$p(x) \leqslant k[p(x - x_n) + p(x_n)] \leqslant k(\beta_0 - n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

（对应地，$p(x) \leqslant k\,[p(x - x_n) + p(x_n)] = k\,[p(x - x_n) - \infty] = -\infty$）其中，数 β_0 为泛函 $p(x)$ 在球 $S(x_0, \delta_0)$ 内的值的某一上界. 此即泛函 $p(x)$ 在球 $S(2x_0, \delta_0)$ 内恒取 $-\infty$. 最后，由于集 $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda S(2x_0, \delta_0) \subset \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda S(x_0, \delta_0)$ 以及上面的定理1，不难导出泛函 $p(x)$ 在集 $\bigcup\limits_{\lambda\geqslant 1} \lambda S(2x_0, \delta_0)$ 内亦恒取 $-\infty$. 证毕.

类似定理 2 的证明方法，我们容易得到下面三个推理（证明留给读者自己完成）：

推理 1. 假设定义在半模 Σ 上的泛函 $p(x)$ 满足

(i) 在某一开球 $S(x_0, \delta_0) \subset \Sigma$ 内泛函 $p(x)$ 的值有上界（或不取 $+\infty$）；

(ii) 在球 $S(2x_0, \delta_0)$ 内 $p(x)$ 不恒为 $-\infty$.

那么，泛函 $p(x)$ 必在元 x_0 的某一球 $S(x_0, \delta_1)$ 内的值是有界的（相

应地，不取$\pm\infty$）.

推理 2. 在半模Σ上定义的泛函$p(x)$，如果在某一开球$S(x_0, \delta_0)$内的值有上界且不取$-\infty$，而且$\|x_0\| < 2\delta_0$，那么，泛函$p(x)$必在元x_0的某一球$S(x_0, \delta_1)$内的值是有界的.

推理 3. 如果在开的半模Σ中，泛函$p(x) > -\infty$的点稠于Σ，并且对于Σ内每一点，泛函的值均是"局部有上界"的，那么，泛函$p(x)$的值在Σ内的每一点也必是"局部有界"的.

利用定理 2 的证明方法，还可以得到下面的定理:

定理 3. 设E为自反空间，$p(x)$为E内某一凸的半模Σ上定义的拟次加凸泛函，其满足

(i) 在某一闭球$\bar{S}(x_0, \delta_0) \subset \Sigma$上，泛函$p(x)$的值有上界；

(ii) 对任一点$y \in \bar{S}(x_0, \delta_0)$，球$S(x_0 + y, \delta_0) \subset \Sigma$均含有$p(x) \neq -\infty$的点，

那么，泛函$p(x)$在闭球$\bar{S}(x_0, \delta_0)$上的值必是有界的．从而其在$S(x_0, \delta_0)$内均是连续的.

证． 由§3.2我们已知，当凸泛函在$\bar{S}(x_0, \delta_0)$内取有限值，并且其值是有上界的时候，其就是连续泛函．因此，我们只要证明本定理的前一部分结论就可以了．下面，我们用归谬法证明.

反之，如果泛函$p(x)$的值在球$\bar{S}(x_0, \delta_0)$上是无下界的，则必存在一元列$\{x_n\} \subset \bar{S}(x_0, \delta_0)$使得

$$p(x_n) < -n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

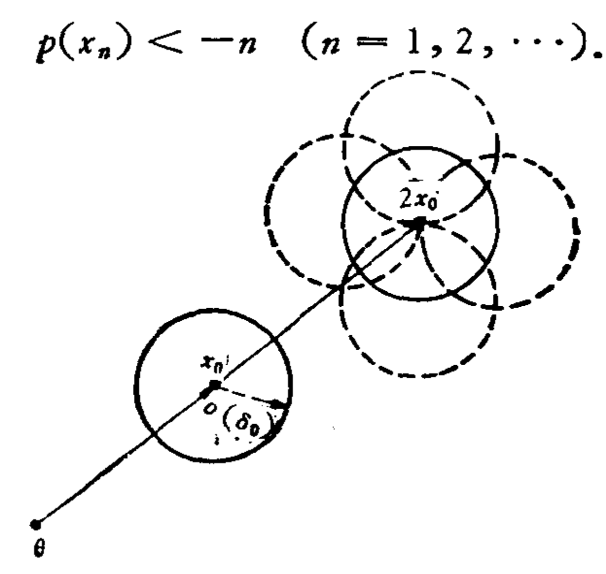


图 4.11

因此，当注意到 E 的自反性时，由 § 3.5 的结果知，必定存在一子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使得

$$x_{n_k} \xrightarrow[(\text{弱})]{} y_0 \in \bar{S}(x_0,\delta_0) \quad (k\to\infty).$$

不妨设元列 $\{x_n\}$ 自己就具有上面的性质，即 $x_n \xrightarrow[(\text{弱})]{} y_0 (n\to\infty)$. 于是利用上节的定理 5′ 则知，必有 $\{x_n\}$ 的一凸组合列 $\{y_n\}$，

$$y_n = \sum_{k=n}^{m_n} \lambda_k^{(n)} x_k \;(\text{其中}, \sum_{k=n}^{m_n}\lambda_k^{(n)} = 1,\; 0 \leqslant \lambda_k^{(n)} \leqslant 1;$$

$$k = n, n+1, \cdots m_n; n = 1, 2, \cdots),$$

使得

$$y_n \to y_0 \quad (n\to\infty),$$

于是由泛函 $p(x)$ 凸性的假设还可以得到

$$p(y_n) = p\Big(\sum_{k=n}^{m_n}\lambda_k^{(n)} x_k\Big) \leqslant \sum_{k=n}^{m_n}\lambda_k^{(n)} p(x_k) \leqslant -n \quad (n=1,2,\cdots).$$

最后，应用定理 2 的证明方法，我们不难导出泛函 $p(x)$ 在球 $S(x_0+y_0, \delta_0)$ 内是恒取 $-\infty$ 的，因而与定理的假设条件(ii)矛盾. 证毕.

引理. 如果 $\mathfrak{S}$ 为 E 中以 θ 为其一极限点的半模，$p(x)$ 为 $\mathfrak{S}$ 上定义的拟次加泛函，且设有一元列 $\{x_n\}\subset\mathfrak{S}$，使得 $x_n\to\theta(n\to\infty)$ 以及 $p(x_n) = -\infty\ (n = 1, 2, \cdots)$，那么，对 $\mathfrak{S}$ 内的任一开集 G，如果 $p(x)$ 在其内的值均不取 $+\infty(-\infty)$，则其必恒取 $-\infty(+\infty)$.

证. 反之，如果有一点 $x_0\in G\subset\mathfrak{S}$，使得 $p(x_0) \neq -\infty$（或相应地，$+\infty$），那么，由 x_0 是 G 的内点，故可设有某一球 $S(x_0, \delta_0)\subset G$，这样，由假设可知，泛函 $p(x)$ 在 $S(x_0, \delta_0)$ 亦均不取 $+\infty$（相应地，$-\infty$），故对于任意元 $x\in S(\theta,\delta_0)\cap\mathfrak{S}$，由于 $x_0\pm x\in S(x_0, \delta_0)$，因而由 $p(x)$ 的拟次加性，我们可以导出

$$p(x) = p[x_0 - (x_0 - x)] \geqslant \frac{p(x_0)}{k} - p(x_0 - x) > -\infty,$$

$$(\text{相应地},\; p(x) = p[(x_0 + x) - x_0] \geqslant \frac{p(x_0 + x)}{k} - p(x_0)$$

$> -\infty$); $\quad \forall x \in S(\theta, \delta_0) \cap \mathfrak{S}$.

从而，与定理的前面假设矛盾．证毕．

注． 在引理的证明中，我们还可以看出，拟次加泛函 $p(x)$ 取 $+\infty$(或 $-\infty$)的点集均是自密集．

定理 4． 设 Π_0 为 E 内过 θ 元的闭超平面，其将空间分为两个开集 E_1 和 E_2；泛函 $p(x)$ 在 E_1 的某个开半球 $S(\theta, \delta_0) \cap E_1$ 内均有 $p(x) < \infty$．那么，必有

(i) 在 E_1 内均有 $p(x) < \infty$；

(ii) 在 E_1 内如果元 x_1 使得 $p(x_1) \neq -\infty$，则在 E_2 内均有 $p(x) \neq -\infty$；

(iii) 在 E_1 内如果元列 $\{y_n\}$ 使得恒有 $p(y_n) = -\infty$ $(n = 1, 2, \cdots)$，那么，

1° 如果 $\inf\limits_n \|y_n\| = 0$，则在 E_1 内泛函 $p(x)$ 恒取 $-\infty$；

2° 如果 $\inf\{\|y\| \mid p(y) = -\infty,\ y \in E_1\} = d > 0$，则在 E_1 内存在一个与 Π_0 等距为 d 的"平行"闭超平面 Π_1，使得

(a) 在 E_1 内的闭超平面 Π_0 与 Π_1 之间，泛函 $p(x)$ 取有限值；

(b) 除了 Π_1，以及 Π_1 与 Π_0 之间的部分外，泛函 $p(x)$ 在 E_1 内的其余部分恒取 $-\infty$；

(c) 在 E_2 内，泛函 $p(x)$ 恒取 $+\infty$

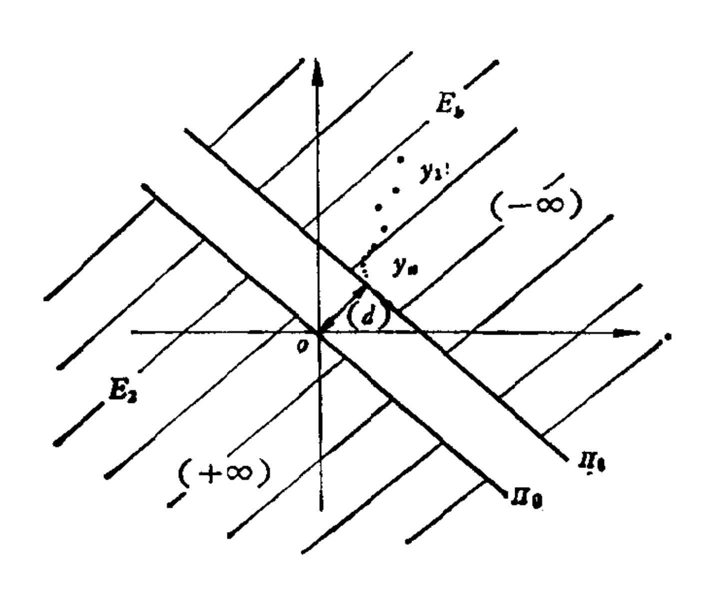


图 4.12

等结论成立.

证. 由泛函 $p(x)$ 的拟次加性，上面的结论(i)是明显的；而当注意到 § 4.1 的引理 2，并利用上面的结论(i)时，这里的结论(ii)也可由归谬法直接得出；至于结论(iii)中的 1° 可以由结论(i)及前面的引理中的结果导出：结论(iii)的(2°)中的(a) 是明显的，只要从 (i) 及 $d = d_1 = \inf\{d(y,\Pi_0) \mid p(y) = -\infty, y \in E_1\}$[1] 便知；(iii)($2^\circ$)中的(c)同样可以由 § 4.1 的引理 2 推出. 余下来的，我们只要验证一下结论(iii)中 (2°) 的(b)就可以了.

首先，由超平面的性质可知，存在一有界线性泛函 $f_0 \in E^*$，使得在 E_1 内，均有 $f_0(x) \geqslant 0$，并且

$$\Pi_0 = \{x \mid f_0(x) = 0, x \in E\}.$$

今做一个闭超平面

$$\Pi_1 = \{x \mid f_0(x) = d \cdot \|f_0\|,\ x \in E\},$$

由隔离性定理我们可知，$\forall x_1 \in \Pi_1$，$\exists f_1 \in E^*$，使得

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x = x_1; \\ 0, & x \in \Pi_0, \end{cases} \quad \|f_1\| = \frac{1}{d(x_1, \Pi_0)}.$$

但由超平面的性质可知(参看 §2.1 习题 9)，存在常数 $c_1 > 0$，使得 $f_1 = c_1 f_0$，因而推得

$$1 = f_1(x_1) = c_1 f_0(x_1) = c_1 d \|f_0\| = d\|f_1\| = \frac{d}{d(x_1, \Pi_0)},$$

也即 $d(x_1, \Pi_0) = d$. 于是可知 Π_1 上任意一点到 Π_0 的距离均为常数 d. 即 Π_0 与 Π_1 是相距 d 的“平行”闭超平面.

其次，对于在 E_1 内除了 Π_1 以及 Π_1 与 Π_0 之间部分以外之的任一点 y，同样由闭超平面的性质可知，必有 $f_0(y) > d\|f_0\|$. 从而，由可取 E_1 中元列$\{y_n\}$，使其有 $p(y_n) = -\infty$ $(n = 1, 2, \cdots)$且 $\inf\limits_n \|y_n\| = d > 0$ 的假设可知，对正数 $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0(y)}{\|f_0\|} - d\right)$必存在一正整数 n_0，使得 $\|y_{n_0}\| < d + \delta$. 由此可得 $f_0(y_{n_0}) < \|f_0\|\|y_{n_0}\| < (d + \delta)\|f_0\|$. 所以，当注意到 δ 的假设时，可导出

$$f_0(y - y_{n_0}) = f_0(y) - f_0(y_{n_0}) > f_0(y) - (d + \delta)\|f_0\|$$

1) 反之，如 $d < d_1$，则由 d_1 所设，知 $p(x)$ 在开半球 $S(\theta, d_1) \cap E_1$ 内均可有限值，与 d 所设矛盾.

$$= f_0(y) - \frac{1}{2}(f_0(y) + d\|f_0\|) = \frac{1}{2}(f_0(y) - d\|f_0\|)$$

$$= \delta \cdot \|f_0\| > 0.$$

因此元 $y - y_{n_0} \in E_1$，$p(y - y_{n_0}) < \infty$. 最后，由泛函 $p(x)$ 的拟次加性，立即可得

$$p(y) \leqslant k[p(y - y_{n_0}) + p(y_{n_0})] = -\infty.$$

此即 $p(y) = -\infty$. 便得出了结论(iii)(2°)中的(b). 证毕.

(二)

下面讨论由拟次加泛函不取 $+\infty$ 值的点集所产生的一类半模 $\Sigma = \{x | p(x) < \infty, x \in E\}$ 的结构问题. 首先，我们给出下面的一个结果：

定理 5. 设泛函 $p(x)$ 在 E 内有取 $+\infty$ 的点. 那么，或者 $p(x) = +\infty$ 的点稠于 E，或者在 E 内存在一元 x_0 和"低一维"的闭子空间 E_0，以及 E_0 上的某次加泛函 $p_0(y)$，使得

(i) 泛函 $p_0(y)$ 在 E_0 的任意球 $S(y, r)$ 内的值都是有界的.

(ii) 半模 $\Sigma = \{x | p(x) < \infty, x \in E\} \subset \{y + \rho x_0 | \rho \geqslant p_0(y), y \in E_0\}$.

证. 如泛函 $p(x) = +\infty$ 的点不稠于 E，则必有一球 $S(x_0, \delta_0) \subset E$ (不妨设 $x_0 \neq \theta$) 使在其内均有 $p(x) < \infty$，即有 $S(x_0, \delta_0) \subset \Sigma$.

现在，对元 x_0 应用 Hahn-Banach 的推论，知 $\exists f_0 \in E^*$，使得

$$\|f_0\| = 1, \ f_0(x_0) = \|x_0\|.$$

对 f_0 我们做一闭超平面，

$$E_0 = \{x | f_0(x) = 0, x \in E\},$$

由前面的讨论显然可知，E_0 是比 E "低一维"的闭子空间，并且 $\forall x \in E$，必有唯一的分解式

$$x = y_x + \rho_x x_0 \left(其中，y_x \in E_0, \rho_x = \frac{f_0(x)}{\|x_0\|}\right).$$

由此，再设集 $\Sigma_0 = \{y_x | x \in \Sigma\}$，根据上面分解式的唯一性显

然可知，Σ_0 亦为子空间 E_0 内的半模，并且由于 $S(x_0,\delta_0)\subset\Sigma$. 故对于任意元 $y\in E_0$，只要 $\|y\|<\delta_0$，则 $y+x_0\in\Sigma$，从而 $y\in\Sigma_0$，此即零元 θ 亦为 E_0 内半模 Σ_0 的内点，因此，$\Sigma_0=E_0$.

现在，在子空间 E_0 上定义泛函. 我们先令集 $\mathfrak{S}=\Sigma+\{\alpha x_0|\alpha>0\}$，然后定义泛函

$$p_0(y)=\inf\{\rho|y+\rho x_0\in\mathfrak{S},y\in E_0\}.$$

由于 $\forall y\in E_0$，由 $\Sigma_0=E_0$ 可知，必有元 $y_x\in\Sigma_0$，使 $y=y_x\in\Sigma_0$. 再则，根据 Σ_0 的定义，知元 $x=y_x+\rho_x x_0\in\Sigma$. 从而对任意数 $\alpha>0$，必有

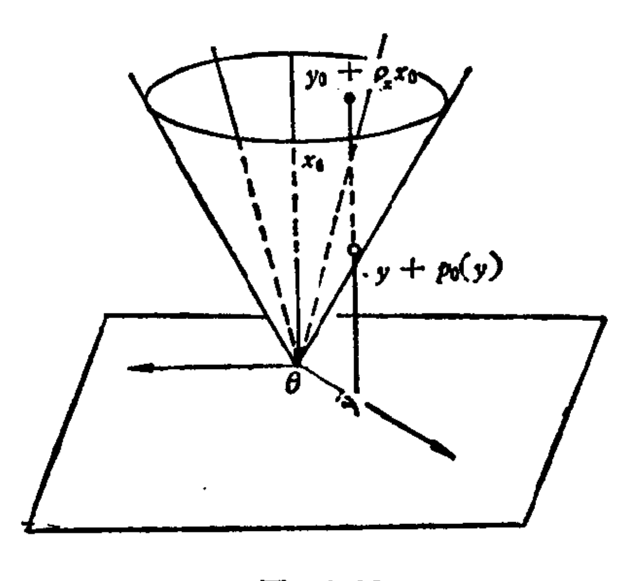


图 4.13

$$x+\alpha x_0=y_x+(\rho_x+\alpha)x_0\in\mathfrak{S},$$

这样，由泛函 p_0 的定义，可得到

$$p_0(y)=p_0(y_x)=\inf\{\rho|y_x+\rho x_0\in\mathfrak{S},y\in E_0\}\leqslant\rho_x<\infty.$$

由此也即导出，上述的 $p_0(y)$ 乃是在全空间 E_0 上有定义的不取∞的泛函. 并由$\mathfrak{S}$及 Σ 所设，还知其是次加的.

此外，注意到当 $\|y\|<\delta_0$ 时 $(y\in E_0)$，由于均存在着相应的正整数 n，使得 $\left\|y-\frac{x_0}{n}\right\|<\delta_0$，因而由

$$\left(y-\frac{x_0}{n}\right)+x_0\in S(x_0,\delta_0)\subset\Sigma.$$

便可推出

$$y + x_0 = \left[\left(y - \frac{x_0}{n}\right) + x_0\right] + \frac{x_0}{n} \in \mathfrak{S}.$$

因此，我们就得到

$$p_0(y) \leqslant 1, \quad \forall y \in S(\theta, \delta_0) \subset E_0.$$

而另一方面，当注意到泛函 $p(x)$ 在空间 E 内有取∞的点的假设时，由 Σ 定义及 § 4.1 引理 1（逆否命题形式），可导出 $-\alpha x_0 \notin \Sigma$，$\forall \alpha > 0$. 从而亦有 $-\alpha x_0 \notin \mathfrak{S}$. 这样，又可得到 $p_0(\theta) \geqslant 0$. 因此，当再次应用 § 4.1 引理 2 时，立即可推出，泛函 $p_0(y)$ 在空间 E_0 的任意球 $S(y, r)$ 内的值均是有界的，此即得出本定理的结论(i).

最后，如果设 $\rho^* = \inf\{\rho \mid y + \rho x_0 \in \Sigma,\ y \in E_0\}$，根据下确界性质可知，$\forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon_1: 0 \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon$，使得 $y + (\rho^* + \varepsilon_1)x_0 \in \Sigma$. 于是，便有

$$y + (\rho^* + \varepsilon_1 + \varepsilon)x_0 = [y + (\rho^* + \varepsilon_1)x_0] + \varepsilon x_0 \in \mathfrak{S}.$$

因此，可导出

$$p_0(y) = \inf\{\rho \mid y + \rho x_0 \in \mathfrak{S},\ y \in E_0\} \leqslant \rho^* + \varepsilon_1 + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性及以上的讨论可得到

$$\begin{aligned} p_0(y) &= \inf\{\rho \mid y + \rho x_0 \in \mathfrak{S},\ y \in E_0\} \leqslant \rho^* \\ &= \inf\{\rho \mid y + \rho x_0 \in \Sigma,\ y \in E_0\}. \end{aligned}$$

所以，也即推得，对于任意的元 $x \in \Sigma$，在其唯一的分解式 $x = y_x + \rho_x x_0$ 中，必有关系式

$$p_0(y_x) \leqslant \rho_x.$$

从而得到了本定理的结论(ii)：

$$x = y_x + \rho_x x_0 \in \{y + \rho x_0 \mid \rho \geqslant p_0(y),\ y \in E_0\}.$$

证毕.

为了得到下面的推论，由下极限的性质以及泛函的拟次加性不难得出下面的一个引理(证明留给读者完成).

引理. 如果 $p(x)$ 为空间 E 内以 θ 为极限点的半模 $\mathfrak{S}$ 上的一个 k-拟次加泛函，那么，如果设 $\varliminf\limits_{\substack{x \to \theta \\ x \in \mathfrak{S}}} p(x) = \lambda$ 为有限值时，则当 $k > \frac{1}{2}$ 时，必有 $\lambda \geqslant 0$；而当 $k < \frac{1}{2}$ 时，必有 $\lambda \leqslant 0$.

由定理 5 及这里的引理，可得到下面的定理：

定理 6. 当 $\Sigma = \{x \mid p(x) < \infty, x \in E\} \neq E$，且其开核 $\mathring{\Sigma}$ 包含 E 中某球 $U_{\delta_0}(x_0)$ 和"射线"集 $\{\alpha x_0 \mid \alpha > 0\}$ 时，集 Σ 的"边界"将由某一个"低一维"的闭子空间 E_0 及其上定义的一次加泛函 p_0 所确定的集 $C = \{y + p_0(y)x_0 \mid y \in E_0\}$ 给出，并且

(i) 泛函 $p_0(y)$ 在 E_0 的任意有界集上的值均是有界的；

(ii) 泛函 $p_0(y)$ 在 E_0 上是连续的，且有 $p_0(\theta) = 0$.

证. 上面定理的结论除了(ii)以外，均是定理 5 的直接结果，只要将这里的集 Σ 作为那里的集 $\mathfrak{S}$ 就行了. 下面来推导(ii).

$\forall \varepsilon > 0$，由设 $\varepsilon x_0 \in \mathring{\Sigma}$，故知，$\exists \delta > 0$，使当 $\|y\| < \delta (\forall y \in E_0)$ 时，就有 $y + \varepsilon x_0 \in \Sigma$. 故从 $p_0(y)$ 的定义则有 $p_0(y) \leqslant \varepsilon$. 也即

$$\overline{\lim_{y \to \theta}} p_0(y) = 0.$$

这样，由前§3.2 中注 9 则可导出所求结论. 证毕.

为了将讨论深入一步，下面先介绍三个引理.

引理 1. 设 Σ 为线性空间 E 内的半模. 那么，其凸包 $\mathrm{cov}\Sigma$. 亦为 E 内的半模.

证. 我们用归纳法证明在 Σ 中任意两个"由不多于 n 个元所组成的凸组合"，它们的和仍是属于 $\mathrm{cov}\Sigma$ 的. 此结论当 $n = 1$ 时，由 Σ 是半模，显然是成立的；如果当 $n = k - 1$ 时，上面的结论也对，那么，当 $n = k$ 时，如果设 $\bar{x}, \bar{y}$ 是两个"由 Σ 中不多于 k 个元所组成的凸组合"（这里，当这两个凸组合的元的个数均小于 k 时，结论可由前面归纳的假设而得到）：

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i$$

（其中，不妨设 $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$，$0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，$x_i, y_i \in \Sigma, i = 1, 2, \cdots, k$），则有：当 $\lambda_k = 1$ 时，

$$\bar{x} + \bar{y} = \mu_k(x_k + y_k) + (1 - \mu_k)\left(x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mu_i}{1 - \mu_k} y_i\right);$$

当 $\lambda_k \neq 1$ 时，

$$\bar{x}+\bar{y}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+\sum_{i=1}^{k}\mu_i y_i=\lambda_k x_k-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i x_i+\mu_k y_k$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i y_i=\lambda_k x_k+(1-\lambda_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i$$
$$+\mu_k y_k+(1-\mu_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\mu_i}{1-\mu_k}y_i$$

$$=\begin{cases}\lambda_k(x_k+y_k)+(1-\mu_k)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i\right.\\ \left.+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\mu_i}{1-\mu_k}y_i\right)+(\mu_k-\lambda_k)\left(y_k+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i\right),\\ \text{当 } \lambda_k\leqslant\mu_k \text{ 时},\\ \mu_k(x_k+y_k)+(1-\lambda_k)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i\right.\\ \left.+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\mu_i}{1-\mu_k}y_i\right)+(\lambda_k-\mu_k)\left(x_k+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\mu_i}{1-\mu_k}y_i\right),\\ \text{当 } \mu_k<\lambda_k \text{ 时}.\end{cases}$$

但是，根据归纳法的假设可知，在上面两种情况的关系式中，其每一个括号内的元均是属于集 $\mathrm{cov}\Sigma$ 的. 再注意到关于凸包的性质 $\mathrm{cov}\ (\mathrm{cov}\Sigma)=\mathrm{cov}\Sigma$，立即便可导得 $\bar{x}+\bar{y}\in\mathrm{cov}\Sigma$. 此即证明了我们前面的论断.

其次，注意到 Σ 的凸包 $\mathrm{cov}\Sigma$ 乃是由 Σ 的有限个元的凸组合所成的集合，因而，上面得到的结论也说明了 $\mathrm{cov}\Sigma$ 中的任意两个元之和仍是属于 $\mathrm{cov}\Sigma$ 的，也即 $\mathrm{cov}\Sigma$ 亦为半模. 证毕.

引理 2°. 如果 $\mathfrak{S}$ 为 E 内的一"角形半模"，那么，$\dot{\bar{\mathfrak{S}}}=\mathfrak{S}$，从而有 $\mathfrak{S}+\bar{\mathfrak{S}}\subset\mathfrak{S}$.

证. 先证明 $\bar{\mathfrak{S}}$ 的"内核"就是 $\mathfrak{S}$ 自己. 为此，只要证明，$\forall x_0 \bar{\in}\mathfrak{S}$，$\exists S(x_0, \delta_0)$(球)，使其内含一球 $S(x_1, \delta_1)$，有 $S(x_1, \delta_1)\cap\mathfrak{S}=\varnothing$(故 x_0 不能为 $\bar{\mathfrak{S}}$ 的内点)就可以了. 下面证明这一事实.

首先，由于 $\mathfrak{S}$ 为角形半模，因此，由定义（以 θ 为极限点的开集）可知，对于开集 $S(\theta,\delta_0)\cap\mathfrak{S}$ 而言，必有一球

$$S(y,\delta_0')\subset S(\theta,\delta_0)\cap\mathfrak{S}.$$

从而可导出 $S(x_0-y,\delta_0')\subset S(x_0,\delta_0)$（事实上，$\forall x\in S(x_0-y,\delta_0')$，由于，$\|(-x+x_0)-y\|=\|x-(x_0-y)\|<\delta_0'$，且 $(-x+x_0)\in S(y,\delta_0')\subset S(\theta,\delta_0)$. 因此有 $\|x-x_0\|=\|-x+x_0\|<\delta_0$. 也即有 $x\in S(x_0,\delta_0)$. ）.

其次，我们有 $S(x_0-y,\delta_0')\cap\mathfrak{S}=\varnothing$. 事实上，如若不然，存在一元 $u\in S(x_0-y,\delta_0')\cap\mathfrak{S}$. 那么，由于

$$\|(x_0-u)-y\|=\|(x_0-y)-u\|<\delta_0',$$

故知 $x_0-u\in S(y,\delta_0')\subset\mathfrak{S}$，从而由 $\mathfrak{S}$ 的半模性质可以导出 $x_0=(x_0-u)+u\in\mathfrak{S}$.
与 x_0 的原设矛盾. 因而证得本命题的前半段结论.

最后，由于半模的闭包必仍为半模，因而可得 $\mathfrak{S}+\bar{\mathfrak{S}}\subset\bar{\mathfrak{S}}$. 但由于 $\mathfrak{S}$ 是开集，因而可知集 $\mathfrak{S}+\bar{\mathfrak{S}}$ 的每一点都是 $\bar{\mathfrak{S}}$ 的内点. 从而由上面前半段结论我们立即可得 $\mathfrak{S}+\bar{\mathfrak{S}}\subset\dot{\bar{\mathfrak{S}}}=\mathfrak{S}$. 证毕.

下面的引理是引理 2° 的一个直接推广：

引理 2. 设 $\mathfrak{S}$ 为 E 内的角形半模，那么，有

$$\mathrm{cov}\mathfrak{S}+\overline{\mathrm{cov}\mathfrak{S}}\subset\mathrm{cov}\mathfrak{S}.$$

证. 首先，由引理 1 可知，此时集 $\mathrm{cov}\mathfrak{S}$ 亦为半模；此外，由凸包的性质和 $\mathfrak{S}$ 开集的假设，不难验证 $\mathrm{cov}\mathfrak{S}$ 仍是开集；同样地，由 $\mathfrak{S}$ 以 θ 为极限点，当然可知 $\mathrm{cov}\mathfrak{S}$ 亦应如此. 因此，$\mathrm{cov}\mathfrak{S}$ 也是 E 内的角形半模. 这样，由角形半模的特性，（引理 2°）我们立即就可得到本命题的结论. 证毕.

引理 3. 设 E 为自反空间，Σ 为 E 内以 θ 为极限点的半模. 那么，在 E 内必存在一元 y_0 使得开"射线" $\{\rho y_0|\rho>0\}\subset\overline{\mathrm{cov}\Sigma}$.

证. 我们不必谈 $\Sigma=E$ 的平凡情况. 今设非零元列 $\{x_n\}\subset\Sigma$，使得有 $x_n\to\theta(n\to\infty)$. 由于 $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}\subset\bar{S}(\theta,1)$，故由自反空间的

性质可知，此闭单位球上的元列必存在一子列“弱收敛”于 $y_0\in \bar{S}(\theta,1)$，不妨设此子列就是 $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ 自己，即有

$$\frac{x_n}{\|x_n\|}\xrightarrow[(\text{弱})]{} y_0 \quad (n\to\infty).$$

从而由 Ascoli-Mazur 定理的推论（§ 3.3 推论 1）便可推得，对任意正整数 k，y_0 均属于元列 $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\bigg|_{n\geqslant k}\right\}$ 所张成的闭凸包．也即

$$y_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\operatorname{cov}\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\bigg|_{n\geqslant k}\right\}}.$$

因而，我们就可得到一元列 $\{y_k\}$，

$$y_k=\sum_{i=k}^{n_k}\lambda_i^{(k)}\frac{x_i}{\|x_i\|}\ (\text{其中},\sum_{i=k}^{n_k}\lambda_i^{(k)}=1,\ 0\leqslant\lambda_i^{(k)}\leqslant 1,$$

$$i=k,k+1,\cdots,n_k,\ k=1,2,\cdots)$$

使得 $y_k\to y_0\ (k\to\infty)$．

下面证明此元 y_0 即为本定理所求之元．事实上，$\forall\rho>0$，令 $m_i=\left[\frac{\rho}{\|x_i\|}\right]+1$（其中 $[\alpha]$ 表示小于 α 的最大整数）．并注意到 $\|x_i\|\to 0\ (i\to\infty)$ 的假设，由极限论的知识可导出关系式 $\lim\limits_{i\to\infty}m_i\|x_i\|=\rho$．因此，$\forall\varepsilon>0$，$\exists i_0$（自然数），使得当 $i>i_0$ 时，就有

$$|m_i\|x_i\|-\rho|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，又由 $\rho y_k\to\rho y_0\ (k\to\infty)$，故知，$\exists k_0$（自然数），使当 $k>k_0$ 时，就有

$$\|\rho y_k-\rho y_0\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今设元列 $\bar{y}_k=\sum\limits_{i=k}^{n_k}\lambda_i^{(k)}m_i x_i\ (k=1,2,\cdots)$，对上述的正数 ε，当取正整数 $k>\max(i_0,k_0)$ 时，可导出

$$\begin{aligned}\|\bar{y}_k-\rho y_0\| &\leqslant \|\bar{y}_k-\rho y_k\|+\|\rho y_k-\rho y_0\| \\ &\leqslant \left\|\sum_{i=k}^{kn}\left(\lambda_i^{(k)} m_i x_i-\rho \lambda_i^{(k)} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|+\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \sum_{i=k}^{nk}\left\|\lambda_i^{(k)}(m_i\|x_i\|-\rho) \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|+\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \sum_{i=k}^{nk} \lambda_i^{(k)} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

此即 $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{y}_k=\rho y_0$.

最后,由 Σ 是半模的假设,可知 $m_i x_i \in \Sigma$ $(i=k, k+1, \cdots, n_k;\ k=1,2,\cdots)$,而元列 $\{\bar{y}_k\} \subset \operatorname{cov}\Sigma$. 也即导出了 $\rho y_0 \in \overline{\operatorname{cov}\Sigma}$ 对任意正数 ρ 均成立. 证毕.

有了上面的三个引理,我们就可以得到在自反空间上的某一类拟次加泛函,它们不等于$+\infty$的点集所组成的半模的特征. 其可由下面定理给出.

定理 7. 设 E 为自反空间,泛函 $p(x)$ 在 E 内有取$+\infty$的点,且集 $\mathfrak{S}=\{x \mid p(x)<\infty.\ x \in E\}$ 为以 θ 元为极限点的开凸集(凸的角形半模). 那么,在 E 内存在着一个"低一维"的闭子空间 E_0 和其上的某次加泛函 p_0 及一元 $x_0 \notin E_0$,使得

(i) 集 $\mathfrak{S}$ 的"边界"由集 $C=\{y+p_0(y) x_0 \mid y \in E_0\}$ 来确定;

(ii) 泛函 $p_0(y)$ 在 E_0 内任意有界集上的值均是有界的;

(iii) 泛函 $p_0(y)$ 在 E_0 上是连续的,且有 $p_0(\theta)=0$.

证. 由引理 3 可知,在 E 内存在一元 y_0,使得开"射线"

$$\{\rho y_0 \mid \rho>0\} \subset \overline{\operatorname{cov}\mathfrak{S}}=\bar{\mathfrak{S}}.$$

今取集 $\mathfrak{S}$ 中一元 z_0,并令元 $x_0=y_0+z_0$. 下面证明此元 x 即为本定理所求之元. 事实上,对任给的正数 ρ,有

$$\rho x_0=\rho(y_0+z_0)=\begin{cases}\rho z_0+(1-\rho) \dfrac{\rho}{1-\rho} y_0, & \text{当 } \rho<1 \text{ 时;} \\ \{(\rho) z_0+[1-(\rho)] y_0\}+\{[\rho] z_0 \\ \quad+[\rho-(1-(\rho))] y_0\}, & \text{当 } \rho \geqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

(这里，(ρ)，$[\rho]$分别表示数 ρ 的"小数部分"与"整数部分")．而由 $\mathfrak{S}$ 是一个凸的角形半模和关于凸集的内点与边界点"联结线段"上的点的性质(参看 § 3.2)以及引理 2 的结果，我们立即可知上面的元 $\rho x_0 = \rho(z_0 + y_0) \in \mathfrak{S}$．也即推出了"射线"集 $\{\rho x_0 | \rho > 0\} \subset \mathfrak{S}$．注意到 $\mathfrak{S}$ 是开集的假设，立即可以看出，定理 6 的结论是成立的，也即得到了本定理的结论(i)，(ii)，(iii)；证毕．

习　　题

1．试证明本节定理 1 前面的引理．

2．试证明本节定理 2 后面的三个推理．

3．设 $\mathfrak{S}$ 为 E 内一以 θ 为极限点的半模，$p(x)$为 $\mathfrak{S}$上定义的拟次加泛函．试证明：如果 $\varlimsup\limits_{\substack{x\to\theta \\ x\in\mathfrak{S}}} p(x) = -\infty$，那么，当在 $\mathfrak{S}$ 中存在一开集 G，使得泛函 $p(x)$ 在 G 内的值有上界时，在 G 内恒有 $p(x) = -\infty$．

4．在上题的假设下，当在 $\mathfrak{S}$ 中存在一开集，使得泛函 $p(x)$ 在 $G\cap\mathfrak{S}$ 内的值有下界时，在 $G\cap\mathfrak{S}$ 内恒有 $p(x) = +\infty$．

5．试证明本节注．

6．举例说明：在一以 θ 为极限点的半模 $\mathfrak{S}$上定义的拟次加泛函 $p(x)$，

(i) 其取 $+\infty$和$-\infty$的点是可以彼此稠密的．

(ii) 其取 $+\infty$，$-\infty$与取有限值的点是可以彼此稠密的．

7．试证明本节定理 6 前面的引理．

8．设 P 为赋范线性空间 E 内的一个"线性半群"[即 P 有关系式 $P + p\subset P$；$\lambda p\subset P$，$(\lambda\geqslant 0)$]，并设 $\mathring{P}\neq\phi$ (此时 P 称为"实心的")．试证明：

(i) 当 $u\in\mathring{P}$ 时，必有 $\lambda u\in\mathring{P}$ $(\forall\lambda>0)$．

(ii) 对任意元 $x\in E$，必有"分解式" $x = u - v$，其中，$u\in\mathring{P}$，$v\in\mathring{P}$．

9．试证明在赋范线性空间 E 的单位闭球 $\bar{S}(\theta, 1)$．上定义的"数值有界"的泛函的全体 B_1^*，当定义加法，数乘如常，而范数定义为

$$\|g\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |g(x)|, \quad \forall g = g(x)\in B_1^*.$$

时，其构成一个 Banach 空间，而 B_1^* 内的一切(数值有界)"次加""非负"泛函的全体 G_1^* 构成 B_1^* 内的线性半群．

10．在上题假设下，试证明：对于任意的泛函 $g\in B_1^*$，必有分解式

$$g = p_1 - p_2,$$

其中，$p_1 \in G_1^*$，$p_2 \in G_1^*$。

第五章　开映象定理与闭图象定理

作为线性分析三大基本原理之一的开映象定理，在泛函分析中同样起着十分重要的作用，在本章我们将讨论它．同时，我们也将讨论在理论与实际中应用十分广泛的闭线性算子的一些性质，并利用开映象定理的推理来讨论赋范线性空间中的可数基问题．

§5.1. 闭线性算子

在大量理论与实际问题中见到的线性算子并不都是连续（有界)的，其中最常见的一类，就是所谓"闭线性算子"(例如，微分算子"$\frac{d}{dt}$")．下面我们就要讨论它．

(一)

定义 1.　设 E, E_1 均为赋（准）范线性空间，$E \times E_1$ 为它们的积空间(由 § 1.4 知其亦为赋（准）范线性空间)．如果 T 为从 E 内到 E_1 内的算子，其定义域为 $\mathscr{D}(\mathrm{T}) \subset E$，值域为 $\mathscr{W}(\mathrm{T}) \subset E_1$，那么，我们称积空间 $E \times E_1$ 内的集

$$G(\mathrm{T}) = \{(x, y) \mid x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}), y = \mathrm{T}x \in \mathscr{W}(\mathrm{T})\}$$
$$= \{(x, \mathrm{T}(x)) \mid x \in \mathscr{D}(\mathrm{T})\}.$$

为算子 T 的**图象**．而一个线性算子 T 称为是**闭**的，是指其图象 $G(\mathrm{T})$ 是 $E \times E_1$ 内的闭集．

注 1.　为了从 E 内到 E_1 内的线性算子 T 是闭的，必须且只须其满足条件，$\forall \{x_n\} \subset \mathscr{D}(\mathrm{T})$，只要 $x_n \to x(\in E)$，$\mathrm{T}(x_n) \to y(\in E_1)$ $(n \to \infty)$，则必有 $x \in \mathscr{D}(\mathrm{T})$，$\mathrm{T}(x) = y$（也有的书以此

来作为闭线性算子的定义).

注 2. 如果上述线性算子T存在"逆算子" T^{-1} (即有T使 $\mathscr{D}(T)$ 与 $\mathscr{W}(T)$ 一一对应),那么,T闭与 T^{-1} 闭是等价的.

注 3. 设 G 为积空间 $E \times E_1$ 内一线性子空间那么,为了 G 是一个(由 E 内到 E_1 内)线性算子T的图象,必须且只须其满足条件当 $(\theta, y) \in G$ 时,便有 $y = \theta$.

定义 2. 设 T_1, T_2 均为由空间 E 内到空间 E_1 内的线性算子,其定义域分别为 $\mathscr{D}(T_1)$, $\mathscr{D}(T_2)$ 如果 $\mathscr{D}(T_1) \subset \mathscr{D}(T_2)$. 且有

$$T_2(x) = T_1(x), \ \forall x \in \mathscr{D}(T_1),$$

则我们算 T_2 为 T_1 的扩张(线性)算子(有时记为 $T_1 \subset T_2$).

由定义 2 以及注 1 、注 3 ,我们可以得到下面有关闭的扩张算子存在的一个定理:

定理 1. 设T为从赋(准)范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子. 那么,为了T存在闭的扩张算子,必须且只须其满足条件 $\forall \{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$, 只要

$$x_n \to \theta, \ T(x_n) \to y \ (n \to \infty),$$

则必有 $y = \theta$.

证. 1)"$\Longrightarrow$" 当T存在闭线性扩张算子 $\hat{T}$ 时,由注1,我们从 $\hat{T}$ 的闭线性可导出,当 $x_n \to \theta$, $T(x_n) \to y$ $(n \to \infty)$ 时,必有 $\hat{T}(\theta) = y$; 由于 $\hat{T}$ 是线性的,故得到 $y = \theta$.

2)"$\Longleftarrow$" 由于 $G(T)$ 是 $E \times E_1$ 内的线性子空间,故 $\overline{G(T)}$ 亦是. 此外,从定理假设可知,当 $(\theta, y) \in \overline{G(T)}$ 时,必有 $y = \theta$. 因而由注 3 可知,$\overline{G(T)}$ 必为一个(由 E 内到 E_1 内)的线性算子 $\hat{T}$ 的图象. 由定义 1 还知 $\hat{T}$ 为闭线性算子,并从 $G(T) \subset \overline{G(T)}$ 不难看出 $\hat{T}$ 是T的扩张算子. 证毕.

下面,我们给出关于闭线性算子的几个基本的定理:

定理 2. 设T为从赋(准)范线性空间 E 内到 E_1 内的连续线性算子. 那么,只要 $\mathscr{D}(T)$ 是 E 内的闭集,则T必为闭算子;反之,当 E_1 是完备空间,T为(强)有界线性算子时,其逆命题亦真.

证. 我们先来证明定理的前半段命题. 事实上，当设元列 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$满足条件

$$x_n\to x_0,\ T(x_n)\to y_0\ (n\to\infty)$$

时，由$\mathscr{D}(T)$是E内闭集的假设可知，$x_0\in\mathscr{D}(T)$. 从而注意到T的连续性，我们就可导得

$$T(x_n)\to T(x_0)\quad(n\to\infty).$$

而由极限的唯一性，我们就可得到$T(x_0)=y_0$，即T是一个闭算子.

下面证明定理的后半段命题. 首先，由于T在$\mathscr{D}(T)$内是一有界线性算子，因此，当设其一上界为β时，$\forall\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，如果有

$$x_n\to x_0\quad(n\to\infty),$$

则有

$$\begin{aligned}\|T(x_n)-T(x_m)\|&=\|T(x_n-x_m)\|\\&\leqslant\beta\|x_n-x_m\|\to 0\quad(n,\beta\to\infty).\end{aligned}$$

即$\{T(x_n)\}$为空间E_1内的一 Cauchy 列，因而由空间E_1的完备性假设可知，$\exists y_0\in E_1$，使得

$$T(x_n)\to y_0\quad(n\to\infty).$$

最后，注意到T为闭算子的假设，由上面$\{x_n\}$，$\{T(x_n)\}$的关系式可导出$T(x_0)=y_0$，即$x_0\in\mathscr{D}(T)$. 从而证得$\mathscr{D}(T)$为E中的闭集. 证毕.

注 4. 由于上面的算子T可以视为线性空间$\mathscr{D}(T)$上定义的线性算子，因此，由§2.1可知，当空间E(从而空间$\mathscr{D}(T)$)是赋范线性空间时，T的强有界性可用其连续性来代替；然而，当空间是赋"准范"线性空间时，这样的代替却是不行的(那时，从线性算子的强有界性可以推出其连续性，但反过来却未必成立).

由上面的定理 2，我们不难得到下面的推理：

推理. 如果T为"完备"的赋(准)范线性空间E内到另一赋(准)范线性空间E_1内的连续线性算子，且其逆算子T^{-1}也(存在且)是强有界算子，那么，只要$\mathscr{D}(T)$是闭集，则$\mathscr{W}(T)$也是闭集.

证. 首先，由定理 2 的前半段命题我们可知，此时，由本命题的假设条件可以导得 T 必为闭的线性算子. 其次，注意到本节注 2，我们可导出 T 的逆算子 T^{-1} 也是闭算子. 最后，对有界闭算子 T^{-1} 再次利用上面定理 2 的后半段命题，可导出$\mathscr{D}(T^{-1})=\mathscr{W}(T)$也是 E_1 内的闭集. 证毕.

注 5. 根据定理 2 与推理可知，特别地，如果 T 是定义在全空间 E 上的连续线性算子，那么，它必是闭算子; 而当 E 是完备空间时，如果 T^{-1}(存在且)是强有界算子，则$\mathscr{W}(T)$必为闭集.

注 6. 由上面定理可知，当所涉及的 E, E_1 均是完备空间时，便有(i)如果 T 是强有界线性算子，则 T 是闭算子与$\mathscr{D}(T)$是闭集是等价的; (ii)如果 T 与 T^{-1} 均为有界线性算子，则$\mathscr{D}(T)$是闭集与$\mathscr{W}(T)$是闭集是等价的.

注 7. 在定理 2 及其推理中，当条件不满足时，结论未必成立. 例如，对定理 2 而言，当$\mathscr{D}(T)$在 E 内不闭的时候，其上定义的有界线性算子则未必是闭算子;反例可举以 $C[a, b]$ 中"多项式"全体之 $C_0[a, b]$ (参看 § 1.5)作定义域的么算子 C_0，易知，其在 $C_0[a, b]$ 上显然是有界线性算子，但其不满足闭算子的定义. 如对上推理而言，当$\mathscr{D}(T)$不是闭集时，其结论也未必是成立的; 反例可取$\mathscr{D}(T)$上定义的么算子即可.

注 8. 一般说来，闭线性算子未必是连续的，反例如下.

反例. 在 $C[0, 1]$ 内定义的微分算子

$$T(x)=\frac{d}{dt}[x(t)],$$

$$\forall x=x(t)\in\mathscr{D}(T)=\left\{x\,\middle|\,\frac{dx(t)}{dt}\in C[0, 1]\right\},$$

为闭而不连续的线性算子.

验. $T(x)$在$\mathscr{D}(T)$上为线性算子是明显的. 至于 $T(x)$的不连续性可由其在$\mathscr{D}(T)$上的无界性得出. (事实上，当取元列 $\{x_n\}=\{t^n\}$时，由于$\|x_n\|=1$ $(n=1, 2, \cdots)$，因此，

$$\|T(x_n)\|=\|(t^n)'\|=\|nt^{n-1}\|=n\to\infty\quad(n\to\infty).$$

下面验证T的闭性．当设元列$\{x_n\}\subset \mathscr{D}(T)$满足条件

$$x_n \to x_0,\ T(x_n) \to y_0 \quad (n \to \infty)$$

时，由于空间$C[0,1]$中的收敛就是函数在$[0,1]$上的“一致收敛”，故根据上述得到

$$x_n(t) \underset{(一致)}{\Longrightarrow} x_0(t)\ (连续的),\ x_n'(t) \underset{(一致)}{\Longrightarrow} y_0(t)$$

$$(n \to \infty),\ \forall t \in [0,1].$$

从而由数学分析的知识我们可知，$x_0(t)$亦是具有连续导函数的，并且有

$$x_0'(t) = y_0(t), \quad \forall t \in [0,1];$$

此即导出了$x_0 \in \mathscr{D}(T)$，$T(x_0) = y_0$．因而T是一个闭线性算子．验毕．

（二）

下面，我们讨论线性算子T的共轭算子T^*，我们首先给出下面的定理：

定理 3. 设T为从赋范线性空间E内到E_1内的线性算子，并有$\overline{\mathscr{D}(T)} = E$．那么，$T^*$必为定义在某个$\mathscr{D}(T^*)\subset E_1^*$而取值在$E^*$内的闭线性算子．

证．首先，由§2.4我们已知T^*是在$\mathscr{D}(T^*)$上一意确定的线性算子．下面，来证明它的闭性．事实上，当设一泛函列$\{g_n\}\subset \mathscr{D}(T^*)\subset E_1^*$满足条件

$$g_n \to g_0,\ T^*(g_n) = f_n \to f_0 \quad (n \to \infty).$$

（这里，$g_0 \in E_1^*, f_0 \in E^*$）时，根据$T^*$的定义，我们有

$$g_n[T(x)] = [T^*(g_n)](x) = f_n(x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(T).$$

从而由上面泛函的假设，可导出

$$g_0[T(x)] = f_0(x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(T);$$

即$g_0 \in \mathscr{D}(T^*)$及$T^*(g_0) = f_0$．因此T^*是闭线性算子．证毕．

定理 4. 如果T为从赋范线性空间E到E_1内的有界线性算子，那么，T^{**}（是E^{**}到E_1^{**}内的算子）必为T的“保范扩张”的

线性算子，并且，如果 E 还是自反空间时，则有 $T^{**} = T$.

证. 由前面的论述(参看 § 2.4 的定理 1 及 § 3.5 中定理 1 的推理)可知，T^{**} 必为 E^{**} 到 E_1^{**} 内的有界线性算子，并有 $\|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|$, 因而当 $E \subset E^{**}$ 时，我们可以导得 $\forall x \in E$, 有 $x = \tilde{x} \in E^{**}$ ($\tilde{x}$ 为 E 在"自然映象"下与 E^{**} 等同的元)，及

$$[T^{**}(\tilde{x})](g) = \tilde{x}[T^*(g)] = [T^*(g)](x) \\ = g[T(x)], \quad \forall g \in E_1^*,$$

也即有

$$T^{**}(x) = T^{**}(\tilde{x}) = T(x), \ \forall x \in E.$$

从而即知 T^{**} 为 T 的"保范扩张"算子.

至于 E 是自反的时候，由于 $E = E^{**}$, 因此显然有 $T^{**} = T$. 证毕.

我们必须注意的是，由共轭算子的定义可以看出：当 T 不是全空间 E 上定义的有界线性算子时，由 T^* 的存在一般并不能保证 T^{**} 的存在性. 因为一般说来，那时并不能保证 $\mathscr{D}(T^*)$ 仍然在 E_1^* 内是稠密的. 不过，我们却有下面的一个结果：

定理 5. 设 T 为从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子，$\overline{\mathscr{D}(T)} = E$; 并且，$E_1$ 为一自反空间. 那么，只要 T 是闭算子，则亦有 $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = E_1^*$.

证. 用归谬法证明. 如果有 $\overline{\mathscr{D}(T^*)} \subsetneqq E_1^*$, 那么，由 § 3.3 定理 1 的结果及 E_1 的自反性，我们可知，$\exists y_0 \in E_1 = E_1^{**}$, 使得 $y_0 \neq \theta$, 且有

$$g(y_0) = \tilde{y}_0(g) = 0, \ \forall g \in \mathscr{D}(T^*). \tag{1}$$

另一方面，注意到在赋范线性(积)空间 $E \times E_1$ 中，由于 T 为闭算子的假设，可知其图象 $G(T)$ 是 $E \times E_1$ 中的一个闭线性子空间，且由上面元 $y_0 \neq \theta$, 还知其内的"点" $(\theta, y_0) \notin G(T)$. 因而，同样在积空间 $E \times E_1$ 上对闭线性子空间 $G(T)$ 与点 (θ, y_0) 使用 §3.3 的定理 1，可知存在积空间上一有界线性泛函 $(f_0, g_0) \in (E \times E_1)^* = E^* \times E_1^*$ (参看 §2.3 习题 4)，使其有

$$(f_0, g_0)[(\theta, y_0)] = f_0(\theta) + g_0(y_0) \neq 0,$$

及

$$(f_0, g_0)[(x, T(x)] = f_0(x) + g_0[T(x)] = 0, \ \forall x \in \mathscr{D}(T).$$

这样一来，由上面第一式可得

$$g_0(y_0) \neq 0; \tag{2}$$

从第二式又可得到

$$g_0[T(x)] = -f_0(x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(T),$$

即

$$g_0 \in \mathscr{D}(T^*). \tag{3}$$

然而式(2),(3)显然与三式(1)是矛盾的. 证毕.

注 9. 在定理 5 的假设条件中，当 E_1 不是自反空间时，我们可以得到，只要 T 是闭算子，则 $\mathscr{D}(T^*)$ 在 E_1^* 内是"$_*$弱"稠的(参看文献[68]).

注 10. 当定理 5 中 E_1 不是自反空间时，那里的结论未必成立. 下面我们举一反例说明之（由此例我们也可看到求共轭算子 T^* 的方法):

反例 设 $E = E_1 = L^1[0, 1]$, 算子 $T = \dfrac{d}{dt}$,

$\mathscr{D}(T) = \{x(t) | x(0)=x(1)=0, x(t)$在$[0,1]$上绝对连续$\}$. 那么 $\overline{\mathscr{D}(T)} = E$, T 为闭线性算子，然而，$\overline{\mathscr{D}(T^*)} \subsetneqq E_1^*$.

验. 首先，由 §1.3，我们已知多项式是(按 L^1 中的范数)稠于 $L^1[0, 1]$ 的;因此，我们不难验证，在区间$[0, 1]$的两端点上取值为零的绝对连续函数的全体（按 L^1 中的范数）在 $L^1[0, 1]$空间内也是稠的，从而我们可知 $\overline{\mathscr{D}(T)} = L^1[0, 1]$.

其次，我们验证 T 为闭算子（T 为线性算子是明显的). 事实上，当设元列$\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$，及 $x_0, y_0 \in L^1[0, 1]$满足条件

$$x_n \to x_0, \ T(x_n) \to y_0 \quad (n \to \infty)$$

时，由$\{x_n\}$的性质可知

$$x_n(s) = \int_0^s x_n'(t)dt, \quad \forall s \in [0, 1] \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

但由于假设条件，我们有

$$\left|\int_0^s x_n'(t)dt - \int_0^s y_0(t)dt\right| \leqslant \int_0^s |x_n'(t) - y_0(t)|dt$$

$$\leqslant \int_0^1 |x_n'(t) - y_0(t)|dt = \|T(x_n) - y_0\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因而当令函数 $z_0(s) = \int_0^s y_0(t)dt$ 时，由以上两关系式，可导出

$$x_n(s) \underset{(一致)}{\Longrightarrow} z_0(s) \quad (n \to \infty); \quad \forall s \in [0, 1].$$

因此特别地有 $z_0(0) = z_0(1) = 0$，及

$$\|x_n - z_0\| = \int_0^1 |x_n(s) - z_0(s)|ds \to 0 \ (n \to \infty).$$

故由极限的唯一性，可导出 $z_0 = x_0$. 最后，由 z_0 的假设，可知 $x_0 = z_0 \in \mathscr{D}(T)$，$x_0'(s) = z_0'(s) = y_0(s)$（概）$s \in [0, 1]$.
即 $T(x_0) = y_0$，也即T为一闭线性算子.

其三，我们求T的共轭算子的定义域 $\mathscr{D}(T^*)$. 由于 $\forall g \in \mathscr{D}(T^*)$，(由定义)有

$$g[T(x)] = [T^*(g)](x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(T).$$

故可得

$$\int_0^1 x'(t)g(t)dt = \int_0^1 [T^*(g)](t) \cdot x(t)dt, \quad \forall x(t) \in \mathscr{D}(T)$$

(其中，$g(t) \in \mathscr{D}(T^*) \subset L^*[0, 1] = M[0, 1]$). 今特取 $x(t)$ 分别为以下元列:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 当 s_0 \leqslant t \leqslant s 时; \\ 0, & 当 t \leqslant s_0 - \frac{1}{n}, 或 t \geqslant s + \frac{1}{n} 时; \\ 线性, & 当 t 在[0,1]其它点时，其中，0 \leqslant s_0 \leqslant s \leqslant 1 \\ & \quad (n = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

那么，上式变为

$$n\int_{s_0-\frac{1}{n}}^{s_0} g(t)dt - n\int_s^{s+\frac{1}{n}} g(t)dt = \int_0^1 [T^*(g)](t) \cdot x_n(t)dt$$

$$(n = 1, 2, \cdots).$$

令 $n\to\infty$，可导出

$$g(s_0)-g(s)=\int_{s_0}^{s}[\mathrm{T}^*(g)](t)dt\quad(0\leqslant s_0\leqslant s\leqslant 1).$$

也即有在[0, 1]上均有 $g'(t)$（概）存在，且有

$$g'(t)=-[\mathrm{T}^*(g)](t),\ (\text{概})\ t\in[0,1]$$

反之，对任一有界可测函数 $g(t)$，当其绝对连续，并有 $g'(t)\in M[0,1]$时，由分部积分法，我们则可得到

$$\int_0^1 x'(t)g(t)dt=-\int_0^1 g'(t)x(t)dt,\ \forall x(t)\in\mathscr{D}(\mathrm{T}).$$

说明必有 $g(t)\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$. 综合上面的论述便可知，$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$ 即为空间 $M[0,1]$ 中所有使其"导函数"仍属于空间的"绝对连续"函数的全体.

最后，我们说明 $\overline{\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)}\neq(L^1[0,1])^*=M[0,1]$. 事实上，如果有 $\overline{\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)}=M[0,1]$,则可得到结论：空间$M[0,1]$中的元均是"对等"于连续函数的。而这显然是不成立的. 此即说明$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$是不可能稠于 $(L^1[0,1])^*$ 的. 验毕.

注 11. 在定理 5 中,即使有 $\overline{\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)}=E_1^*$（甚至$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)=E_1^*$），一般也不能保证T必为闭算子.

事实上，当我们取一自反空间 $E=E_1$，然后取 E 中稠于它的一线性真子空间$\mathscr{D}$时，我们在$\mathscr{D}$上定义一么算子 C_0，显然可知$\mathscr{D}(\mathrm{C}_0^*)=E_1^*$，然而由$\mathscr{D}$不是 E 中的闭集，故由定理 2 可知 C_0 不是闭算子.

注意到注 11 及注 9，对定理 5 有下面的(加强了条件的)"逆命题"：

定理 6. 如果T为（整个）赋范线性空间E上定义的线性算子(取值于 E_1)，并且 $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$ 是"$_*$弱" 稠于 E_1^* 的. 那么，T必为闭算子.

证. 用归谬法证明. 如果有一元列$\{x_n\}\subset E$，使得

$$x_n\to x_0,\ \mathrm{T}(x_n)\to y_0\ (n\to\infty);\tag{4}$$

但 $\mathrm{T}(x_0)\neq y_0$. 那么，由 Hahn-Banach 定理则知，$\exists g_0\in E_1^*$，使得

$$g_0[T(x_0)] - g_0(y_0) = g_0[T(x_0) - y_0] = \|T(x_0) - y_0\|.$$

由于 $\mathscr{D}(T^*)$ 是"$_*$弱"稠于 E_1^* 的，因此，对上述 $g_0 \in E_1^*$，$\exists \{g_n\} \subset \mathscr{D}(T^*)$，使得 $g_n \xrightarrow{(*\text{弱})} g_0 (n \to \infty)$．特别地有

$$g_n[T(x_0) - y_0] \to g_0[T(x_0) - y_0] (n \to \infty).$$

这样，联系到 g_0 取法，我们由上式则知，$\exists g_{n_0} \in \mathscr{D}(T^*) \subset E_1^*$，使得

$$g_{n_0}[T(x_0)] - g_{n_0}(y_0) = g_{n_0}[T(x_0) - y_0] \neq 0. \tag{5}$$

然而根据 $g_{n_0} \in \mathscr{D}(T^*)$，因而由定义即有 $T^*(g_{n_0}) \in E^*$，从而由上式(4)的前一式假设，可导出(注意 T^* 的定义)

$$g_{n_0}[T(x_n)] = [T^* g_{n_0}](x_n) \to [T^* g_{n_0}](x_0)$$
$$= g_{n_0}[T(x_0)] \quad (n \to \infty);$$

同样由 $g_{n_0} \in E_1^*$，及式(4)的后一式假设，又可导出

$$g_{n_0}[T(x_n)] \to g_{n_0}(y_0) \ (n \to \infty).$$

根据极限的唯一性，及上两式，我们可得到 $g_{n_0}[T(x_0)] = g_{n_0}(y_0)$，但此显然与式(5)矛盾．证毕．

习　　题

1．试验证本节注 1，注 2，注 3．

§5.2. 开映象定理与闭图象定理

在许多实际问题中，我们常常遇到通过已知条件求出未知元的问题．例如，解代数方程、微分方程等等．如果把它们抽象统一起来，则可得到一般算子方程的求解问题．其实也就是考虑相应算子的逆算子的存在问题．当通常附加上该解要“存在、唯一、并且对依赖的(已知)条件是连续的”要求时，问题也便归结为寻求“连续的”逆算子的存在问题；对线性算子而言，也就是考虑其“有界逆算子”的存在问题．在本节(及 §5.5)，我们要介绍与此紧密相关的一些定理．这里，特别要强调的是“开映象定理”，通过它不但能够导出一些非常重要和适用的关于有界逆算子的存在定理，而且由它我们还将可以得到在分析中应用十分广泛的闭图象定理．

定义． 从赋(准)范线性空间 E 到 E_1 内的线性算子称为开算子，是指在 T 的作用下，E 中任意“原心球”的映象也必含有 E_1 中的一个“原心球”(即 $\forall\alpha>0$，$\exists\beta>0$，使得 $\bar{S}_1(\theta,\beta)\subset T[\bar{S}(\theta,\alpha)]$；其中，$\bar{S}_1$ 表示空间 E_1 内的球)．

例 1. 对赋范线性空间 E 中的任意 n 个线性无关有界线性泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_n$，线性算子 T，

$$T(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)),\quad \forall x\in E,$$

是一个从空间 E 映象到空间 $\boldsymbol{K}^n$ 内的开算子；特别地，每一个泛函 $f\in E^*$ 均是从 E 到数域(空间) $\boldsymbol{K}$ 内的开算子．

验． 此已由 §3.4 关于 Helly 定理的证明中得到．验毕．

例 2. 设 E_0 是赋(准)范线性空间 E 的一闭线性子空间．那么，E 到商空间 E/E_0 的典则映象 φ，

$$x\stackrel{\varphi}{\longmapsto}[x],\quad \forall x\in E.$$

一定是开算子．

验． 事实上，我们只要注意到 §1.4 中，商空间 E/E_0 内元的范数定义 $\|[x]\|=\inf\limits_{x\in[x]}\|x\|$，$\forall[x]\in E/E_0$，则可看出，对于 E/E_0

内的任意开球 $\tilde{S}(\theta, \varepsilon)$，从其任一点 $[x] \in \tilde{S}(\theta, \varepsilon)$，必有一元 $x_0 \in [x]$，使得 $\|x_0\| < \varepsilon$，因而可知

$$\tilde{S}(\theta, \varepsilon) \subset \varphi[S(\theta, \varepsilon)],$$

(其中，$S(\theta, \varepsilon) \subset E$)此外同样由 §1.4 可知 φ 为一"同态"映象. 因而是线性算子,此也即得知 φ 是一个开算子. 验毕.

注 1. 上面的定义告诉我们,所谓开算子，其实就是使空间 E 中以 θ 为内点的集仍然映象为空间 E_1 中以 θ 为内点的集的(线性)算子. 由此我们还可导出"开算子必将 E 中的开集变为 E_1 中的一个开集".

下面,我们只要说明此时对于 E 中的任一球 $S(x_0, \alpha)$，映象 $T[S(x_0, \alpha)]$ 必包含 E_1 中一个球就可以了.然而,因为 T 是开算子,故对于"原心球" $S(\theta, \alpha)$，必有 E_1 中一"原心球" $S_1(\theta, \beta)$，使其满足条件 $S_1(\theta, \beta) \subset T[S(\theta, \alpha)]$. 这样，$\forall y \in S_1(T(x_0), \beta)$，由 $\|y - T(x_0)\| < \beta$，故知 $y - T(x_0) \in S_1(\theta, \beta)$，从而由设可得 $y - T_0(x) \in T[S(\theta, \alpha)]$. 即 $\exists x \in S(\theta, \alpha)$,使 $y - T(x_0) = T(x)$,由此导得

$$y = T(x + x_0), \quad x + x_0 \in S(x_0, \alpha);$$

即有 $y \in T[S(x_0, \alpha)]$，此即导出 $S_1(T(x_0), \beta) \subset T[S(x_0, \alpha)]$.

注 2. 不难看出：当 T 是一个从赋(准)范线性空间 E 到 E_1 "上"的 1—1 对应线性算子时，"T^{-1} 为连续算子与 T 为开算子是等价的".

事实上,当 T^{-1} 是连续算子时，由其在 E_1 中"原点" θ 的连续性，可导出 $\forall \alpha > 0$，$\exists \beta > 0$，使得当 $\|y - \theta\| \leqslant \beta$ 时,有 $\|T^{-1}(y) - T^{-1}(\theta)\| \leqslant \alpha$. 此即 $\|T^{-1}(y)\| \leqslant \alpha$，也就是 $T^{-1}[\bar{S}_1(\theta, \beta)] \subset \bar{S}(\theta, \alpha)$.从而可得 $\bar{S}_1(\theta, \beta) \subset T[\bar{S}(\theta, \alpha)]$，便导出 T 为开算子. 反之,当 T 为开算子时,将上面的关系倒推回去,可得到线性算子 T^{-1} 在 E_1 中"原点" θ 的连续性. 最后,注意到前 §2.1 的结果，由 T^{-1} 的分配性,我们不难导出它亦在全空间 E_1 上是连续的.

下面,我们就来给出著名的"开映象定理"：

定理 1 (Banach 定理). 设 T 是由一"完备"的赋(准)范线

性空间E的线性子空间$\mathscr{D}(\mathrm{T})$到一"第二纲"赋(准)范线性空间E_1内的线性算子．其满足条件：

1°．T 是闭算子；

2°．T 的值域$\mathscr{W}(\mathrm{T})$是E_1中的第二纲集，

那么，有下面结论成立：

(i) 对任意正数ε，映象$\mathrm{T}[\bar{S}(\theta,\varepsilon)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})]$必含有空间$E_1$中的某一"原心球"；

(ii) $\mathscr{W}(\mathrm{T})=E_1$.

证． 下面，分三步证明：

1) 由线性算子T的值域$\mathscr{W}(\mathrm{T})$是E_1中的第二纲集，对E中任意"原心球"$\bar{S}(\varepsilon)=\bar{S}(\theta,\varepsilon)$，$\overline{\mathrm{T}[\bar{S}(\varepsilon)]}$必稠于$E_1$内某一"原心球"$\bar{S}_1(\delta)=\bar{S}_1(\theta,\delta)$.

事实上，由于T的值域

$$\mathscr{W}(\mathrm{T})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{T}\left\{n\left[\bar{S}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})\right]\right\}$$

从而由其为E_1中的第二纲集的定义可知，$\exists n_0$(自然数)，及E_1中某一闭球$\bar{S}_1(y_0,\delta_0)$，使得

$$\overline{\mathrm{T}\left\{n_0\left[\bar{S}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})\right]\right\}}\supset\bar{S}_1(y_0,\delta_0).$$

当注意到无论E_1为赋范或赋准范空间时，均有关系式

$$\bar{S}_1(y_0,\delta_0)\supset n_0\bar{S}_1\left(\frac{y_0}{n_0},\frac{\delta_0}{n_0}\right)$$

成立(事实上，$\forall y\in\bar{S}_1\left(\frac{y_0}{n_0},\frac{\delta_0}{n_0}\right)$，由范或准范的"三角不等式"可导出

$$\|n_0y-y_0\|=\left\|n_0\left(y-\frac{y_0}{n_0}\right)\right\|\leqslant n_0\left\|y-\frac{y_0}{n_0}\right\|\leqslant n_0\frac{\delta_0}{n_0}=\delta_0,$$

因而有，$n_0y\in\bar{S}_1(y_0,\delta_0)$)．这样一来，由T的分配性及以上的讨论可导出

$$n_0\overline{\mathrm{T}\left[\bar{S}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})\right]}\supset n_0\bar{S}_1\left(\frac{y_0}{n_0},\frac{\delta_0}{n_0}\right),$$

当记 $y_1 = \frac{y_0}{n_0}, \delta = \frac{\delta_0}{n_0}$ 时,可得

$$\overline{T\left[\bar{S}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathscr{D}(T)\right]} \supset \bar{S}_1(y_1, \delta).$$

最后,由于 $\forall y \in \bar{S}_1(\theta, \delta) = \bar{S}_1(\delta)$,由于 $y_1 + y \in \bar{S}_1(y_1, \delta)$,故由上式则知,$\exists x' \in \bar{S}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathscr{D}(T)$,使得

$$\|T(x') - (y_1 + y)\| \leqslant \frac{\delta}{2};$$

另外,由元 $y_1 \in \bar{S}_1(y_1, \delta)$,故知 $\exists x'' \in \bar{S}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathscr{D}(T)$,使得

$$\|T(x'') - y_1\| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

于是,由于$\mathscr{D}(T)$为 E 中的线性子空间,故可知 $x' - x'' \in \mathscr{D}(T)$,且有

$$\|x' - x''\| \leqslant \|x'\| + \|x''\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

也即导出 $x' - x'' \in \bar{S}(\varepsilon) \cap \mathscr{D}(T)$. 并且由前两关系式还可得到

$$\|T(x' - x'') - y\| = \|T(x') - T(x'') - y\|$$

$$\leqslant \|T(x') - (y_1 + y)\| + \|T(x'') - y_1\| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

至此,得出了所需的关系式 $\overline{T[\bar{S}(\varepsilon) \cap \mathscr{D}(T)]} \supset \bar{S}_1(\delta)$.

2) 在证明 1) 的结果下,当空间 E 是完备的时候,根据 T 的闭算子性质,可将结论中"稠"的关系加强为"包含"关系.

首先,由 1) 的结论我们可知,对于正数列: $\{\varepsilon_k\} = \left\{\frac{\varepsilon}{2^k}\right\}$,必有一正数列$\{\delta_k\}$与之对应,使得一致地有

$$\overline{T[\bar{S}(\varepsilon_k) \cap \mathscr{D}(T)]} \supset \bar{S}_1(\delta_k) \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

(并且,我们不妨设 $\delta_k \downarrow 0 (k \to \infty)$),下面,我们证明,必有关系式

$$T[\bar{S}(\varepsilon) \cap \mathscr{D}(T)] \supset \bar{S}_1(\delta_1)$$

成立. 事实上,$\forall y \in \bar{S}_1(\delta_1)$,由式(1)可知,集 $T[\bar{S}(\varepsilon_1) \cap \mathscr{D}(T)]$ 是稠于球 $\bar{S}_1(\delta_1)$的,因此对上面的正数 δ_2,$\exists x_1 \in \bar{S}(\varepsilon_1) \cap \mathscr{D}(T)$,使

得

$$\|y-\mathrm{T}(x_1)\|\leqslant\delta_2.$$

同样，由于这里的元 $y-\mathrm{T}(x_1)\in\bar{S}_1(\delta_2)$，故由式(1)可知，集 $\mathrm{T}[\bar{S}(\varepsilon_2)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})]$ 是稠于球 $\bar{S}_1(\delta_2)$ 的，因而，$\exists x_2\in\bar{S}(\varepsilon_2)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})$，使得

$$\|[y-\mathrm{T}(x_1)]-\mathrm{T}(x_2)\|\leqslant\delta_3.$$

一般地，对于元 $y-[\mathrm{T}(x_1)+\mathrm{T}(x_2)+\cdots+\mathrm{T}(x_{n-1})]=y-\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{T}(x_k)\in\bar{S}_1(\delta_n)$，由式(1)可知，对上面的正数 δ_{n+1} 而言，$\exists x_n\in\bar{S}(\varepsilon_n)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})$，使得

$$\left\|\left[y-\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{T}(x_k)\right]-\mathrm{T}(x_n)\right\|\leqslant\delta_{n+1}.$$

这样，根据T的分配性以及 $\delta_n\downarrow 0(n\to\infty)$ 的假设，可导出

$$\mathrm{T}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\to y\quad(n\to\infty).\tag{2}$$

另一方面，由 $\{x_k\}$ 的选法我们又可导出

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,$$

从而由空间 E 的完备性可知（注意 §1.2 习题 9），元 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛，即 $\exists x\in E$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}x_k\to x\quad(n\to\infty).\tag{3}$$

最后，注意到T是闭算子的假设，由式(2)及(3)，可导出

$$x\in\mathscr{D}(\mathrm{T}),\ \mathrm{T}(x)=y.$$

同样由 $\|x\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\leqslant\varepsilon$，我们还知 $x\in\bar{S}(\varepsilon)\cap\mathscr{D}(\mathrm{T})$. 至此，便导出了本段所需的关系式.

3) 由证明 2) 我们导出了本定理的结论(i). 同样，由它我们还可得到 $\bar{S}_1(\delta_1)\subset\mathscr{W}(\mathrm{T})$；由T的分配性可知必有 $\mathscr{W}(\mathrm{T})=$

E_1，此即导出了本定理的结论(ii)．

注 3. 当 $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = E$ 时，上面的定理说明“从一完备的赋(准)范线性空间 E 到一第二纲的赋(准)范线性空间 E_1“上”的闭线性算子一定也是开算子”．

下面讨论关于线性闭算子的连续性问题．在上一节，我们曾经指出，在一个赋(准)范线性空间“上”定义的连续线性算子一定是闭算子．我们自然会产生这个命题的逆命题是否正确这样一个问题．从 1910 年 Hellinger-Toeplitz 关于 Hilbert 空间中的对称算子的工作开始，继而是(H)空间中的共轭算子连续性的研究，最后才发展到下面关于在一般赋准范空间上的结果、即著名的“闭图象定理”．这里，用定理 1 的证明方法给出结果．

定理 2. 设 T 是由一“第二纲”的赋(准)范线性空间到一“完备的”赋(准)范线性空间 E_1 内的线性算子．那么，当 T 是闭算子时，它就是连续线性算子．

证． 当用“$\mathrm{T}^{-1}(M_1)$” ($M_1 \subset E_1$)表示集 M_1 对于 T 的“原像”时(即 $\mathrm{T}^{-1}(M_1)$表示在 T 的作用下映象为 M_1 的(E 中)点的集合)．与定理 1 的证明类似，$\forall \varepsilon > 0$，有

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{T}^{-1}\left[n\bar{S}_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathscr{W}(\mathrm{T})\right].$$

从而由 E 的第二纲假设，则存在一足够大的正整数 n_0 及 E 中某一闭球 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$，使得

$$\overline{\mathrm{T}^{-1}\left[n_0\bar{S}_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathscr{W}(\mathrm{T})\right]} \supset \bar{S}(x_0, \delta_0).$$

同样由 E 的赋(准)范性以及线性算子“原像”的初等性质(类似定理 1 中的证明)可得到

$$\overline{\mathrm{T}^{-1}\left[\bar{S}_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathscr{W}(\mathrm{T})\right]} \supset \bar{S}\left(\frac{x_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{n_0}\right).$$

但 $\mathscr{W}(\mathrm{T})$ 为 E_1 中的线性子空间，从上可知 $\forall x \in \bar{S}\left(\theta, \frac{\delta_0}{n_0}\right)$，由 $x + \frac{x_0}{n_0} \in \bar{S}\left(\frac{x_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{n_0}\right)$ 及 $\frac{x_0}{n_0} \in \bar{S}\left(\frac{x_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{n_0}\right)$，又可得 $x = \left(x + \frac{x_0}{n_0}\right)$

$-\dfrac{x_0}{n_0} \in \overline{T^{-1}[\bar{S}_1(\varepsilon) \cap \mathscr{W}(T)]}$. 即

$$\overline{T^{-1}[\bar{S}_1(\varepsilon) \cap \mathscr{W}(T)]} \supset \bar{S}\left(\theta, \frac{\delta_0}{n_0}\right) = \bar{S}\left(\frac{\delta_0}{n_0}\right).$$

其次，我们也可由T的闭线性算子的假设及空间 E_1 的完备性的假设导出，上面关于"稠"的关系式可以加强为"包含"的关系式。事实上，仍然与定理 1 的证明类似，由上式可导出，对正数列$\left\{\dfrac{\varepsilon}{2^k}\right\}$，必存在正数列 $\{\delta_k\}$，$\delta_k \downarrow 0$ $(k \to \infty)$，使得均有

$$\overline{T^{-1}[\bar{S}_1(\varepsilon_k) \cap \mathscr{W}(T)]} \supset \bar{S}(\delta_k) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

从而，与定理 1 证明中 2) 相类似，由归纳法则可导出 $\forall x \in \bar{S}(\delta_1)$，$\forall n$ (自然数)，由 $\exists x_n \in T^{-1}[\bar{S}_1(\varepsilon_n) \cap \mathscr{W}(T)]$，使得

$$\left\|\left[x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right] - x_n\right\| \leqslant \delta_{n+1}.$$

因此导出

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \to x \quad (n \to \infty). \tag{3}$$

另一方面，由$\{x_k\}$所设还可知 $T(x_n) \in \bar{S}_1(\varepsilon_n)$，因而由

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T(x_k)\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

及空间 E_1 的完备性，可知，$\exists y \in \bar{S}_1(\varepsilon) \subset E_1$，使得

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \to y \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

这样一来，由式(3)，(4)以及T为闭线性算子的假设，可得出 $y = T(x)$，从而导出了关系式 $T[\bar{S}(\delta_1)] \subset \bar{S}_1(\varepsilon)$. 即线性算子T在$E$的"原点"$\theta$是连续的. 同样，由 §2.1 的结果便导出了T是E上的连续线性算子. 证毕.

下面，我们在一定的附加条件下(这是常见的情况)给出关于上面两个重要定理相互等价性的定理:

定理 3. 如果上面定理 1，2 中的空间 E，E_1 均是完备的，并且，闭线性算子T定义在整个空间E上，那么，开映象定理与闭

图象定理是可彼此相互导出的.

证. 1) 开映象定理 $\Longrightarrow$ 闭图象定理　事实上,由T是闭线性算子的假设可知,图象 $G(\mathrm{T})$ 亦为乘积空间 $E\times E_1$ (此时亦为完备的)内的闭线性子空间,从而知其也构成一个"完备的"赋(准)范线性空间. 下面,我们在 $G(\mathrm{T})$ 上定义一个算子A,

$$\mathrm{A}[(x,\mathrm{T}(x))]=x,\ \forall(x,\mathrm{T}(x))\in G(\mathrm{T}).$$

显然,可看出,A是从 $G(\mathrm{T})$ 到 E 上的1—1对应线性算子(从而逆算子 A^{-1} 存在),并且,由乘积空间的范数定义可知

$$\|\mathrm{A}[(x,\mathrm{T}(x))]\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|\mathrm{T}(x)\|$$
$$=\|(x,\mathrm{T}(x))\|,\quad\forall(x,\mathrm{T}(x))\in G(\mathrm{T}),$$

因此,导出A为定义在整个空间 $G(\mathrm{T})$ 上的有界线性算子. 于是,由上节注4知A也是一个闭线性算子. 注意到A的值域 $\mathscr{W}(\mathrm{A})=E$ 是第二纲的(因 E 是完备空间),所以,由定理1可知,A必为开算子. 这样一来,注意到本节注2,可导出,A^{-1} 是连续线性算子.

此外,由 $G(\mathrm{T})$ 上定义的算子B,

$$\mathrm{B}[(x,\mathrm{T}(x))]=\mathrm{T}(x),\quad\forall(x,\mathrm{T}(x))\in G(\mathrm{T}).$$

可以看出,B也是一从 $G(\mathrm{T})$ 到 E_1 内的有界线性算子,从而也是连续线性算子. 于是,由明显的关系式 $\mathrm{T}=\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}^{-1}$.可导出,T也是 E 上定义的连续线性算子. 此即得出了定理2.

2) 闭图象定理 $\Longrightarrow$ 开映象定理　事实上,首先由T是闭线性算子的假设,我们不难看出,E_1 中"零元"的原像 $\mathrm{T}^{-1}(\{\theta\})=N$ 必为完备空间 E 中的一闭线性子空间. 从而由§1.4节的定理2,3及其习题4可知,商空间 E/N 也必为一完备的赋(准)范空间. 于是,由T可得到在 E/N 上定义的线性算子 $\tilde{\mathrm{T}}$,且有

$$\tilde{\mathrm{T}}([x])=\mathrm{T}(x),\quad\forall[x]\in E/N.$$

并且容易看出,$\tilde{\mathrm{T}}$ 是从空间 E/N 到 $\mathscr{W}(\mathrm{T})$ 上的1—1对应的线性算子. 下面验证它是闭算子. 如果设元列 $\{[x_n]\}\subset E/N$ 满足条件

$$[x_n]\to[x],\ \tilde{\mathrm{T}}([x_n])\to y\in E_1\quad(n\to\infty).\tag{5}$$

那么，由上面第一式及商空间(准)范数的定义我们有

$$\|[x_n - x]\| = \inf_{u_n \in [x_n - x]} \|u_n\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此，存在一列元 $u_{nk}^\circ \in [x_{n_k} - x]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$\|u_{nk}^\circ\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

于是，根据 §1.4 定理 3 中证明商空间完备性的方法，可得一元列 $x_{nk}^\circ \in [x_{n_k}]$ $(k = 1, 2, \cdots)$及元 $x^\circ \in [x]$，使得

$$u_{nk}^\circ = x_{nk}^\circ - x^\circ \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

这样便得到(注意式(5))

$$x_{nk}^\circ \to x^\circ, \ \mathrm{T}(x_{nk}^\circ) = \tilde{\mathrm{T}}([x_{n_k}]) \to y \qquad (k \to \infty).$$

因而由 T 的闭性，可得到 $\mathrm{T}(x^\circ) = y$，即

$$\tilde{\mathrm{T}}([x]) = \mathrm{T}(x^\circ) = y,$$

回到式(5)，此即导出了算子 $\tilde{\mathrm{T}}$ 亦是闭的线性算子．从而，由上节注 2 可知，其逆算子 $\tilde{\mathrm{T}}^{-1}$ 也是从 $\mathscr{W}(\mathrm{T})$ 到完备的赋(准)范线性空间 E/N 上的闭线性算子；且由这时的假设（$\mathscr{W}(\mathrm{T})$是第二纲的）及闭图象定理我们还可导出 $\tilde{\mathrm{T}}^{-1}$ 是连续线性算子．同样由本节注 2，可知 $\tilde{\mathrm{T}}$ 是一个开算子．

最后，我们由 $\tilde{\mathrm{T}}$ 的开算子性质导出 T 也是一个开算子．事实上，当我们用 φ 表示 $E \longmapsto E/N$ 的典则映象时，由前面关于开算子的例 2，我们已知，φ 必为 E 上的开线性算子．所以，当算子

$$\mathrm{T} = \tilde{\mathrm{T}}\varphi$$

时，我们不难导出，T 也是 E 上的开算子．此即得出了开映象定理．证毕．

下面，我们对上面定理给出几个常用的推理：

推理 1． 设 T 为 Banach（或 Fréchet）空间 E 到一“第二纲”赋(准)范线性空间 E_1 上的连续线性算子．那么，T 必将 E 中的开集映象为 E_1 中的开集．

证． 首先，注意到此时由 T 为连续线性算子的假设，以及$\mathscr{D}(\mathrm{T}) = E$，因此，由 §5.1 中定理 2 可知，T 是 E 上的一个闭算子．由 E 是完备的，$\mathscr{W}(\mathrm{T}) = E_1$ 亦是第二纲的，因而由开映象定理

可知T也是一个开算子．最后直接由本节注 1 可导出本推理的结论．证毕．

推理 2． 在上面定理 1 的假设条件下，如果 T 还是由 $\mathscr{D}(T)$ 到 $\mathscr{W}(T)$ 的 1—1 对应算子，那么，其逆算子 T^{-1} 必为定义在 E_1 上的连续线性算子．

证． 首先，由算子 T 的 1—1 对应性，知其逆算子 T^{-1} 是存在的．另外，由定理 1 可知 $\mathscr{W}(T) = E_1$．因而当把 T 视为赋（准）范线性空间 $\mathscr{D}(T)$ 到 E_1 上的 1—1 对应线性算子时，定理 1 的结论说明，此时，T 也是一个开算子．最后，直接利用本节注 2，便可导出 T^{-1} 必为 E_1 上的连续线性算子．证毕．

推理 3．（Banach 逆算子定理）． 设 T 为 Banach（或 Fréchet）空间 E 到一"第二纲"赋（准）范线性空间 E_1 上的 1—1 对应的连续线性算子．那么，T^{-1} 也必为一连续线性算子．

证． 事实上，由上节的定理 2 及注 4，可知 T 也是一个闭线性算子．由这里的假设条件及上面的开映象定理，可知 T 亦为一开算子．因此，根据本节注 2，可知 T^{-1} 必为从 E_1 到 E 上的有界线性算子．证毕．

推理 4． 设线性空间 E 内的定义的两个不同的（准）范数"$\|\cdot\|_1$"，"$\|\cdot\|_2$"均使其成为 Banach（或 Fréchet）空间，而且这两个范数满足条件

$$\|x\|_2 \to \theta \Rightarrow \|x\|_1 \to \theta, \quad \forall x \in E.$$

那么，上面的两个准范数是等价的，（$\|x\|_2 \to \theta \Longleftrightarrow \|x\|_1 \to \theta$）即 $\exists \alpha$，$\beta > 0$，使得 $\alpha\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \beta\|x\|_2; \forall x \in E$．

此推理 4 我们在 §5.4 将要用到，我们把它的证明留给读者完成．

由闭图象定理并注意到上节定理 2 的结果，我们还可以直接得到下面的推理：

推理 5． 设 T 为第二纲赋（准）范线性空间到一 Banach（或 Fréchet）空间内的线性算子，则 T 为连续算子与 T 为闭算子是彼此等价的．

最后我们利用闭图象定理给出涉及到两个闭算子范数比较的一个推理:

推理 6 (L. Hörmander). 设 E, E_1, E_2 均为 Banach 空间; T_1, T_2, 分别是从 E 内到 E_1 与 E_2 内的闭线性算子, 且有 $\mathscr{D}(T_1) \subset \mathscr{D}(T_2)$. 那么,必存在一个正常数 β, 使得

$$\|T_2(x)\| \leqslant \beta(\|T_1(x)\| + \|x\|), \forall x \in \mathscr{D}(T_1).$$

证. 首先,由 T_1 的闭线性算子的假设我们可知,图象 $G(T_1)$ 必为乘积空间 $E \times E_1$ 内的一个闭集, 从而由假设及积空间的性质,可知 $G(T_1)$ 亦为一个 Banach 空间.

其次,我们做一个从空间 $G(T_1)$ 到 E_2 内的算子 A:

$$A[(x, T_1(x))] = T_2(x), \quad \forall (x, T_1(x)) \in G(T_1).$$

由 T_1, T_2 的分配性, 我们显然可知 A 也是一个线性算子. 下面证明 A 是一个闭算子. 事实上,如果有元列$\{(x_n, T_1(x_n))\} \subset G(T_1)$. 使得

$$(x_n, T_1(x_n)) \to (x, T_1(x)), \ T_2(x_n) \to y \quad (n \to \infty).$$

那么,由假设可知, $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T_1) \subset \mathscr{D}(T_2)$, 并由乘积空间中元的范数定义,可得

$$x_n \to x, T_2(x_n) \to y \quad (n \to \infty).$$

从而, 注意到算子 T_2 的闭性可导得 $x \in \mathscr{D}(T_2)$ 及 $T_2(x) = y$. 即有

$$A[(x, T_1(x))] = T_2(x) = y_0.$$

此即证得 A 亦为一个闭线性算子.

最后,由于 $\mathscr{D}(A) = G(T_1)$是第二纲的, E_2 是完备的, 因此, 根据闭图象定理可导出, A 为从 $G(T_1)$ 到 E_2 内的连续线性算子. 这样一来,由 §2.1 的结果,也可导出 A 是一个有界线性算子. 于是, 根据空间 $G(T_1) \subset E \times E_1$ 内范数的定义,便可直接得到本推理的结论. 证毕.

注 4. 在开映象定理中,其值域 $\mathscr{W}(T)$ 是"第二纲"集的条件是取消不得的.

反例 1. 设(l_0^1)为将(l^1)空间中的元改以 ((C_0)的) "极大模"

为范数的赋范线性空间．则当令C为从空间(l^1)到(l_0^1)的"么算子"(元不变，但各相应空间的范数不同)，那么，C为(l^1)上的闭线性算子，但不是开算子．

验． 由于明显的关系式

$$\|C(x)\|_{(l_0^1)}=\sup_n |\xi_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|x\|_{(l^1)}, \ \forall x=\{\xi_n\}\in(l^1),$$

因此，我们可知C为全空间(l^1)上定义的有界线性算子．从而由上节定理2，可知它亦为一闭算子．此外，由于C是1—1对应的，所以逆算子C^{-1}存在．然而C^{-1}一定不是连续算子．若不然，则其必为从空间(l_0^1)到(l^1)上的有界线性算子，从而导出范数"$\|\cdot\|(l_0^1)$"与"$\|\cdot\|(l^1)$"是等价的，由此，从空间(l^1)的完备性则应导出空间(l_0^1)的完备性；然而由§4.4我们已知(l_0^1)是第一纲的赋范线性空间，从而导出矛盾，因而C^{-1}是不连续的．由本节注2，也导出C不是开算子．验毕．

注5. 在文献[66]中，Hausdorff对于一般的(非线性)"开算子"定义为"连续算子"，其将开集映象为开集．并证明了如下结论：当T为距离空间E到E_1上的"开算子"时，如果E完备，则E_1是"拓扑完备"的(即一个完备空间的同胚映像)．于是，结合上面的开映象定理，我们可导出下面说明$\mathscr{W}$(T)的第二纲假设对于上面"开算子"而言(连续(!)……)是一个"实质性"的条件的结论："设T是从Fréchet空间E到一赋(准)范线性空间E_1上的连续线性算子，那么，为了T为开算子，必须且只须E_1是第二纲的空间"．

注6. 类似地，在闭图象定理中，当把$\mathscr{D}(T)=E$为"第二纲"的(赋范线性空间)条件去掉时，结论也未必成立．

反例2． 设T为上面反例1中之C^{-1}．那么，C^{-1}必为空间(l_0^1)到(l^1)上的闭线性算子，但却不是连续算子．

验． 由上面反例1，我们已知C为闭算子．因此由上一节注2，显然可知C^{-1}亦为闭算子．同样由反例1，还知C^{-1}不是连续算子．验毕．

注7. 必须注意的是：与开映象定理不同，$\mathscr{D}$(T)为第二纲

的(赋(准)范线性)空间并不是闭图象定理的实质性条件. 也即是说，我们的确可以找到一个在"第一纲"赋(准)范线性空间上定义而在(整个)另一个完备空间上取值的闭线性算子，使其也是连续算子的例子.

例. 设E为任一 Banach 空间(无穷维)，B为E中一个 Hamel 基所成之集(并设$\|h\|\leqslant 1, \forall h\in B$)；$\forall x\in E$，当其对$B$的唯一表达式为

$$x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k \text{ (其中，} h_1, h_2, \cdots, h_n\in B\text{)}$$

时，我们定义

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|,$$

并设在此范数下的空间为E_1. 那么，E_1必为"第一纲"的赋范线性空间；并且当令$E\to E_1$上的"么算子"为C时，则C^{-1}必为E_1到E上的闭连续算子 (从而C是一个闭的开算子，但C不是连续算子).

验. 首先，我们验证C^{-1}必是E_1到E上的连续算子. 事实上，由式

$$\|C(x)\|_1=\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\geqslant\sum_{k=1}^{n}\|\alpha_k h_k\|$$
$$\geqslant\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k\right\|=\|x\|, \quad \forall x\in E.$$

回忆 §2.1 的结果，可直接导出所需结论，从而由上节定理 2，C^{-1}也是闭算子，(因而，C作为C^{-1}的逆算子，由上节注 2 也是闭的；且由C^{-1}是连续线性算子，由本节注 2 又可导出C为一个开算子；由E_1是第一纲(待证)，E是完备的(也是第二纲)，故可知C不能再是连续的. 否则C将使E与E_1"线性同胚").

然后，我们验证E_1是第一纲的. 事实上，我们将E的 Hamel 基B分为任意可列个子集$\{B_n\}$，使得

$$B_1\subsetneqq B_2\subsetneqq\cdots\subsetneqq B_n\subsetneqq\cdots, \quad B=\sum_{n=1}^{\infty}B_n.$$

那么，$\forall n$，B_n 的线性组合$[B_n]$均具有下列性质：

i. 集 $[B_n]$ 不含内点．事实上，$\forall x_0 \in [B_n]$，当设 $x_0 = \alpha_1 h + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_k h_k$ 时，由其做法可知，$\exists h' \in B_{n+1}$，使 $h' \bar{\in} [B_n]$．这样，当取一向零的正数列$\{\varepsilon_m\}$，并设元列

$$y_m = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_k h_k + \varepsilon_m h' \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

时，显然可知 $y_m \bar{\in} [B_n] (m = 1, 2, \cdots)$．然而，

$$\|y_m - x_0\|_1 = \|\varepsilon_m h'\|_1 = \varepsilon_m \to 0 \quad (m \to \infty).$$

此即知集$[B_n]$不含内点．

ii. $[B_n]$是闭集．事实上，如果有元 $z_0 \in [B_n]'$，$z_0 = \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \cdots + \beta_i h_i$；反之，有 $h_1, h_2, \cdots, h_{i_0} \bar{\in} [B_n] (i_0 \leqslant i)$，那么，当设元列 $\{x_m\} \subset [B_n]$ 满足条件

$$x_m \to z_0 \ (m \to \infty)$$

时，由 E_1 中的范数定义，可得到，如果元 $x_m = \sum\limits_{k=i_0+1}^{i^{(m)}} \xi_k^{(m)} h_k$ $(i^{(m)} \geqslant i)$，则有

$$\|x_m - z_0\| = \sum_{k=1}^{i_0} |\beta_k| + \sum_{k=i_0+1}^{i^{(m)}} |\xi_k^{(m)} - \beta_k| \geqslant \sum_{k=1}^{i_0} |\beta_k| \not\to 0 \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

（这里，我们约定，当 $k > i$ 时 $\beta_k = 0$）．但上面两关系式显然是矛盾的．此即$[B_n]$是闭集．

综合 i，ii，我们即知每一个$[B_n]$均是 E_1 中的疏集，从而 $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [B_n]$ 是第一纲的．验毕．

注 8． 注 7 的例中的算子C也可作为值域 $\mathscr{W}(C)$ 不是第二纲集但开映象定理仍然成立的一个例子．

习　　题

1．用开映象定理再次验证本节定义下面的例 1．

2．用闭图象定理再次验证 §4.3 习题 7．

3．用闭图象定理证明：从 Banach 空间 E（分别）到 $E_l (l \in I)$ 内的有界

线性算子族 $\{T_l|l\in I\}$ 的共鸣定理.

4. 试证明本节推理 4.

5. 设 E 为一 Banach (或 Fréchet) 空间, E_1, E_2 为其内的闭线性子空间, 且 $\forall$ 元 $x\in E$, 均有唯一的分解式

$$x = x_1 + x_2 \quad (x_1\in E_1,\ x_2\in E_2).$$

试证明: $\exists$ (常数) β, 使得 $\forall x\in E$, x 的(唯一)分解元 x_1, x_2, 均有

$$\|x_1\|\leqslant\beta\|x\|,\quad \|x_2\|\leqslant\beta\|x\|.$$

§ 5.3. 闭图象定理与 Banach 逆算子定理的一些应用

在上节中所述的 Banach 逆算子定理 (那里的推理 3), 对于(偏)微分方程及线性代数方程的求解问题, 讨论解对"初始条件"的连续依赖性等方面, 均有很大的实用价值. 借助于闭图象定理, 人们又常常能把关于算子的连续性的讨论予以简化. 下面举几个例子说明.

首先, 我们讨论涉及到闭图象定理的两个例子.

例 1. 设 $1\leqslant p,p'\leqslant\infty$, (α_{ij}) 是无穷矩阵, 且满足条件:

1° 对每 i 行, 均有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q<\infty\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right);$$

2° $\forall$ 元 $x=\{\xi_j\}\in(l^p)$, 由下级数

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j\quad(i=1,2,\cdots)$$

所组成的元 $y=\{\eta_i\}\in(l^{p'})$.

那么, 定义为

$$y=T(x),\ \forall x\in(l^p)$$

的算子 T 是从 (l^p) 到 $(l^{p'})$ 内的连续线性算子.

验. 由上面的定义, 我们已知 T 的分配性. 因此, 下面仅证明其连续性. 而由闭图象定理, 只要证明 T 是闭算子就行了. 设元列 $\{x_n\}\subset(l^p)$, 使得

$$x_n\to x_0,\ T(x_n)\to y\ (n\to\infty).$$

那么，当我们令 $x_n=\{\xi_j^{(n)}\}$，$\mathrm{T}(x_n)=\{\eta_i^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$，$x_0=\{\xi_j^{(0)}\}$，$y=\{\eta_i\}$时，由于空间$(l^{p'})$内的元列收敛必可导出其坐标收敛，因而由$\{\mathrm{T}(x_n)\}$收敛于 y 我们则可导出

$$\eta_i^{(n)}\to\eta_i\quad(n\to\infty,\ i=1,2,\cdots).$$

另一方面，当令 $\mathrm{T}(x_0)=\{\eta_i^{(0)}\}$ 时，$\forall i$（自然数），（由前式及 Hölder 不等式）有

$$\begin{aligned}|\eta_i^{(n)}-\eta_i^{(0)}|&=\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}(\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(0)})\right|\\&\leqslant\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(0)}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\\&=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\cdot\|x_n-x_0\|\to0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

从而导出

$$\eta_i^{(n)}\to\eta_i^{(0)}\quad(n\to\infty).$$

这样，由极限的唯一性及上面两关系式我们就可得到 $\eta_i=\eta_i^{(0)}(i=1,2,\cdots)$. 即 $y=\mathrm{T}(x_0)$. 也即T为一闭算子. 验毕.

例 2. 设（常系数）偏微分方程（"超椭圆"型）

$$P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_1},\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_2},\cdots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_n}\right)x(t_1,t_2,\cdots,t_n)=0$$

（其中，$P(\lambda)=P(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的多项式）满足条件：对于 $\boldsymbol{C}^n$ 空间中某一紧集 Ω，其具有"广义解" $x\in L^2(\Omega)$（即在Ω的一个零测集适当改变 $x(t)$ 的值后，$x(t)$ 在 Ω 内可具有任意阶的偏导数）. 那么，必存在一正数 β，使得凡满足相应（代数方程）$P(\lambda)=0$ 的解 λ，必亦满足：

$$|\lambda|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2}\leqslant\beta.$$

验. 首先，我们取上面偏微分算子 P 的定义域为

$$\mathscr{D}(\mathrm{P})=\{x\,|\,x(\partial\Omega)=0;x^{(k)}(t)\in L^2(\Omega),k=0,1,2,\cdots\}$$

（其中，$\partial\Omega$ 代表 Ω 的边界；$x(\partial\Omega)=0$ 代表 $x(t)=x(t_1,t_2,\cdots,t_n)=0$，$\forall t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\partial\Omega$）. 那么，显然可以看出

$\overline{\mathscr{D}(\mathrm{P})} = L^2(\Omega)$.

其次，我们设 $E_0 \subset \mathscr{D}(\mathrm{P})$ 为满足上偏微分方程的"广义解" x 元之全体. 显然，E_0 为 $L^2(\Omega)$ 内的一线性子空间，下面，我们证明它是闭的. 事实上，类似于 §2.4 习题 8 易知，$\forall y \in \mathscr{D}(\mathrm{P})$，均有

$$0 = \int_\Omega [P(x)](t) \cdot y(t)\mu(dt) = \int_\Omega x(t) \cdot [P^*(y)](t)\mu(dt), \quad \forall x \in E_0.$$

因而，$\forall \{x_n\} \subset E_0 \subset L^2(\Omega)$，如果有 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$，那么，回忆到 §1.1 中关于"内积"的连续性，由上式可导出

$$\int_\Omega [P(x_0)](t) \cdot y(t)\mu(dt) = \int_\Omega x_0(t) \cdot [P^*(y)](t)\mu(dt)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega x_n(t) \cdot [P^*(y)](t)\mu(dt) = 0, \quad \forall y \in \mathscr{D}(\mathrm{P}).$$

由此，注意到 $\overline{\mathscr{D}(\mathrm{P})} = L^2(\Omega)$，由上式及 Hahn-Banach 定理可得到

$$P(x_0) = \theta,$$

即 x_0 亦为上面偏微分方程的一个"广义解". 此外，由于 $\mu(\partial\Omega) = 0$，故我们不妨取 $x_0 = x_0(t)$ 亦为在 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上均取 0 值的函数，此即有 $x_0 \in E_0$，从而证得 E_0 确为空间 $L^2(\Omega)$ 内的一个"闭"线性子空间.

然后，我们类似地考查下面 n 个算子：

$$\mathrm{T}_k(x) = \frac{1}{i}\frac{\partial x}{\partial t_k}, \quad \mathscr{D}(\mathrm{T}_k) = \mathscr{D}(\mathrm{P}) \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

类似 §24 习题 8 的结果，我们可知，$\mathrm{T}_k = \mathrm{T}_k^* (k = 1, 2, \cdots, n)$，从而 (注意到此时有 $\overline{\mathscr{D}(\mathrm{T}_k)} = L^2(\Omega)$, $1 \leqslant k \leqslant n$) 由前 §5.1 中定理 3 可导出 $\mathrm{T}_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 均为由 $\mathscr{D}(\mathrm{P})$ 到 $L^2(\Omega)$ 内的"闭"线性算子. 特别地，当设

$$\mathrm{T}_k^\circ(x) = \frac{1}{i}\frac{\partial x}{\partial t_k}, \quad \mathscr{D}(\mathrm{T}_k^\circ) = E_0 (\subseteq \mathscr{D}(\mathrm{P})) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

时，可知 T_k° 为从 Banach 空间 E_0 (因其为 Banach 空间 $L^2(\Omega)$ 之闭

线性子空间)到 Banach 空间 $L^2(\Omega)$ 内的闭线性算子，因此，用上节的闭图象定理，就可导出 $T_k^\circ(k=1,2,\cdots,n)$ 均为 E_0 上的"连续"线性算子．这样一来，$\exists\beta>0$，使得均有

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial t_k}\right\|\leqslant\frac{\beta}{n}\|x\|,\quad\forall x\in E_0\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial x}{\partial t_k}\right\|\leqslant\beta\|x\|,\quad\forall x\in E_0,$$

也即有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\int_\Omega\left|\frac{\partial x}{\partial t_k}(t)\right|^2\mu(dt)}\leqslant\beta\sqrt{\int_\Omega|x(t)|^2\mu(dt)},$$

$$\forall x=x(t)\in E_0,$$

最后，当"n 维"复数 λ 满足前面代数方程 $P(\lambda)=0$ 时，相应的函数

$$x(t)=\begin{cases}e^{i(t,\lambda)}, & \forall t\in\mathring{\Omega}\left(\text{其中，}(t,\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k\lambda_k\right)\\0, & \forall t\in\partial\Omega\end{cases}$$

也必满足 $P[x(t)]=0$．因而可知 $x(t)$ 即为该偏微分方程的一个解，即 $x\in E_0$．于是，将此 x 代入上面的不等式，可得到

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\int_\Omega|\lambda_k e^{i(t,\lambda)}|^2\mu(dt)}\leqslant\beta\sqrt{\int_\Omega|e^{i(t,\lambda)}|^2\mu(dt)},$$

也即导出

$$|\lambda|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2}\leqslant\beta.$$

验毕．

注 1． 类似上面的证法，在代数方程 $P(\lambda)=0$ 中，我们可以得到 λ（复数）的虚部的有界性控制 λ 的有界性的结果等，对此有兴趣的读者可以参看文献[70]．

下面，我们讨论涉及 Banach 逆算子定理的两个例子．

例 3（线性微分方程解的连续依赖性）． 设已给 k 阶线性微分方程

$$x^{(k)}(t)+p_1(t)x^{(k-1)}(t)+\cdots+p_{k-1}(t)x'(t)+p_k(t)x(t)=y(t)$$

及初始条件

$$x(a)=x'(a)=\cdots=x^{(k-1)}(a)=0$$

(其中，“系数” $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\cdots$, $p_k(t)$ 均为区间 $[a,b]$ 上的连续函数)，且由常微分方程论的 Picard 定理还知，对每个 $[a,b]$ 上的连续函数 $y(t)$，均存在唯一一个“k 阶连续可微”的解 $x(t)$. 那么，上面的解 $x(t)$ 是连续依赖于函数 $y(t)$ 的.

验. 首先，我们记(在 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导函数)空间 $C^k[a,b]$ 内的子集

$$C_0^{(k)}[a,b]=\{x\,|\,x(a)=x'(a)=\cdots=x^{(k-1)}(a)=0;\ x\in C^{(k)}[a,b]\}.$$

由于在空间 $C^{(k)}[a,b]$ 中，$\forall x\in C^{(k)}[a,b]$，范数定义为

$$\|x\|=\sum_{m=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(m)}(t)|,$$

故知那里的“按范收敛”即为各阶导函数均在 $[a,b]$ 上“一致收敛”，因而易见 $C_0^{(k)}[a,b]$ 乃是 $C^{(k)}[a,b]$ 的一闭线性子空间. 从而，由 $C^{(k)}[a,b]$ 是 Banach 空间，可知 $C_0^{(k)}[a,b]$ 亦是 Banach 空间.

其次，$\forall x\in C_0^{(k)}[a,b]$，我们定义一算子 T 为

$$[\mathrm{T}(x)](t)=x^{(k)}(t)+p_1(t)\cdot x^{(k-1)}(t)+\cdots+p_{k-1}(t)\cdot x'(t)+p_k(t)\cdot x(t),\ \forall t\in[a,b].$$

易见，$\mathrm{T}(x)\in C[a,b]$，因而 T 乃是由 Banach 空间 $C_0^{(k)}[a,b]$ 到 Banach 空间 $C[a,b]$ 内的线性算子；并且注意到 $p_i(t)(1\leqslant i\leqslant k)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续函数的假设，还可导得

$$\|\mathrm{T}(x)\|_C\leqslant\left(1+\sum_{i=1}^{k}\|p_i\|_C\right)\|x\|_{C_0^{(k)}},\quad\forall x\in C_0^{(k)}[a,b].$$

即 T 仍是一有界算子.

然后，由假设：上面的微分方程及初始条件对任意的元 $y\in C[a,b]$，均存在唯一的元 $x\in C_0^{(k)}[a,b]$，使得 $\mathrm{T}(x)=y$. 从而即知算子 T 的值域 $\mathscr{W}(\mathrm{T})=C[a,b]$，并且算子 T 是 1—1 对应的.

最后，利用上节 Banach 逆算子定理，我们可导出：T 的逆算

子 T^{-1} 也是从 $C[a,b]$ 到 $C_0^{(k)}[a,b]$上的有界线性算子，且是连续算子. 因此，当上面的函数 $y(t)\in C[a,b]$ 作"微小"变动时，相应满足初始条件的微分方程的解 $x=T^{-1}(y)$ 也必然作"微小"的变动，即使得解函数 $x(t)$ 以及各阶导函数 $x'(t), x''(t), \cdots, x^{(k)}(t)$ 均一致地作"微小"的变动. 验毕.

例 4. 设 E 是某些数列所组成的 Fréchet 空间，具有下列性质：

1°. E 中元列均有关系：按范收敛 $\Longrightarrow$ 坐标收敛；

2°. $\forall y=\{\eta_i\}\in E$，无穷元一次联立方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}\xi_k=\eta_i \quad (i=1,2,\cdots) \tag{1}$$

恒有唯一解 $x=\{\xi_k\}\in(s)$（(s)的定义可参看 §1.3 习题 4).
那么，必存在 E 的一列"连续"线性泛函$\{f_k\}$，使得 $\forall y=\{\eta_i\}\in E$，上面的方程组的解 $x=\{\xi_k\}$ 均可由此列泛函给出；即有

$$\xi_k=f_k(y) \quad (k=1,2,\cdots).$$

验. 首先，我们设 $E_1=\{\{\xi_k\}\,|\,x=\{\xi_k\}$ 是上方程组(1)对某一元 $y=\{\eta_i\}\in E$的解$\}$. 那么，由于方程组(1)是一次的，因而可知 E_1 为(s)内一线性子空间. 此外，又由那里的假设条件 2° 我们还知，如果以方程组(1)的对应关系作 E_1 上的一算子 T，

$$T(x)=y=\{\eta_i\}, \ \forall x=\{\xi_k\}\in E_1,$$

那么，T 则为从 E_1 到 E 上的 1—1 对应的线性算子.

其次，我们在 E_1 上定义一"准范"数

$$\|x\|_*=\|x\|_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\|x\|_i}{1+\|x\|_i},$$

其中

$$\|x\|_0=\|T(x)\|_E, \|x\|_i=\sup_{n\geq 1}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k\right| \quad (i=1,2,\cdots);$$

$$\forall x=\{\xi_k\}\in E_1.$$

我们可以证明，空间 E_1 中的元列按上面"准范"数"$\|\cdot\|_*$"亦有关

系：按范收敛$\Longrightarrow$坐标收敛，并且 E_1 按该“准范”数还构成一个 Fréchet 空间(留给读者验证)．

然后，由 E_1 中范数的假设条件，我们容易看出

$$\|T(x)\|_E = \|x\|_0 \leqslant \|x\|_*, \quad \forall x \in E_1.$$

故综合上面的结果可知，T 是由 Fréchet 空间 E_1 到 Fréchet 空间 E 上的 1—1 对应的有界线性算子．这样，由 Banach 逆算子定理则可导出，T 的逆算子 T^{-1} 必为从 E 到 E_1 上的连续线性算子

$$\{\xi_k\} = x = T^{-1}(y), \quad \forall y = \{\eta_i\} \in E.$$

最后，我们令

$$\xi_k = f_k(y), \ \forall y \in E \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

由 T^{-1} 的分配性，显然可以得到 $f_k(k = 1, 2, \cdots)$ 的分配性；而由 T^{-1} 的连续性，我们可知，在空间 E 中如果 $y \to y_0$，那么，在空间 E_1 中(按“准范”数“$\|\cdot\|_*$”)必有

$$x = T^{-1}(y) \to T^{-1}(y_0) = x_0.$$

然而，由“准范”数“$\|\cdot\|_*$”的性质，可导出，当设 $x = \{\xi_k\}$，$x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}$ 时，由上式可得出(坐标收敛)

$$\xi_k \to \xi_k^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

此即当 $y \to y_0$ 时，必有

$$f_k(y) \to f_k(y_0) \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

从而也即证得上面定义的 $\{f_k\}$ 乃是 E 上定义的一列连续线性泛函．验毕．

习　　题

1．试验证本节例 4 中关于 E_1 内定义的准范数的两个性质．

2．如果 $\{f_n\}$ 为定义在第二纲赋 (准) 范线性空间 E 上的一列连续线性泛函，并且极限

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall x \in E$$

均存在．试用闭图象定理证明，此时 f 必亦为 E 上的连续线性线性泛函．

§ 5.4. 关于空间的可数基

在 §1.3 讲述赋范线性空间的可分性时，我们曾经涉及到关于空间的"可数基"的问题，然而，在那里指出的一些关于基（Schauder 基）的性质（例如，与有限维的情况一样，在具有可数基赋范线性空间 E 中，其元对于基 $\{e_k\}$ 的唯一分解式 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ 的各系数 ξ_k 均为 E 的有界线性泛函 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$；在一定的条件下，$\{f_k\}$ 也构成空间 E^* 的一可数基等等），以及可数基存在的较深入的讨论，只能在讲过开映象定理或闭图象定理（从而导出 Banach 逆算子定理）之后才能进行．联系到可数基概念在 Banach 空间的线性方程，在求和法理论以及测度理论等方面均有广泛应用，从这个意义来说，本节同样也可以看做是这两个定理的一个十分成功和有趣的应用．下面，我们讨论空间可数基的存在问题，还要验证 §1.3 所提过的结论．

首先我们给出关于可数基的一个等价命题：

定理 1. 设 E 为一 Banach 空间．那么，为了非零元列 $\{e_k\}$ 构成 E 的一个基，必须且只须其满足条件

(i) $\overline{[\{e_k\}]}=E$（即 $\{e_n\}$ 之线性组合稠于 E）；

(ii) 在 E 中存在一与原范数等价的新范数 $\|\cdot\|_1$，使得 $\forall \xi_1, \xi_2,\cdots,\xi_{n_1},\xi_{n_1+1},\cdots,\xi_{n_2}\in \boldsymbol{K}$ 均有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k\right\|_1\leqslant\left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\|_1 \quad (n_1\leqslant n_2,\ n_1,\ n_2=1,2,\cdots).$$

证 1）"$\Longrightarrow$" 当 $\{e_k\}$ 是 E 的可数基时，由定义显然可知，这时定理的条件(i)是成立的，对于定理的条件(ii)，由于 $\{e_k\}$ 是一个基，因而，$\forall x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$，$\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|\right\}$ 均是一有界数列，从而当在 E 中定义一个新范数

$$\|x\|_1 = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|, \qquad \forall x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in E$$

时，显然可以看出，该范数是满足定理条件(ii)的不等式关系的，并且还有

$$\|x\|_1 \geqslant \|x\|, \ \forall x \in E.$$

其次，我们证明E在范数"$\|\cdot\|_1$"下也构成一个 Banach 空间. 事实上，$\forall \{x_m\} \subset E$，如果有$\|x_{m_1} - x_{m_2}\|_1 \to 0 (m_1, m_2 \to \infty)$，那么，当设$x_m = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(m)} e_k (m = 1, 2, \cdots)$时，便可以导出

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m_1)} e_k - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m_2)} e_k \right\| \leqslant \|x_{m_1} - x_{m_2}\|_1 \to 0$$

$$(m_1, m_2 \to \infty) \ (n = 1, 2, \cdots).$$

从而看出：$\forall k$(自然数)坐标$\{\xi_k^{(m)}\}$均为一 Cauchy 数列，且其必存在极限$\xi_k^{(0)} (k = 1, 2, \cdots)$. 故将上面的关系式两边取极限$m_2 \to \infty$，可导出$\forall n$(自然数)，"一致地"有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m_1)} e_k - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} e_k \right\| \to 0 \qquad (m_1 \to \infty).$$

这样，当令$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(0)} e_k$时，由上式可知$x_0 \in E$且有

$$\|x_m - x_0\|_1 = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} e_k \right\| \to 0 (m \to \infty).$$

也即证得E在范数"$\|\cdot\|_1$"下是完备的.

最后，由以上结果直接应用 Banach 逆算子定理则可导出，上面使E均成为 Banach 空间的两范数"$\|\cdot\|$"与"$\|\cdot\|_1$"是等价的. 因而本定理中条件(ii)的所有结果也都得到了.

2) "$\Longleftarrow$" 首先，我们证明在空间E中，凡能表为$\{e_k\}$的无穷级数形成的元，其表示法必是唯一的. 事实上，如果有E中一元$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k' e_k$，那么，我们有

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi'_k) e_k \right\|_1 = \|\theta\|_1 = 0,$$

从而由定理的条件(ii),可得到

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi'_k) e_k \right\|_1 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi'_k) e_k \right\|_1 = 0$$
$$(n = 1, 2, \cdots).$$

由此,从归纳法显然可以得出 $\xi_k = \xi'_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

其次,我们证明 E 中的元均可表为 $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ 的形式. 为此,由定理的条件(i),$\{e_n\}$ 的线性组合在 E 中是稠的,因而我们只要证明在"$\|\cdot\|_1$"的范数下,上面的形式的元所成的线性空间是完备的就可以了. 然而,这一事实在上面定理的必要性证明中已经证得. 综合以上结果,即导出了空间 E 以 $\{e_k\}$ 为一可数基. 证毕.

推理 1. 设 E 为一 Banach 空间,其内的非零元列 $\{e_k\}$ 有 $\overline{[\{e_k\}]} = E$. 那么,为了$\{e_k\}$构成 E 的一个基必须且只须其满足条件 $\exists \beta \geqslant 1$,使得,$\forall \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_2} \in \boldsymbol{K}$,均有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k e_k \right\| \leqslant \beta \left\| \sum_{k=1}^{n_2} \xi_k e_k \right\| \qquad (n_1 \leqslant n_2, n_1, n_2 = 1, 2, \cdots).$$

推理 2. 如果$\{e_k\}$是 Banach 空间 E 的一可数基,那么,E 中元 x 对于每一个基 e_k 的"坐标" ξ_k,均为 E 上的有界线性泛函,并且一致地有

$$|\xi_k| = |f_k(x)| \leqslant \frac{2\beta}{\|e_k\|} \|x\|, \quad \forall x \in E \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

(其中 β 为某一固定常数).

注 1. 当$\{e_k\}$是 Banach 空间 E 的一可数基时,对 E 的元,我们有下面唯一的表达式:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e_k, \qquad \forall x \in E$$

(其中,泛函列 $\{f_k\} \subset E^*$ 由基$\{e_k\}$所确定,它们两者形成一"双正交组"). 这样 $\forall f \in E^*$,我们有

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)f(e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}[f(e_k)\cdot f_k](x), \quad \forall x \in E.$$

即导出

$$\sum_{k=1}^{n} f(e_k)\cdot f_k \xrightarrow{(*弱)} f \qquad (n\to\infty).$$

注 2. 当$\{e_k\}$为 Banach 空间E的一可数基时．如果定义E上的两列算子为

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k,\ \mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k,\ \ \forall x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in E$$

$$(n = 1, 2, \cdots),$$

那么，由定理及其证明，并注意到范"$\|\cdot\|_1$"的定义及其与原范"$\|\cdot\|$"的等价关系，可导出

$$\|\mathrm{P}_n(x)\| \leqslant \sup_m \left\|\sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k\right\| = \|x\|_1 \leqslant \beta\|x\|$$

及

$$\|\mathrm{R}_n(x)\| = \|x - \mathrm{P}_n(x)\| \leqslant \|x\| + \|\mathrm{P}_n(x)\|$$
$$\leqslant (1+\beta)\|x\|; \qquad \forall x \in E(n = 1, 2, \cdots)$$

（其中，β为某一常数）．从而可知 P_n, $\mathrm{R}_n(n = 1, 2, \cdots)$ 均为E上的有界线性算子，而满足上面关系式的正数$\beta \geqslant 1$的下确界，人们常称之为$\{e_k\}$的"基常数"．

推理 3. 设$\{e_k\}$是 Banach 空间E上的一可数基，$\{f_k\}\subset E^*$为其对应的双正交泛函．那么，为了$\{f_k\}$构成E^*的一个可数基．必须且只须$\forall f \in E^*$，均有

$$\sup\left\{\sum_{k>n} f(\xi_k e_k)\,\Big|\,\left\|\sum_{k>n}\xi_k e_k\right\| \leqslant 1,\ \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k \in E\right\} \to 0$$

$$(n\to\infty).$$

证．1)"$\Longrightarrow$" 设$\{f_k\}$为E^*的一可数基．那么，$\forall f \in E^*$，我们必有唯一的关系式$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$（按$E^*$范数下收敛）．于是，

根据$\{e_k\}$与$\{f_k\}$组成一双正交组，我们可得到

$$\left[\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f_k\right]\left(\sum_{k\geqslant n} \xi_k e_k\right) = 0(n = 2, 3, \cdots); \quad \forall \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in E.$$

从而由

$$\left|f\left(\sum_{k\geqslant n} \xi_k e_k\right)\right| = \left|\left[f - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \rho_k\right]\left(\sum_{k\geqslant n} \xi_k e_k\right)\right|$$

$$\leqslant \left\|f - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f_k\right\| \cdot \left\|\sum_{k\geqslant n} \xi_k e_k\right\|,$$

及$\{f_k\}$为 E^* 中基的假设，可导出

$$\sup \left|f\left(\sum_{k\geqslant n} \xi_k e_k\right)\right| \leqslant \left\|f - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f_k\right\| \to 0 \ (n \to \infty);$$

$$\left\|\sum_{k\geqslant n} \xi_k e_k\right\| \leqslant 1 \ (n = 1, 2, \cdots), \quad \forall \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in E,$$

2) “$\Longleftarrow$” 同样由$\{e_k\}$，$\{f_k\}$是一双正交组，以及$\{e_k\}$是 E 中基的假设，我们容易看出，$\forall x(\neq\theta) \in E$，其必可表为 $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e_k$.

因而可得

$$\left[f - \sum_{k=1}^{n-1} f(e_k) f_k\right](x) = \left[f - \sum_{k=1}^{n-1} f(e_k) f_k\right]\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) f(e_k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(e_k) f_k(x) = \sum_{k\geqslant n} f(e_k) f_k(x)$$

$$= f\left(\sum_{k\geqslant n} f_k(x) e_k\right) \qquad (n = 2, 3, \cdots).$$

而由本节注 2，又有

$$\left\|\sum_{k\geqslant n} f_k(x) e_k\right\| = \|\mathrm{R}_{n-1}(x)\| \leqslant (1 + \beta)\|x\|,$$

故前式可变为

$$\left|\left[f - \sum_{k=1}^{n-1} f(e_k) f_k\right](x)\right| = \left|f\left(\frac{\sum_{k\geqslant n} f_k(x) e_k}{(1 + \beta)\|x\|}\right)\right| (1 + \beta)\|x\|$$

$$= \left|f\left(\sum_{k\geqslant n} \frac{f_k(x)}{(1 + \beta)\|x\|} e_k\right)\right| (1 + \beta)\|x\|,$$

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)e_k \in E \qquad (n=2,3,\cdots) \quad (\forall x \neq \theta)$$

因此综合以上结果,由本推理的假设,便可导出

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n-1} f(e_k)f_k\right\| \leqslant (1+\beta)\sup\left\{\sum_{k>n} f(\xi_k e_k) \,\middle|\, \left\|\sum_{k>n}\xi_k e_k\right\| \leqslant 1,\ \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k \in E\right\} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

即有 $f=\sum_{k=1}^{\infty} f(e_k)f_k$. 导出了 $\{f_k\}$ 亦为 E^* 上的一可数基. 证毕.

我们指出:在任意无穷维的 Banach 空间中,必存在一个包含可数基的无穷维闭线性子空间. 为此,我们先给出一个引理.

引理. 设 E 为任一无穷维赋范线性空间,$E_0 \subset E$ 为其一有限维线性子空间. 那么,$\forall \varepsilon>0$,$\exists x\in E$,使得 $\|x\|=1$,且一致地有

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|, \qquad \forall y\in E_0,\ \lambda\in \boldsymbol{K}.$$

证. 不妨令 $\varepsilon<1$. 那么,首先由 E_0 是有限维线性子空间的假设及 §1.1 的结果,我们可知:E_0 的单位球面必是(自)列紧集,且必存在一有穷"$\frac{\varepsilon}{2}$-网" $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ $\left(\text{即 } \forall y\in E_0, \|y\|=1,\ \exists y_k (1\leqslant k\leqslant m)\right.$ (参看图 5.1),使得 $\left.\|y-y_k\|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

其次由 Hahn-Banach 定理可知,对上述网中每一元 $y_k\in E_0\subset E$(不妨设网中无 θ 元),$\exists f_k\in E^*$,使得

$$\|f_k\|=1,\ f_k(y_k)=1 \qquad (k=1,2,\cdots,m).$$

于是注意到 $E\subset E^{**}$,且由 E 的无穷维性,可知 E^* 亦是无穷维的,因此,$\exists x\in E$,使得 $\|x\|=1$,且恒有

$$f_k(x)=0 \qquad (k=1,2,\cdots,m).$$

最后,我们证明上述的元 x 即为所求的元. 事实上,$\forall \theta\neq y\in E_0$(当 $y=\theta$ 时命题显然成立),$\forall \lambda\in \boldsymbol{K}$,$\exists y_k(1\leqslant k\leqslant m)$,使其满足 $\left\|\frac{y}{\|y\|}-y_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$ 于是,可导出

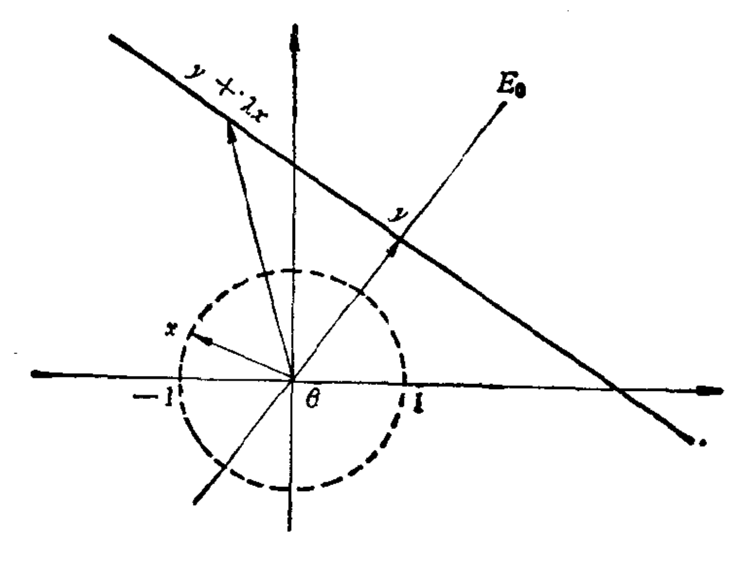


图 5.1

$$
\begin{aligned}
\|y+\lambda x\| &= \|y\|\cdot\left\|\frac{y}{\|y\|}+\frac{\lambda}{\|y\|}\cdot x\right\| \\
&\geqslant \|y\|\left(\left\|y_k+\frac{\lambda}{\|y\|}x\right\|-\left\|\frac{y}{\|y\|}-y_k\right\|\right) \\
&\geqslant \|y\|\left(f_k\left(y_k+\frac{\lambda}{\|y\|}x\right)-\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \|y\|\left(f_k(y_k)-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\|y\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right),
\end{aligned}
$$

即

$$\|y\|\leqslant\frac{2}{2-\varepsilon}\|y+\lambda x\|\leqslant(1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|.$$

证毕.

注 3. 在引理中对元 x 的寻找，其实只要它满足关系式 $\|x\|=1$; $|f_k(x)|<\frac{\varepsilon}{4}\,(k=1,2,\cdots,m)$（而不需要 $f_k(x)=0$）就找到引理所求的 x（请读者自已验证）.

定理 2. 设 E 为任一无穷维的 Banach 空间. 那么其必含有一具可数基的无穷维闭线性子空间.

证. 事实上，由推理 1 的结果，我们只要证明 E 中必含有一非零元列 $\{e_n^0\}$，使其线性组合的范数满足推理 1 的条件，$E_0=\overline{[\{e_n^0\}]}$ 即为所求的闭子空间.

事实上，$\forall\varepsilon>0$，我们先取一正数列 $\{\varepsilon_n\}$，使得

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\leqslant 1+\varepsilon.$$

然后，任取一元 $e_1^0\in E$，$\|e_1^0\|=1$，我们做 E 的子空间 $E_1=[e_1^0]$；并应用上面的引理，我们则知，对正数 ε_1，$\exists e_2^0\in E$，$\|e_2^0\|=1$，使得一致地有

$$\|y\|\leqslant(1+\varepsilon_1)\|y+\xi e_2^0\|,\qquad \forall y\in E_1,\ \xi\in \boldsymbol{K};$$

类似地，由归纳法可知，如已按上面的方法得到了元 $\{e_1^0, e_2^0,\cdots,e_n^0\}$，则当我们做 E 的 n 维线性子空间 $E_n=[\{e_k^0\,|\,1\leqslant k\in n\}]$ 时，同样可知 $\exists e_{n+1}^0\in E$，$\|e_{n+1}^0\|=1$，使得一致地有

$$\|y\|\leqslant(1+\varepsilon_n)\|y+\xi e_{n+1}^0\|,\ \forall y\in[\{e_k^0|_{1\leqslant k\leqslant n}\}],\ \xi\in\boldsymbol{K}.$$

这样，$\forall \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_1},\cdots,\xi_{n_2}\in\boldsymbol{K}$，可导出

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k^0\right\|\leqslant\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\cdot\left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k^0\right\|$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\cdot\left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k^0\right\|\quad(n_1\leqslant n_2,\ n_1,n_2=1,2,\cdots).$$

从而由推理 2 可直接看出，Banach 空间 $E_0=\overline{[\{e_k^0\}]}$（$E$ 的闭线性子空间）即以 $\{e_k^0\}$ 为一个基，此即定理所求. 证毕.

我们注意到本节注 3，由定理 2 还可导出一个有趣的推论：

推理. 设 $\{x_n\}$ 为一无穷维的 Banach 空间 E 中之元列，其满足条件：

(i) $\exists\varepsilon_0>0$，使一致有 $\|x_n\|\geqslant\varepsilon_0>0$ $(n=1,2,\cdots)$；

(ii) $x_n\underset{(\text{弱})}{\longrightarrow}\theta$ $(n\to\infty)$，

那么，在 $\{x_n\}$ 中必有一子列 $\{x_{n_k}\}$，使其为 E 中闭线性子空间 $\overline{[\{x_{n_k}\}]}$ 的一可数基.

证. 事实上，由 $x_n\underset{(\text{弱})}{\longrightarrow}\theta$ $(n\to\infty)$ 的假设，及引理的证明中看出，对于由元 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$（网）所确定的泛函 $\{f_k|_{1\leqslant k\leqslant m}\}\subset E^*$，能够取出一元 $x_{n_0}\in\{x_n\}$，使其均满足

$$|f_k(x_{n_0})|<\frac{\varepsilon}{4}\|x_{n_0}\|\qquad(k=1,2,\cdots,m).$$

从而由注 3 则知，引理的结论当换那里的 E 为元列 $\{x_n\}$ 时亦是成立的.

于是，类似定理 2 的证明方法，我们就可直接由定理 1 的推理 2 导出本处的结论. 证毕.

下面，我们再给出几个（涉及到共轭空间）关于基存在的判别性命题：

定理 3. 设 E 为一 Banach 空间，$\{e_k\}\subset E$. 那么，如果 $\forall x \in E$，$\exists$（唯一的）$\{\xi_k\}\subset \boldsymbol{K}$，使得

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \xrightarrow[(\text{弱})]{} x \quad (n\to\infty), \tag{1}$$

则 $\{e_k\}$ 必构成 E 的一个基.

证. 首先，由式(1)，我们能将 E 中的元 x 与那里的数列 $\{\xi_k\}$ 一一对应. 设上述数列 $y=\{\xi_k\}$ 的全体所组成的集为 E_1，则其显然构成一线性空间，并且由共鸣定理，及弱收敛关系（见 §4.5 定理 1）还可导出 $\forall\{\xi_k\}\in E_1$，数列 $\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|\right\}$ 有界.

于是，我们就可在 E_1 中定义范数

$$\|y\|_1=\|\{\xi_k\}\|_1=\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|, \qquad \forall y=\{\xi_k\}\in E_1.$$

完全与定理 1 的证明方法类似，我们可以验证，此时 E_1 在上面范数下亦构成一个 Banach 空间，并当定义 E_1 上的算子 T 为

$$x=\mathrm{T}(y), \qquad \forall y=\{\xi_k\}\in E_1$$

时，由弱极限元的性质及1可得

$$\|\mathrm{T}(y)\|=\|x\|\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|\leqslant\|y\|_1, \quad \forall y\in E_1.$$

从而不难看出 T 为从 Banach 空间 E_1 到 Banach 空间 E 上的一一对应的有界线性算子，因此由 Banach 逆算子定理（§5.2 推理 3）可知，存在一从 E 到 E_1 上的有界逆线性算子 T^{-1}，

$$\mathrm{T}^{-1}(x)=y, \qquad \forall x\in E.$$

由上面的不等式，可导出

$$\|x\| \leqslant \|y\|_1 \leqslant \|T^{-1}\| \|x\|, \qquad \forall y = \{\xi_k\} \in E_1.$$

最后，根据 E_1 中范数的定义可导出 $\forall \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_2} \in \boldsymbol{K}$，均有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k e_k \right\| \leqslant \left\| (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1}) \right\|_1 \leqslant \|(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_2})\|_1$$

$$\leqslant \|T^{-1}\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n_2} \xi_k e_k \right\| \quad (n_1 \leqslant n_2, n_1, n_2 = 1, 2, \cdots).$$

并且，从分隔性定理导出的强弱收敛关系（§4.5 定理 4)，我们还知，由上面的假设 (1) 可以导出 $\{e_n\}$ 的线性组合将是稠于 E 的，即有 $\overline{[\{e_n\}]} = E$. 这样，由定理 1 的推理 1 可直接导出 E 是以 $\{e_n\}$ 为一可数基的. 证毕.

由上面定理 3，我们容易得到一个推理.

推理 1. 设 E 为一 Banach 空间，$\{e_n\}$ 为 E 中一线性无关元列，$\{f_n\}$ 为 E^* 中一泛函列，那么，如果对于任意泛函 $f \in E^*$，均有

$$\sum_{k=1}^{n} f(e_k) f_k \xrightarrow{\text{“}*\text{弱”}} f \qquad (n \to \infty),$$

则 $\{e_n\}$ 必构成 E 的一个基.

证. 事实上，由假设可知

$$\left[\sum_{k=1}^{n} f(e_k) f_k \right](x) = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) \cdot f_k(x) \to f(x) \quad (n \to \infty);$$

$$\forall f \in E^*, \quad x \in E.$$

即有

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k \xrightarrow[(\text{弱})]{} x, \qquad \forall x \in E.$$

因此，由定理 3 及 $\{e_n\}$ 假设不难导出本推理结论. 证毕.

注意到共鸣定理或本节注 2. 我们还可得到下面的推理:

推理 2. 设 E 为一 Banach 空间，元列 $\{e_k\}$ 的线性组合“弱”稠于 E，并与 $\{f_k\} \subset E^*$ 构成一双正交组. 那么为了元列 $\{e_k\}$ 是 E 中一个基，必须且只须 $\exists \beta > 0$，使得一致地有

$$\|P_n(x)\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k\right\| \leqslant \beta\|x\|, \quad \forall x \in E\ (n = 1, 2, \cdots).$$

证. 必要性是显然的. 至于充分性，首先我们根据 $\{e_n\}$ 的假设(同样由 §4.5 结果)可以导出，$\overline{[\{e_n\}]} = E$. 其次,由上面不等式的假设,我们还知 $\forall \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_2} \in \boldsymbol{K}$，必有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_1} \xi_k e_k\right\| = \left\|P_{n_1}\left(\sum_{k=1}^{n_2} \xi_k e_k\right)\right\|$$

$$\leqslant \beta\left\|\sum_{k=1}^{n_2} \xi_k e_k\right\|(n_2 > n_1, n_1, n_2 = 1, 2, \cdots).$$

因此直接由定理 1 的推理 1 就可得出$\{e_k\}$为 E 的基的结论.证毕.

推理 3. 如果 E 为一自反空间，那么，在推理 2 的假设下，只要 $\{e_k\}$ 是空间 E 的一个基,则 $\{f_k\}$ 就是空间 E^* 的一个基.

类似地，由定理 3 的证明方法,我们还可得到下面关于 E^* 具有可数基的一个推论(它需要用到 § 3.3 习题中关于 E^* 中集是"正则闭"的概念):

推理 4. 如果 $\{e_n\}$ 为 Banach 空间 E 中的一个基,$\{f_n\}\subset E^*$ 为其相应的双正交泛函,那么,当 $\mathscr{F} = \overline{[\{f_n\}]}$ 是 E^* 一"正则闭"集时则 $\{f_n\}$ 就亦构成 E^* 的一个基.

其证明请读者完成.

下面,我们再给出从一个基判断出另一个基的命题:

定理 4. 设 E 为 Banach 空间，$\{e_k\}$ 为 E 的一个基，$\{f_k\}\subset E^*$ 为其对应的双正交泛函. 那么,当元列 $\{e'_k\}$ 线性组合稠于E,且满

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e'_k\|\|f_k\| = \varepsilon_0 < 1$$

足条件时，$\{e'_k\}$ 也是空间 E 的一个基.

证. 首先从 $\{e_k\}, \{f_k\}$ 的双正交性可导出 $\forall \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_1} \in \boldsymbol{K}$，均有

$$|\xi_k| = |f_k(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_{n_1} e_{n_1})| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i e_i\right\| \cdot \|f_k\|$$
$$(k \leqslant n_1) \quad (n_1 = 1, 2, \cdots).$$

从而由定理的假设可导得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k'\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k\right\| + \sum_{k=1}^{n_1}\left\|\xi_k(e_k - e_k')\right\|$$

$$\leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k\right\| + \sum_{k=1}^{n_1}\left\|\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i e_i\right\|\cdot\|f_k\|\|e_k - e_k'\|$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k\right\|\left(1 + \sum_{k=1}^{n_1}\|f_k\|\cdot\|e_k - e_k'\|\right)$$

$$\leqslant (1+\varepsilon_0)\left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k\right\|(n_1 = 1, 2, \cdots).$$

此外,还可导得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k'\right\| \geqslant \left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\| - \left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k(e_k - e_k')\right\|$$

$$\geqslant \left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\| - \sum_{k=1}^{n_2}|\xi_k|\,\|e_k - e_k'\|$$

$$\geqslant \left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\| - \sum_{k=1}^{n_2}\left\|\sum_{i=1}^{n_2}\xi_i e_i\right\|\cdot\|f_k\|\cdot\|e_k - e_k'\|$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\|\left(1 - \sum_{k=1}^{n_2}\|f_k\|\|e_k - e_k'\|\right)$$

$$\geqslant \left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\|\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|\|e_k - e_k'\|\right)$$

$$= (1-\varepsilon_0)\left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\| \qquad (n_2 = 1, 2, \cdots).$$

因此由 $\{e_k\}$ 是 E 的一可数基, 及定理 1 的推理 1 的必要性命题我们可知 $\exists\beta > 0$ 一致有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k\right\| \leqslant \beta\left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k\right\| \qquad (n_2 > n_1,\ n_1,\ n_2 = 1, 2, \cdots).$$

最后,综合上面三个不等式可导出

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k'\right\| \leqslant \beta\left(\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}\right)\left\|\sum_{k=1}^{n_2}\xi_k e_k'\right\| \quad (n_2 > n_1,\ n_1,\ n_2 = 1, 2, \cdots).$$

注意到定理 1 的推理 1 的充分性命题, 可知 $\{e_k'\}$ 亦为 E 的一个

基．证毕．

关于可数基的内容是十分丰富的，这里不可能详细介绍．

注 4．在§1.3中我们曾经指出，一个赋范线性空间，如果其具有可数基则其一定是可分的．然而其逆命题是否正确呢？也就是说对一个可分的赋范空间而言是否一定存在可数基呢？这是一个自从提出后持续了四十多年一直没有解决的问题．直到1973年，这个问题才被 P. Enflo 作了否定的回答．Enflo 指出：的确存在一可分的自反空间，它是不具有可数基的．由于论述这个结论还需要牵涉许多知识因此我们这里就不介绍了，有兴趣的读者可以看看文献[53]．

习　　题

1．试证明本节定理1的推理1．

2．试证明本节定理1的推理2．

3．设$\{e_k\}$为E的一可数基，$\{f_k\}\subset E^*$为与$\{e_k\}$对应的双正交组试证明：为了$\{f_k\}$也构成E^*的一可数基，必须且只须$\forall f\in E^*$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(e_k)f_k$均在$E^*$内收敛．．

4．试证明本节注3．

5．试证明本节定理3的推理3．

6．试证明本节定理3的推理4．

§5.5. 逆算子 T^{-1} 与 $(T^*)^{-1}$ 的存在性

本节我们在赋范线性空间里讨论线性算子T^{-1}及T^*的有界逆算子的存在定理，与§5.2不同的是，在这里我们经常要涉及到算子（T^*或T）值域的性质，因此，有时人们也将下面的一些定理称之为“值域定理”．

首先，我们给出关于T^{-1}存在和有界的几个命题：

定理 1．设T为从赋范线性空间E到E_1内的线性算子，且有$\mathscr{D}(T)=E$．那么，只要$\mathscr{W}(T^*)$在E^*中是“*弱”稠密的，则T^{-1}

必存在.

证. 反之,如果 T^{-1} 不存在,由 T 的分配性则知,$\exists x_0 \in E$, $x_0 \neq \theta$,使得 $T(x_0) = \theta$. 于是,注意到共轭算子的定义,可导出

$$[T^*(g)](x_0) = g(T(x_0)) = 0, \quad \forall g \in \mathscr{D}(T^*).$$

因而,(注意 $x_0 \neq \theta$ 的取法)与 $\mathscr{W}(T^*)$ 在 E^* 中是"*弱"稠的假设矛盾. 证毕.

定理 2. 设 T 与定理 1 假设相同. 那么,为了 T^{-1} 是连续的,必须且只须 $\mathscr{W}(T^*) = E^*$.

证. 1)"⇒" 如果 T^{-1} 存在,并且是连续的线性算子,那么,$\forall f \in E^*$,由

$$g_0(y) = f(T^{-1}(y)), \quad \forall y \in \mathscr{W}(T),$$

可得到定义在 $\mathscr{W}(T) \subset E_1$ 上的有界线性泛函. 从而由 Hahn-Banach 定理,便可以得到上述 g_0 的一"保范延拓"泛函 $g \in E_1^*$(g 不必是唯一的). 且由

$$g[T(x)] = g_0[T(x)] = f[T^{-1}(T(x))] = f(x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(T),$$

我们还可导出 $g \in \mathscr{D}(T^*)$ 及 $T^*(g) = f$. 因而从 f 的任意性便导出了 $\mathscr{W}(T^*) = E^*$.

2)"⇐" 由定理假设 $\mathscr{W}(T^*) = E^*$,及定理 1,我们可知,T^{-1} 是存在的,且 $\forall f \in E^*$,$\exists$(唯一的)$g \in E_1^*$,使得 $T^*(g) = f_0$ 这样 $\forall y \in \mathscr{W}(T)$,$\|y\| \leqslant 1$,注意到 f, g 的关系式可导出

$$\begin{aligned} |f(T^{-1}(y))| &= |[T^*(g)](T^{-1}(y))| \\ &= |g(T(T^{-1}(y)))| \\ &= |g(y)| \leqslant \|g\|, \quad \forall f \in E^*. \end{aligned}$$

因而由共鸣定理可得到

$$\sup\{\|T^{-1}(y)\| \mid \|y\| \leqslant 1, \quad y \in \mathscr{W}(T)\} < \infty.$$

即 T^{-1} 是有界连续的线性算子. 证毕.

定理 3. 设 T 是从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子,且有 $\overline{\mathscr{D}(T)} = E$. 那么,为了 $(T^*)^{-1}$ 存在,必须且只须有 $\overline{\mathscr{W}(T)} = E_1$.

证. 1)"⇒" 反之，如果 $y_1 \bar{\in} \overline{\mathscr{W}(T)}$，$y_1 \in E_1$，那么，注意到 $\overline{\mathscr{W}(T)}$ 为 E_1 内的一闭线性子空间. 因此从分隔性定理(§3.3 定理 1)可知 $\exists g_1 \in E_1^*$，使得

$$g_1(x_1) = 1; \quad g_1(y) = 0, \qquad \forall y \in \overline{\mathscr{W}(T)}.$$

于是由上式可导出

$$g_1[T(x)] = 0, \qquad \forall x \in \mathscr{D}(T).$$

从而由共轭算子的定义，我们即知

$$g_1 \in \mathscr{D}(T^*), \quad T^*(g_1) = 0 \ (E \text{ 上之“零泛函”}).$$

并且由于此时设 (T^*) 是存在线性逆算子 $(T^*)^{-1}$ 的，故(从一一对应关系)可导出 $g_1=0$(零泛函). 此显然与上面 g_1 的取法矛盾.

2) "⇐" 事实上，如果有一泛函 $g_0 \in E_1^*$，使得

$$T^*(g_0) = 0 \ (E \text{ 之上“零泛函”}),$$

那么，从共轭算子的定义，可导出

$$g_0[T(x)] = [T^*(g_0)](x) = 0, \qquad \forall x \in \mathscr{D}(T).$$

即

$$g_0(y) = 0, \qquad \forall y = \mathscr{W}(T).$$

最后，注意到定理的假设条件 $\overline{\mathscr{W}(T)} = E_1$ 以及 g_0 为 E_1 上的连续线性泛函，我们可导出 $g_0 = 0$(零泛函). 于是，由 T^* 的分配性及所得结果便导出其逆算子 $(T^*)^{-1}$ 是存在的. 证毕.

定理 4. 如果 T 同定理 3 中所设，那么，当 E_1 为"第二纲"赋范线性空间且有 $\mathscr{W}(T) = E_1$ 时，则$(T^*)^{-1}$(存在且)为连续线性算子.

证. 首先由定理 3 可知 $(T)^{*-1}$是存在的. 下面，我们就来证明 $(T^*)^{-1}$ 的有界性. 反之，如果此结论不真，那么由前面(§2.1 定理 2 的推理 3)关于逆算子有界性的命题，可知，$\exists\{g_n\}\subset E_1^*$，使得

$$\|g_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots);$$
$$\|T^*(g_n)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

那么，当我们定义一元列(注意线性算子 $(T^*)^{-1}$ 的存在性，从而由 $g_n \neq \theta$，可知 $T^*(g_n) \neq \theta$)

$$g_n' = \frac{g_n}{\|T^*(g_n)\|} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

时，容易看出

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n'\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\|g_n\|}{\|T^*(g_n)\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|T^*(g_n)\|} = \infty. \qquad (1)$$

另外，由定理假设 $E_1 = \mathscr{W}(T)$ 可知，$\forall\ y_0 \in E_1$，$\exists x_0 \in E$，使得 $y_0 = T(x_0)$，这样我们又可得到

$$|g_n'(y_0)| = |g_n'(T(x_0))| = |[T^* g_n'](x_0)|$$
$$\leqslant \|T^*(g_n')\| \|x_0\| = \|x_0\|$$
$$(n = 1, 2, \cdots);$$

即导出关系式

$$\sup_n |g_n'(y)| < +\infty, \quad \forall y \in E_1.$$

最后，由空间 E_1 是第二纲的假设及共鸣定理，可推得 $\{\|g_n'\|\}$ 是一有界的数列，其显然与式(1)矛盾. 证毕.

为了讨论定理 4 的逆命题，我们需要先来给出一个引理：

引理. 如果 T 同定理 3 中所设，那么，如果 $(T^*)^{-1}$（存在且）为连续线性算子，则对 E 中任一闭"原心球" $\bar{S}(\varepsilon)$，集 $\overline{T[\bar{S}(\varepsilon) \cap \mathscr{D}(T)]}$ 必稠于 E_1 中某一"原心球" $S_1(\delta)$.

证. 反之，如果 E 中有某一"原心球" $S(\varepsilon_0)$，其使得集 $S(\varepsilon_0) \cap \mathscr{D}(T)$ 经 T 映象后的"像"在 E_1 中的任意"原心球" $\bar{S}_1\left(\frac{1}{n}\right)(n = 1, 2, \cdots)$ 均不稠，那么，在E_1中有这样的一个点列 $\{y_0^{(n)}\}$ 存在，其使得每个元 $y_0^{(n)} \notin \overline{T[\bar{S}(\varepsilon_0) \cap \mathscr{D}(T)]}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，且有

$$y_0^{(n)} \to \theta \quad (n \to \infty).$$

于是，如果把空间 E_1 视为一"实"的线性空间时，为区别起见，我们记为 $E_1^{\wedge}$（当然，$E_1^{\wedge}$ 仍是由 E_1 中的所有元所组成的），那么，由集 $\overline{T[\bar{S}(\varepsilon)_0 \cap \mathscr{D}(T)]}$ 乃是空间 $E_1^{\wedge}$ 内的一闭凸集及 § 3.3 的 Ascoli-Mazur 定理可知，必定存在 $E_1^{\wedge}$ 上的一列"实"有界线性泛函 $\{g_n^{\wedge}\} \subset (E_1^{\wedge})^*$，使其满足

$$\sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon_0} g_n^{\wedge}[T(x)] < g_n^{\wedge}(y_0^{(n)}),$$
$$\forall x \in \mathscr{D}(T) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

而当$|g_n^{\wedge}(y_0^{(n)})| \leqslant \|g_n^{\wedge}\|_{E_1^{\wedge}} \cdot \|y_0^{(n)}\|$时，我们可得到

$$\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_0} g_n^{\wedge}[\mathrm{T}(x)] < \|g_n^{\wedge}\|_{E_1^{\wedge}} \cdot \|y_0^{(n)}\|,$$

$$\forall x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

现做泛函列

$$g_n(x) = g_n^{\wedge}(x) - i g_n^{\wedge}(ix) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由 § 3.1 定理 2 的证明，我们可知，上面的 $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 均是原复空间 E_1 上的“复”分配泛函，并且，$\forall\ y \in E_1, \|y\| \leqslant 1$，令 $\theta = \arg f_n(y)$ 时，我们有

$$\|g_n\| = \sup_{\|y\|=1} |g_n(y)| = \sup_{\|y\|=1} e^{-i\theta} g_n(y) = \sup_{\|y\|=1} g_n(e^{-i\theta} y)$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \mathrm{Re}\, g_n(e^{-i\theta} \cdot y) = \sup_{\|y\|=1} g_n^{\wedge}(e^{-i\theta} \cdot y)$$

$$= \sup_{\|y\|=1} |g_n^{\wedge}(y)|.$$

即导出

$$\|g_n\| = \|g_n^{\wedge}\|_{E_0^{\wedge}} \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

从而得知上面的泛函列 $\{g_n\} \subset E_1^*$.

类似地用上面的方法我们还可推得

$$\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_0} |g_n[\mathrm{T}(x)]| = \sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_0} g_n^{\wedge}[\mathrm{T}(x)], \quad \forall x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}).$$

于是，由式 (2) 及 (3) 可导出

$$\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_0} |g_n[\mathrm{T}(x)]| < \|g_n\| \cdot \|y_0^{(n)}\|,$$

$$\forall x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{4}$$

因此，注意到共轭算子的定义及上面的结果可导出 $\{g_n\} \subset \mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$，且有

$$\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_0} |g_n[\mathrm{T}(x)]| = \sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_0} |[\mathrm{T}^*(g_n)](x)| = \varepsilon_0 \|\mathrm{T}^*(g_n)\|,$$

$$\forall\ x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \quad (n = 1, 2, \cdots);$$

联系到式 (4)，可导出

$$\|\mathrm{T}^*(g_n)\| < \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \|y_0^{(n)}\|\right) \|g_n\| \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

最后，由 $\{y_0^{(n)}\}$ 趋于 θ 元的假设及 § 2.1 的结果同样可知，$(\mathrm{T}^*)^{-1}$

不是有界的,从而也不会是连续线性算子. 其与定理的假设矛盾. 证毕.

有了上面的引理，我们就可以给出定理 4 的逆命题在一定条件下成立的结果如下:

定理 5. 如果 T 同定理 4 所设，且为一闭算子，那么，当 E 是 Banach 空间，且 $(T^*)^{-1}$ (存在并) 为连续算子时，则必有

$$\mathscr{W}(T) = E_1.$$

证. 首先，我们取空间 E 中一闭"原心球"列 $\left\{\bar{S}\left(\frac{\varepsilon_0}{2^n}\right)\right\}$. 那么，由引理便可找到空间 E_1 中的一球列 $\{S_1(\delta_n)\}$，使得

$$\delta_n \downarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

及

$$S_1(\delta_n) \subset \overline{T\left[\bar{S}\left(\frac{\varepsilon_0}{2^n}\right) \cap \mathscr{D}(T)\right]} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是，与 § 5.2 的开映象定理的证明方法一样，由所得关系式，利用空间 E 的完备性以及线性算子 T 的闭性，可导得

$$S_1(\delta_1) \subset T[\bar{S}(\varepsilon_0) \cap \mathscr{D}(T)].$$

因而，注意到算子 T 的分配性，我们可导出 $\mathscr{W}(T) = E_1$. 证毕.

由定理 2，定理 4，定理 5 及开映象定理之推论，我们不难直接得到下面的推理:

推理. 设 T 是由 Banach 空间 E 到"第二纲"赋范线性空间 E_1 内的闭线性算子，那么，下面四个条件是相互等价的:

(i) T 把空间 E 一一对应地映象到空间 E_1 上;

(ii) T 与 T^* 均存在连续逆算子 T^{-1} 与 $(T^*)^{-1}$;

(iii) $\mathscr{W}(T) = E_1$ 及 $\mathscr{W}(T^*) = E^*$;

(iv) T^* 把空间 E_1^* 一一对应地映象到空间 E^* 上.

其证明留给读者完成. 下面讨论 T^{-1} 与 $(T^*)^{-1}$ 的关系.

定理 6. 设 T 是从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子，且有 $\overline{\mathscr{D}(T)} = E$ 及 $\overline{\mathscr{W}(T)} = E_1$. 那么，如果 T^{-1} 存在，则 $(T^*)^{-1}$ 也存在，并且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$；此外两个逆算子 T^{-1} 与 $(T^*)^{-1}$ 的连续性是等价的.

证. 我们先证明定理的前半段命题. 首先，由 $\mathscr{D}(T^{-1})=\mathscr{W}(T)$在$E_1$中稠，故知$(T^{-1})^*$是存在的，并且由定理3，知$(T^*)^{-1}$也是存在的. 这两算子是否互等呢? 事实上，$\forall y\in\mathscr{W}(T)$，有

$$[T^*(g)](T^{-1}(y))=g\{T[T^{-1}(y)]\}=g(y),\qquad \forall g\in\mathscr{D}(T^*);$$

从而导出

$$T^*(g)\in\mathscr{D}[(T^{-1})^*],\quad (T^{-1})^*[T^*(g)]=g,\qquad \forall g\in\mathscr{D}(T^*).$$

即得到

$$\mathscr{D}[(T^*)^{-1}]=\mathscr{W}(T^*)\subset\mathscr{D}[(T^{-1})^*]$$

和

$$(T^{-1})^*[T^*(g)]=g=[(T^*)^{-1}](T^*(g)),\qquad \forall T^*(g)\in\mathscr{D}[(T^*)^{-1}].$$

由此则知：算子$(T^{-1})^*$是$(T^*)^{-1}$的扩张. 而另一方面，$\forall x\in\mathscr{D}(T)$，我们还有

$$[(T^{-1})^*(f)](T(x))=f\{T^{-1}[T(x)]\}=f(x),\qquad \forall f\in\mathscr{D}[(T^{-1})^*];$$

由此可得$(T^{-1})^*f\in\mathscr{D}(T^*)$. 即导出

$$\mathscr{D}[(T^{-1})^*]\subset\mathscr{W}(T^*)=\mathscr{D}[(T^*)^{-1}]\tag{5}$$

和

$$f(x)=[(T^{-1})^*(f)](T(x))=\{T^*[(T^{-1})^*(f)]\}(x),\qquad \forall x\in\mathscr{D}(T),\ f\in\mathscr{D}[(T^{-1})^*],$$

由上面后一式又可得到

$$[(T^*)^{-1}(f)](x)=[(T^{-1}(^*(f)](x),\qquad \forall x\in\mathscr{D}(T),\ f\in\mathscr{D}[(T^{-1})^*].$$

注意到$\mathscr{D}(T)$稠于E的假设，可导出

$$(T^*)^{-1}(f)=(T^{-1})^*(f),\qquad \forall f\in\mathscr{D}[(T^{-1})^*],\tag{6}$$

由式(5)及(6)，我们可知算子$(T^*)^{-1}$是$(T^{-1})^*$的扩张. 因此，将上两结果综合起来，便证得$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

至于定理的后半段结论，其证明是容易的. 事实上，如果T^{-1}

有界，则由（§ 3.5 定理 1 的推理）的结果知其共轭算子 $(T^{-1})^*$ 是有界的，且由上段结果可知 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ 亦是有界的. 反过来，如果已知 $(T^*)^{-1}$ 是有界的，那么我们根据上段的结果可知 $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ 是有界的，从而同样由 § 3.5 的同一结果可导出 T^{-1} 也是有界的. 最后，由于赋范线性空间中线性算子的有界性与连续性是等价的，因而立即得出定理所需的结论. 证毕.

定理 7. 设 T 是从 Banach 空间 E 内到 E_1 内的一个"闭"线性算子，且 $\overline{\mathscr{D}(T)} = E$. 那么，为了算子方程 $T(x) = y$ 对一切 $y \in E_1$ 均有唯一解，必须且只须对应的算子方程 $T^*(g) = f$ 对一切 $f \in E^*$ 均有唯一解. 并且，T^{-1} 和 $(T^*)^{-1}$ 均是连续的.

证 事实上，如果 T^{-1} 存在，且 $\mathscr{W}(T) = E_1$. 那么由开映象定理可导出 T^{-1} 的连续性，再利用本节定理 6 的结果，还可知 $(T^*)^{-1}$ 存在并为 E^* 上的连续算子.

反过来，如果 $(T^*)^{-1}$ 存在，且 $\mathscr{W}(T^*) = E^*$，那么，一方面根据开映象定理，我们可以导出 $(T^*)^{-1}$ 的连续性；另一方面由上面的定理 3，我们可知 $\overline{\mathscr{W}(T)} = E_1$. 而由上面的定理 1，我们可知 T^{-1} 是存在的. 因此，由定理 6 可导出 T^{-1} 在 $\mathscr{W}(T)$ 上是连续的. 最后，注意到 T 是闭线性算子的假设，由 §5.1 注 2 可知 T^{-1} 也是闭的. 同样由该节的结果，T^{-1} 的闭性与连续性，以及空间 E 的完备性，可导出其定义域 $\mathscr{W}(T)$ 是 E_1 中的闭集.

综合上面的结论，便导出了 $\mathscr{W}(T) = E_1$. 证毕.

附　　录

这里，我们再引入一个描述算子 T 和 T^* 的值域之间关系的一个定理. 我们先给出一个定义.

定义. 称点 $x_0 \in E$ 为定义在 E 上的算子 T 的零点是指 $T(x_0) = \theta$. T 的零点集以后均用 $\mathscr{N}(T)$ 表示，即

$$\mathscr{N}(T) = \{x \mid T(x) = \theta, x \in E\}.$$

在集 $\mathscr{N}(T)$ 上恒为零的有界线性泛函全体记为 $\mathscr{N}(T)^{\perp}$，即

$$\mathscr{N}(\mathrm{T})^{\perp} = \{f | f[\mathscr{N}(\mathrm{T})] = 0, f \in E^*\}.$$

类似地，我们可以定义 T^* 的零点集 $\mathscr{N}(\mathrm{T}^*)(\subset E_1^*)$ 及 E_1 内的集 $\mathscr{N}(\mathrm{T}^*)^{\perp}$ 如下：

$$\mathscr{N}(\mathrm{T}^*) = \{g | \mathrm{T}^*(g) = 0\,(\text{零泛函}), g \in E_1^*\},$$

$$\mathscr{N}(\mathrm{T}^*)^{\perp} = \{y | f(y) = 0[\forall f \in \mathscr{N}(\mathrm{T}^*)], y \in E_1\}.$$

定理 8. 设 T 是由 Banach 空间 E 到"第二纲"赋范线性空间 E_1 中的有界线性算子. 那么，有下面命题成立:

(i) 如果 $\mathscr{W}(\mathrm{T}) = E_1$，则 $\mathscr{W}(\mathrm{T}^*) = \mathscr{N}(\mathrm{T})^{\perp}$;

(ii) 如果 $\mathscr{W}(\mathrm{T}^*) = E^*$，则 $\mathscr{W}(\mathrm{T}) = \mathscr{N}(\mathrm{T}^*)^{\perp}$.

证. 1) 我们分两方面证明 (i) (注意在定理假设条件下有 $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*) = E_1^*$):

i. $\mathrm{T}^*(E_1^*) \subset \mathscr{N}(\mathrm{T})^{\perp}$. 因为 $\forall f \in \mathrm{T}^*(E_1^*)$，$\exists g \in E_1^*$，使得 $f = \mathrm{T}^*(g)$; 因此，可导出

$$f(x) = [\mathrm{T}^*(g)](x) = g(\mathrm{T}(x)) = g(\theta) = 0, \quad \forall x \in \mathscr{N}(\mathrm{T}).$$

即 $f \in \mathscr{N}(\mathrm{T})^{\perp}$.

ii. $\mathscr{N}(\mathrm{T})^{\perp} \subset \mathrm{T}^*(E_1^*)$. 首先，$\forall f_0 \in \mathscr{N}(\mathrm{T})^{\perp}$，从定义有 $f_0 \in E^*$ 及

$$f_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathscr{N}(\mathrm{T}).$$

其次，由定理假设 $\mathscr{W}(\mathrm{T}) = E_1$，知 $\forall y \in E_1 \exists x_y \in E$，使得 $y = \mathrm{T}(x_y)$，然后，我们在空间 E_1 上定义泛函 g，使得

$$g(y) = f_0(x_y), \quad \forall y \in E_1. \tag{7}$$

那么，上面定义的泛函是一意确定的，因为如果对同一元 y，有两个元 x_1，x_2 与之对应，使得有 $y = \mathrm{T}(x_1) = \mathrm{T}(x_2)$，那么，由元 $x_1 - x_2 \in \mathscr{N}(\mathrm{T})$ 及泛函 $f_0 \in \mathscr{N}(\mathrm{T})^{\perp}$ 的假设，可导出 $f_0(x_1 - x_2) = 0$，也即有 $f_0(x_1) = f_0(x_2)$. 其三，由于 T 是定义于全空间 E 上的有界线性算子，故由 §5.1 定理 2 可知 T 亦是闭线性算子. 由 $\mathscr{W}(\mathrm{T}) = E_1$ 是第二纲集的假设及开映像定理可知 T 必是开算子，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

$$\bar{S}_1(\delta) \subset \mathrm{T}[\bar{S}(\varepsilon)]. \tag{8}$$

这样，如果元列 $\{y_n\} \subset E_1$，使得 $y_n \to \theta$ $(n \to \infty)$，那么，$\exists N$ (自然数)，使得当 $n \geqslant N$ 时，有 $y_n \in \bar{S}_1(\delta)$. 从而由定理假设 $E_1 = \mathrm{T}(E)$ 及式 (8)，可知，$\exists \{x_n\} \subset E$，使得

$$y_n = \mathrm{T}(x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots);$$

且当 $n \geqslant N$ 时，有 $\|x_n\| \leqslant \varepsilon$. 由此也即导出

$$y_n \to \theta \Rightarrow x_{y_n} = x_n \to \theta \quad (n \to \infty).$$

因而，由式(7)我们可导出：$\forall \{y_n\}\subset E_1$，只要有 $y_n\to\theta(n\to\infty)$ 就必有

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} f_0(x_n) = f_0(\lim_{n\to\infty} x_n) = 0.$$

也即导出 g 为 E_1 上的连续线性泛函. 因而，再回到式 (7) 便有

$$g[\mathrm{T}(x_y)] = g(y) = f_0(x_y), \quad \forall x_y \in E.$$

即有 $g\in\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$ 及 $\mathrm{T}^*(g)=f_0$，从而导出了 $f_0\in \mathrm{T}^*(E_1^*)$.

2) 我们亦分两方面来证明 (ii).

i. $\mathrm{T}(E)\subset\mathscr{N}(\mathrm{T}^*)^\perp$. 其证明方法类似上面1)中的 i .

ii. $\mathscr{N}(\mathrm{T}^*)^\perp\subset \mathrm{T}(E)$. 首先，由假设 $\mathscr{W}(\mathrm{T}^*)=E^*$ 及定理 2，可知 T^{-1} 是连续的. 另外，由 T 为全空间上的有界线性算子的假设，及 § 5.1 定理 2，还知 T 必是闭算子；同样，由该节注 2 可知 T^{-1} 也是闭的. 注意到 E 的完备性，我们同样又可导出 $\mathscr{D}(\mathrm{T}^{-1})$ 也是 E_1 内的闭集. 即 $\mathrm{T}(E)$ 是 E_1 中的一闭线性子空间.

反之，如果有一元 $y_0\in\mathscr{N}(\mathrm{T}^*)^\perp$，使得 $y_0\notin \mathrm{T}(E)$，那么，由 § 3.3 分隔性定理，(定理 1) 我们可找到一个泛函 $g_1\in E_1^*$，使得

$$g_1(y_0)=1;\quad g_1(\mathrm{T}(x))=0,\quad \forall x\in E. \tag{9}$$

但由 (9) 的后一式，我们可导出

$$[\mathrm{T}^*(g_1)](x)=0,\quad \forall x\in E,$$

即有 $\mathrm{T}^*(g_1)=0$ (零泛函)，也即有 $g_1\in\mathscr{N}(\mathrm{T}^*)$. 于是注意到 y_0 的取法，我们则可导出 $g_1(y_0)=0$. 此显然与式 (9) 的前一式矛盾. 证毕.

与本节中定理有关的各种例子可以参看文献 [145], [59].

习　　题

1. 试证明本节定理 5 后面的推理.

2. 试证明本节定理 8 证明 2) 中的 i.

3. 设 T 为从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子，且有 $\overline{\mathscr{D}(\mathrm{T})}=E$. 试证明：当 $(\mathrm{T}^*)^{-1}$ 是连续算子时，其值域 $\mathscr{W}(\mathrm{T}^*)$ 必为 E^* 中的闭集.

第六章　抽象函数简介

在 § 2.1 中，我们曾经给出了“抽象函数”的定义. 由于抽象函数 $x(t)$ 是（定义在数域 $\boldsymbol{K}$ 内）在抽象空间 E 内取值的，而抽象空间的元一般称为向量，因此也有人称它们为“向量函数”.

抽象函数的概念对我们说来并不是生疏的. 实际上，我们在“数学分析”中就已经接触过它，例如一个含参变量的积分

$$F(\xi, t)=\int_a^{\xi} f(\eta, t) d\eta,$$

$f(\eta, t)$ 是矩形 $[a \leqslant \eta, t \leqslant b]$ 上的二元连续函数. 由于上面对于任意给定的 $t_0 \in [a, b]$，积分关系式就一意地确定了 $[a, b]$ 上的一个连续函数 $F(\xi, t_0)$. 因此由上式所确定的算子实际上是一个从 $[a, b]$ 到 Banach 空间 $C[a, b]$ 内的抽象函数.

对于抽象函数的研究，首先当然可以将实、复函数论的理论形式上地推广到向量值的情形来讨论. 然而这样的推广是否真有意义呢？例如，联想到“可测”、“囿变”、“积分”等概念在线性“泛函”的表现式中所起的作用，我们当然会推想是否向量值的这种类似性质也将会在连续线性“算子”的表现式中起有效的作用.其实，事实正是如此. 此外，又如从古典积分方程，微分方程的主要素材导致的泛函分析的一个近代分支——“谱论”的研究中，复变数向量值的抽象解析函数（预解算子）就起着决定性的作用. 这些都说明，抽象函数的讨论不仅仅是一种函数论的形式推广，而是有着其丰富的理论和实际用途的.

在本章各节中，我们均只讨论在复数（或实数）域定义而在复（或实）“Banach 空间”内取值的抽象函数.

§ 6.1. 抽象函数的连续性与囿变性

本节，作为数学分析和复变函数论的一般推广，我们简单介绍抽象函数的连续性与囿变性(和绝对连续性).

首先，必须引入极限的概念，但是由于对于一个 Banach 空间 E 来说，我们可以定义各种不同的“拓扑结构”，因而就相应产生各种不同的极限的定义. 例如，我们从前就曾引入过“强”收敛和“弱”收敛的定义，正因为如此，当我们在讨论抽象函数的时候，相应就会产生同一个概念的不同的定义，如连续的概念就有“强”连续和“弱”连续，可导性则有“强”可导与“弱”可导等等. 下面对它们一一介绍，并且给出一些与数学分析（及复变函数论）中相类似的命题.

(一)

定义 1. 设 $x(t)$ 是从数集 $D\subset \boldsymbol{K}$ 到 Banach 空间 E 内的抽象函数，那么，(i) 称 $x(t)$ 在点 $t_0\in D$ 弱连续是指它满足条件

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in D}}|f[x(t)]-f[x(t_0)]|=0,\quad \forall f\in E^*;$$

(ii) 称 $x(t)$ 在点 $t_0\in D$ 强连续，是指它满足条件

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in D}}\|x(t)-x(t_0)\|=0;$$

(iii) 如果抽象函数 $x(t)$ 在 D 上每一点均是弱(或强)连续的，那么，我们称 $x(t)$ 在 D 上弱(或强)连续的.

注 1. 我们不难验证，在本章开始，由积分表达式所给出的抽象函数 $x(t)=\int_a^{\xi} f(\eta,t)d\eta$, $\forall t\in[a,b]$ （其中，$f(\eta,t)$ 在 $a\leqslant\eta$, $t\leqslant b$ 上连续)，在 $[a,b]$ 上是强连续的.

注 2. 如果抽象函数 $x(t)$ 在 t_0 点强连续，那么，其必亦在 t_0 点弱连续；反之，则未必成立. 事实上，前半段命题是容易证明的. 至于后半段结论则可考查下面的两个反例：

反例 1. 设 $x(t)$ 为区间 $[0, 1]$ 到空间 (l^2) 内的抽象函数，

$$x(t)=\begin{cases} e_n, & \text{当 } t=\dfrac{1}{n} \text{ 时} \\ \theta, & \text{当 } t \neq \dfrac{1}{n}, t\in[0,1] \text{ 时} \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

那么，我们显然可以看出 $x(t) \xrightarrow[(\text{弱})]{} x(0)=\theta \ (t\to 0)$；然而从 $\left\|x\left(\frac{1}{n}\right)\right\|=1(n=1,2,\cdots)$ 可知 $x(t) \not\to x(0)=\theta(t\to 0)$.

反例 2. 设 $x(t)$ 为区间 $[-1, 1]$ 到空间 $L^2[-\pi, \pi]$ 内的抽象函数

$$[x(t)](\xi)=\begin{cases} \sin(n\xi), & \text{当 } t=\dfrac{1}{n} \text{ 时} \quad (n=1,2,\cdots); \\ \theta, & \text{当 } t\in[-1,1] \text{ 为其它值时}. \end{cases}$$

那么 $x(t)$ 在 $t=0$ 点，从 Fourier 系数性质可知其是弱连续的，且由 $\left\|x\left(\frac{1}{n}\right)\right\|=\sqrt{\pi}\,(n\geqslant 1)$，故知其不是强连续的.

注 3. 即使抽象函数 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上"处处"弱连续一般也不保证其在 $[\alpha, \beta]$ 上的强连续性. 当我们利用到前面（§ 4.5 习题）关于具体空间中弱收敛的充要条件时，我们可以举出下面两个反例：

反例 1. 设 $x(t)$ 为从 $[0, \infty)$ 到 (l^2) 内的抽象函数，

$$x(t)=\left(t, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^2}, \cdots, \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^{n-1}}, \cdots\right),$$
$$0\leqslant t<\infty.$$

那么，$x(t)$ 在 $[0, \infty)$ 是处处弱连续的，但其至少在 $t=0$ 不是强连续的.

反例 2. 设 $x(t)$ 为从 $[0, 1]$ 到 $L^2[0, 2\pi]$ 内的抽象函数，

$$x(0)=\theta; \quad [x(t)](\xi)=\sin\frac{\xi}{t} \quad (0<t\leqslant 1).$$

那么，$x(t)$ 在 $[0, 1]$ 是处处弱连续的，然而至少在 $t=0$ 不是强连续的.

现在，我们给出关于弱连续抽象函数的一个定理：

定理 1. 设 $x(t)$ 是定义在有界闭域 $\overline{D}\subset \boldsymbol{K}$ 上的"弱连续"抽象函数，那么，

(i) 数值函数 $\|x(t)\|$ 在 $\overline{D}$ 上是有界的；

(ii) 元集 $\{x(t)\,|\,t\in\overline{D}\}$ 必包含在 E 中的可分闭线性子空间 $E_0=\overline{[\{x(r)\,|\,r\text{为有理数},\ r\in\overline{D}\}]}$ 内（这里，E_0 为抽象函数 $x(t)$ 在 $\overline{D}$ 上有理点所取值的"线性闭扩张"）.

证. 1) 由假设可知，$\forall f\in E^*$，数值函数 $f[x(t)]$ 均是在有界闭域 $\overline{D}$ 上连续的，因此，它在 $\overline{D}$ 上必是有界的，也即有

$$\sup_{t\in\overline{D}}|f[x(t)]|<+\infty,\quad \forall f\in E^*.$$

由第四章的"共鸣定理"可导出 $\sup\limits_{t\in\overline{D}}\|x(t)\|<+\infty$.

2) 同样地，由假设可知，$\forall t_0\in\overline{D}$，函数 $f[x(t)]$ 对任意泛函 $f\in E^*$，均是在点 t_0 连续的，因此，如果选有理数列 $\{r_n\}\subset\overline{D}$，使 $r_n\to t_0(n\to\infty)$，那么，恒有

$$f[x(r_n)]\to f[x(t_0)]\quad(n\to\infty),\ \forall f\in E^*.$$

也即导出 $x(r_n)\xrightarrow[(\text{弱})]{}x(t_0)\ (n\to\infty)$. 因此，由 §4.5 定理 4，我们就可推得 $x(t_0)\in\overline{[\{x(r_n)\}]}\subset E_0$.

最后，注意到上式中 t_0 在集 $\overline{D}$ 中的任意性，便可导出集

$$\{x(t)\,|\,t\in\overline{D}\}\subset E_0.$$

证毕.

下面，我们再给出一个关于强连续抽象函数的命题，它的证明方法，与数值函数完全类似.

定理 2. 在有界闭域 $\overline{D}\subset\boldsymbol{K}$ 上的"强连续"抽象函数必定在 $\overline{D}$ 上是一致强连续的.

注 4. 类似地，我们可以引出关于抽象函数列的强(弱)"一致收敛"的概念，并且，与通常数值函数一样可以得到下面的结果："强(弱)连续的抽象函数列的强(弱)一致收敛的极限仍是强(弱)连续抽象函数".

(二)

下面讨论有关抽象函数囿变性.

定义 2. 从区间 $[\alpha,\beta]$ 到 Banach 空间 E 内的抽象函数 $x(t)$，(i) 称为弱囿变的，是指对任意泛函 $f\in E^*$，数值函数 $f[x(t)]$ 均为囿变函数；(ii) 称为囿变的，是指对 $[\alpha,\beta]$ 中所有互不相交的有限个区间 (α_k,β_k) $(k=1,2,\cdots n)$，均有 $\sup\left\|\sum_k[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]\right\|<\infty$；(iii) 称为强囿变的是指对上述所有区间而言，均有

$$\sup\sum_k\|x(\beta_k)-x(\alpha_k)\|<\infty,$$

并且上述的两个上确界分别称为全变差和强全变差(类似地，我们可以导出相应的关于弱绝对连续，绝对连续及强绝对连续的三个定义).

注 5. 与数值函数一样，上述三种囿变函数均是 $[\alpha,\beta]$ 上的有界抽象函数. 事实上，对于弱囿变函数，由于通常数值囿变函数是有界函数，因而，由

$$\sup_{t\in[a,b]}|f[x(t)]|<+\infty,\quad \forall f\in E^*.$$

我们不难用"共鸣定理"直接导出 $\sup\limits_{t\in[a,b]}\|x(t)\|<+\infty$；对于囿变函数与强囿变函数则直接可由定义导出上述结论.

注 6. 与数值函数一样，$[\alpha,\beta]$ 上的强囿变抽象函数 $x(t)$ 只能有可列个不连续点，并且在 $[\alpha,\beta]$ 的每一点，其单侧极限总存在. 事实上，我们只要验明上面的后一断言，通过实变函数论中的类似方法，则上面的结论就都得到，若不然，例如 $x(t_0-0)$ 不存在 $(t_0\in[\alpha,\beta])$，那么，有数列 $t_1<t_2<t_3<\cdots<t_n<\cdots$，使 $t_n\to t_0(n\to\infty)$，且有 $\|x(t_n)-x(t_{n-1})\|\geqslant\varepsilon_0>0$. 这样，

$$\sum_{k=1}^{n}\|x(t_k)-x(t_{k-1})\|\geqslant n\varepsilon_0\to\infty\quad(n\to\infty).$$

与 $x(t)$ 为强囿变函数矛盾.

注 7. 由定义容易看到，强囿变函数必是囿变的. 然而反之未

必.

反例. 设 $x(t)$ 为 $[0, 1]$ 到区间 $M[0, 1]$ 内的抽象函数,

$$[x(t)](\xi)=\begin{cases}1, & 0\leqslant \xi\leqslant t\\ 0, & t<\xi\leqslant 1\end{cases}\ (0\leqslant t<1);\quad [x(1)](\xi)\equiv 1.$$

那么 $x(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是囿变但不强囿变的.

验. 由假设可知对 $[0, 1]$ 内任意有限个不交区间 (α_k, β_k) $(k=1, 2, \cdots, n)$,必有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]\right\|\leqslant\|x(1)\|=1,$$

故知 $x(t)$ 是囿变的,另一方面,对于 $[0, 1]$ 上任何两数 $\alpha\neq\beta$,必恒有 $\|x(\beta)-x(\alpha)\|=1$,从而推得 $x(t)$ 不是强囿变的. 验毕.

下面的定理给出了"囿变"与"弱囿变"的等价性.

定理 3. 为了 $[\alpha, \beta]$ 上的抽象函数 $x(t)$ 是囿变的,必须且只须它是弱囿变的.

证. 1)"⇒" 首先由

$$\left|\sum_k\{f[x(\beta_k)]-f[x(\alpha_k)]\}\right|=\left|f\left(\sum_k[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]\right)\right|$$
$$\leqslant\|f\|\left\|\sum_k[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]\right\|,\qquad \forall f\in E^*.$$

[其中, (α_k, β_k) $(k=1, 2, \cdots, n)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 内任意有限个互不相交的区间],我们可以导出

$$\left|\sum_k\{\mathrm{Re}f[x(\beta_k)]-\mathrm{Re}f[x(\alpha_k)]\}\right|$$
$$=\left|\mathrm{Re}\sum_k\{f[x(\beta_k)-f[x(\alpha_k)]\}\right|$$
$$\leqslant\|f\|\left\|\sum_k[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]\right\|$$

及

$$\left|\sum_k\{\mathrm{Im}f[x(\beta_k)]-\mathrm{Im}f[x(\alpha_k)]\}\right|$$
$$=\left|\mathrm{Im}\sum_k\{f[x(\beta_k)]-f[x(\alpha_k)]\}\right|$$

$$\leqslant \|f\| \left\| \sum_k [x(\beta_k) - x(\alpha_k)] \right\|, \qquad \forall f \in E^*.$$

从而由 $x(t)$ 为囿变函数的假设，并注意到对于实函数而言(由正、负部“分离”的简单方法)上面的关系式正好与 $\operatorname{Re} f(x)$, $\operatorname{Im} f(x)$ 是囿变函数的定义是等价的. 于是由

$$\sum_k |f[x(\beta_k)] - f[x(\alpha_k)]| \leqslant \sum_k |\operatorname{Re}\{f[x(\beta_k)] - f[x(\alpha_k)]\}|$$

$$+ \sum_k |\operatorname{Im}\{f[x(\beta_k)] - f[x(\alpha_k)]\}|$$

$$= \sum_k |\operatorname{Re} f[x(\beta_k)] - \operatorname{Re} f[x(\alpha_k)]|$$

$$+ \sum_k |\operatorname{Im} f[x(\beta_k)] - \operatorname{Im} f[x(\alpha_k)]|, \qquad \forall f \in E^*,$$

可导出

$$\sup \sum_k |f[x(\beta_k)] - f[x(\alpha_k)]| < \infty, \qquad \forall f \in E^*.$$

也即抽象函数 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是弱囿变的.

2) “$\Leftarrow$” 由 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 是弱囿变的假设可知，由 $[\alpha, \beta]$ 内的任意有限个互不相交的区间 $[\alpha_k, \beta_k]$($k = 1, 2, \cdots n; n = 1, 2, \cdots$) 所构成的 E^* 上的连续线性泛函族

$$F_l(f) = f\left(\sum_k [x(\beta_k) - x(\alpha_k)]\right), \quad \forall f \in E^*$$

满足条件

$$\sup_l |F_l(f)| = \sup \left| f\left(\sum_k [x(\beta_k) - x(\alpha_k)]\right)\right|$$

$$\leqslant \sup \sum_k |f[x(\beta_k)] - f[x(\alpha_k)]| < \infty, \qquad \forall f \in E^*.$$

因而由“共鸣定理”，我们立即可以导出

$$\sup \left\| \sum_k [x(\beta_k) - x(\alpha_k)] \right\| < \infty,$$

也即 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是囿变的. 证毕.

下面我们讨论绝对连续的抽象函数. 首先，由相应的定义我们

不难看出绝对连续的抽象函数必定是（强）连续抽象函数．此外，凡是 $[\alpha, \beta]$ 上的（强、弱）绝对连续的抽象函数必定也是相应的（强、弱）囿变函数，并且，与（强）囿变抽象函数类似，根据一个抽象函数的“强绝对连续”性必然可以导出其“绝对连续”性；但反之则未必成立．然而我们必须注意的是，与（弱）囿变抽象函数不同，抽象函数的“绝对连续”性与“弱绝对连续”性是不等价的，我们有下面的定理[13]：

定理 4. 如果 $[\alpha, \beta]$ 上的抽象函数 $x(t)$ 是绝对连续的，那么，其必也是弱绝对连续的，并且对 E^* 内的任意有界集 M^*，函数族 $\{f[x(t)] \mid f \in M^*\}$ 是“等度绝对连续”的；反之，如果在 E^* 内单位球面 Σ_1^* 上有稠于它的集 D^*，使得函数族 $\{f[x(t)] \mid f \in D^*\}$ 是“等度绝对连续”的，那么，$x(t)$ 是绝对连续的．

证．1）先证明定理的前半部．首先，当设 (α_k, β_k) $(k=1, 2, \cdots, n)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 内互不相交的有限个区间时，我们可以通过

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f[x(\beta_k) - f[x(\alpha_k)]\}\right|$$

$$\leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n}[x(\beta_k) - x(\alpha_k)]\right\|, \qquad \forall f \in E^*$$

及 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 的绝对连续性导出 $f[x(t)]$ $(f \in E^*)$ 的绝对连续性，此即 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 也是弱绝对连续的．此外，对 E^* 中任一有界集 M^*，当设 β_0 为其一个“界”时，与上面的情形类似我们可以通过

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f[x(\beta_k)] - f[x(\alpha_k)]\}\right|$$

$$\leqslant \beta_0 \left\|\sum_{k=1}^{n}[x(\beta_k) - x(\alpha_k)]\right\|, \qquad \forall f \in M^* \subset E^*$$

立即导出函数族 $\{f[x(t)] \mid f \in M^*\}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是等度绝对连续的．

2）我们再来证明定理的后半部．首先，我们从假设条件先来

证明，此时函数族 $\{f[x(t)]\,|\,f\in\Sigma_1^*\}$ 也是等度绝对连续的．事实上，由假设可知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，使得对于 $[\alpha,\beta]$ 内任意有限个不交的区间 $(\alpha_k,\beta_k)(k=1,2,\cdots,n)$，只要 $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$，就一致地有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f^0[x(\beta_k)]-f^0[x(\alpha_k)]\}\right|<\varepsilon,\qquad \forall f^0\in D^*\subset\Sigma_1^*.\quad(1)$$

而当注意到 D^* 稠于 Σ_1^*，那么，对任意 $f\in\Sigma_1^*$，必有 $\{f_m^0\}\subset D^*$．使得

$$\|f_m^0-f\|\to 0\qquad(m\to\infty).\qquad(2)$$

这样，由

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n}\{f[x(\beta_k)]-f[x(\alpha_k)]\}\right|\\ &\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\{f_m^0[x(\beta_k)]-f_m^0[x(\alpha_k)]\}\right|\\ &\quad+\left|(f_m-f)\left\{\sum_{k=1}^{n}[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]\right\}\right|\\ &\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\{f_m^0[x(\beta_k)]-f_m^0[x(\alpha_k)]\}\right|\\ &\quad+\|f_m-f\|\left\|\sum_{k=1}^{n}[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]\right\|\end{aligned}$$

我们不难由式（1）和（2）导出

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f[x(\beta_k)]-f[x(\alpha_k)]\}\right|\leqslant\varepsilon,\quad\forall f\in\Sigma_1^*.\qquad(3)$$

即函数族 $\{f[x(t)]\,|\,f\in\Sigma_1^*\}$ 也是等度绝对连续的．

其次，对于上述任何满足 $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$ 的在 $[\alpha,\beta]$ 内互不相交的区间 $(\alpha_k,\beta_k)\ (k=1,2,\cdots,n)$，由 Hahn-Banach 定理我们可知，对于 E 中的元 $\sum_{k=1}^{n}[x(\beta_k)-x(\alpha_k)]$，必存在一泛函

$f_1 \in \Sigma_1^*$,使得(注意式(3))

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} [x(\beta_k) - x(\alpha_k)] \right\| = \left| f_1\left(\sum_{k=1}^{n} [x(\beta_k) - x(\alpha_k)] \right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

此即导出了 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 是绝对连续的. 证毕.

注 8. 由上面的命题,我们不难得出在 $[\alpha, \beta]$ 上"弱绝对连续"但不"绝对连续"的反例. 此外,对于抽象囿变与绝对连续函数有兴趣的读者还可以参看后面相应的文献 [5],[12],[13] 等. 这里,我们就不详细叙说了.

习　　题

1. 试证明: 在 (α, β) 上,如果 $x(t)$ 为强(弱)连续抽象函数,$\lambda(t)$ 为连续数值函数,则 $\lambda(t)x(t)$ 必亦为强(弱)连续抽象函数.

2. 设 $x(t)$ 为从 $[0,1]$ 到 (l^2) 空间的抽象函数,

$$x(0) = \theta; \quad x(t) = \Big(0, \cdots, 0, \underset{\text{第}n\text{位}}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \Big), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\text{当 } \frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n} \text{ 时},$$

试验证: $x(t)$ 在 $t = 0$ 点是弱连续而非强连续的.

3. 试证明: 在 (l^p) $(p > 1)$ 内取值的抽象函数 $x(t) = \{x_n(t)\}$, 其在 t_0 点"弱连续"的充要条件是

(i) $\|x(t)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^p \right)^{1/p}$ 在 t_0 的某一邻域内是"一致有界"的;

(ii) $x(t)$ 的各"坐标" $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 均在 t_0 点连续.

4. 试利用习题 3 验证本节注 3 中的反例 1.

5. 试证明: 在 $L^p[a, b]$ $(p>1)$ 内取值的抽象函数 $[x(t)](\xi)$ 其在 t_0 点"弱连续"的充要条件是

(i) $\|x(t)\| = \left(\int_a^b |[x(t)](\xi)|^p d\xi \right)^{1/p}$ 在 t_0 的某一邻域内是"一致有界"的;

(ii) 对于任意的 $\eta \in [a, b]$,均有

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^\eta [x(t)](\xi) d\xi = \int_a^\eta [x(t_0)](\xi) d\xi.$$

6. 试利用习题 5 验证本节注 3 中的反例 2.

7. 试证明：区域 $G\subset \boldsymbol{K}$ 上的强(弱)连续的抽象函数列的强(弱)一致收敛的极限仍是强(弱)连续抽象函数.

8. 试证明：$[\alpha, \beta]$ 上的强囿变函数抽象函数必为囿变抽象函数，囿变抽象函数必为有界抽象函数. 反之未必成立.

9. 试证明：绝对连续的抽象函数必为强连续抽象函数.

10. 试详细证明：$[\alpha, \beta]$ 上的弱绝对连续的抽象函数必是囿变抽象函数.

§6.2. 抽象函数的可导性与 Riemann 积分

本节我们讨论定义在复数域内的抽象函数的可导性以及定义在实数区间上抽象函数的 Riemann 积分.

(一)

首先，我们讨论抽象函数的可导性问题. 先给出下面一个定义：

定义 1. 设 $x(t)$ 是从区域 $G\subset \boldsymbol{K}$ 到 Banach 空间 E 内的抽象函数. 那么，我们称 $x(t)$ 在点 $t_0\in G$ 是弱(强)可导的，是指存在一元 $x_0\in E$，使得元 $\dfrac{x(t_0+\delta)-x(t_0)}{\delta}$ 当 $\delta\to 0$ 时，弱(强)收敛于 x_0. 为明确起见，我们常将 x_0 记为 $x'(t_0)$，并称其为 $x(t)$ 在 t_0 点的弱(强)导数. 如果抽象函数在区域 G 内的每一点均是弱(强)可导的，那么，称它在 G 内是弱(强)可导的.

下面的定理给出了关于 $x(t)$ 的弱可导性与数值函数 $f[x(t)]$ 的可导性之间的关系.

定理 1. 如果 $x(t)$ 在区域 $G\subset \boldsymbol{K}$ 内的一点 t_0 是弱可导的，那么，$\forall f\in E^*$，相应的数值函数 $f[x(t)]$ 必均在 t_0 点可导（并且 $\{f[x(t)]\}'_{t=t_0}=f[x'(t_0)]$，其中，$x'(t_0)$ 为 $x(t)$ 在 t_0 点的弱导数）；反之，当空间 E 还是"弱列备"的时候，逆命题也是成立的.

证. 前半段命题是明显的，只要注意到弱可导的定义就不难导出. 下面，我们证明定理的后半段命题. 事实上，$\forall\{t_n\}$，只要

$t_n \to t_0(n \to \infty)$，则当取 E 中元列 $\{x_n\} = \left\{\dfrac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}\right\}$ 时，从数值函数 $f[x(t)]$ 在 t_0 点均是可导的假设，可以导出

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} f\left[\frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f[x(t_n)] - f[x(t_0)]}{t_n - t_0} \\ &= f'[x(t)]\big|_{t=t_0}, \quad \forall f \in E^*,\end{aligned}$$

因此，$\{x_n\}$ 为 E 中的一弱 Cauchy 列，从而，注意到 E 的"弱列备"假设则知，$\exists x_0 \in E$，使得

$$\frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} \xrightarrow[(弱)]{} x_0 \quad (n \to \infty). \tag{1}$$

此外，如果又设任一数列 $\{t_n'\}$ 也有 $t_n' \to t_0(n \to \infty)$，那么，同样由数值函数 $f[x(t)](\forall f \in E^*)$ 均在 t_0 点可导的假设，可导出

$$\begin{aligned}&f\left[\left(\frac{x(t_n') - x(t_0)}{t_n' - t_0}\right) - \left(\frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}\right)\right] \\ &\quad = f\left(\frac{x(t_n') - x(t_0)}{t_n' - t_0}\right) - f\left(\frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}\right) \to 0 \\ &\qquad (n \to \infty), \quad \forall f \in E^*.\end{aligned}$$

也即有

$$\left(\frac{x(t_n') - x(t_0)}{t_n' - t_0}\right) - \left(\frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}\right) \xrightarrow[(弱)]{} \theta \quad (n \to \infty).$$

最后，注意到式 (1)，便得出

$$\frac{x(t_n') - x(t_0)}{t_n' - t_0} \xrightarrow[(弱)]{} x_0 \quad (n \to \infty).$$

此即证明了抽象函数 $x(t)$ 在 t_0 点是弱可导的．　证毕．

注意到 § 3.5 中关于自反空间的有界集必是弱列紧的性质以及 § 4.5 中 Banach 空间 (l^1) 强、弱收敛的等价性，我们便可直接导出下面的推理：

推理．在自反空间或者 (l^1) 空间中取值的抽象函数 $x(t)$，其在 t_0 点弱可导与对空间上的任意有界线性泛函 f，数值函数 $f[x(t)]$

在 t_0 点均可导是等价的性质.

定理 1 的逆命题中，空间 E 的"弱列备"的假设是不能去掉的，因为我们有下面的结果:

定理 2. 如果 E 不是弱列备空间，那么，必有一定义在 (α, β) 区间上的抽象函数 $x(t)$ 以及在 (α, β) 内的一点 t_0，使得数值函数的导数 $\{f[x(t)]\}'_{t=t_0}$ $(\forall f \in E^*)$ 均存在，然而，$x(t)$ 在 t_0 点不是弱可导的.

证. 为简单起见，我们不妨讨论在 $(-1, 1)$ 上定义的抽象函数(对于任意区间 (α, β)，本质上并没有什么变化). 首先，由于假设 E 不是弱列备的，因此，必可找到 E 中的一弱 Cauchy 列 $\{x_n\}$，使得 $\{x_n\}$ 在 E 中"弱极限"元不存在. 其次，由上所得元列 $\{x_n\}$，可按"折线"形式构造出 $(-1, 1)$ 上的一抽象函数 $x(t)$,

$$x(0) = \theta; \quad x\left(\pm \frac{1}{n}\right) = \pm \frac{x_n}{n};$$

$$x(\pm|s|) = x\left(\pm \frac{1}{n}\right)\frac{\dfrac{1}{n-1} - |s|}{\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}} + x\left(\pm \frac{1}{n-1}\right)\frac{|s| - \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}},$$

$$\frac{1}{n} < |s| \leqslant \frac{1}{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

那么，一方面对于任意的泛函 $f \in E^*$，由

$$\frac{f[x(\pm|s|)] - f[x(0)]}{\pm|s|}$$

$$= \frac{1}{\pm|s|}\left\{f\left[x\left(\pm \frac{1}{n}\right)\right]\left(\frac{1-(n-1)|s|}{\dfrac{1}{n}}\right)\right.$$

$$+f\left[x\left(\pm\frac{1}{n-1}\right)\right]\left(\frac{n|s|-1}{\frac{1}{n-1}}\right)\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{|s|}\left[(1-(n-1)|s|)f(x_n)+(n|s|-1)f(x_{n-1})\right]$$

$$=\left(\frac{1}{|s|}-n+1\right)f(x_n)+\left(n-\frac{1}{|s|}\right)f(x_{n-1})$$

$$=f(x_n)+\left(n-\frac{1}{|s|}\right)\left[f(x_{n-1})-f(x_n)\right];$$

$$\frac{1}{n}\leqslant|s|\leqslant\frac{1}{n-1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

并注意到 $s\to 0$,有 $n\to\infty$,以及 $\left|n-\dfrac{1}{|s|}\right|<1\ (n=1,2,\cdots)$ 和 $\{x_n\}$ 是弱 Cauchy 列的假设,因而,可以推出

$$f'[x(t)]|_{t=0}=\lim_{s\to 0}\frac{f[x(s)]-f[x(0)]}{s}$$

$$=\lim_{n\to\infty}f(x_n),\cdots,\qquad\forall f\in E^*$$

均存在. 但另一方面,由于

$$f\left[\frac{x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)}{\frac{1}{n}}\right]$$

$$=f(x_n)\quad(n=1,2,\cdots),\quad\forall f\in E^*,$$

因而同样由 $\{x_n\}$ 的取法,我们可知元列 $\left\{\dfrac{x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)}{\frac{1}{n}}\right\}$ 的弱极限元是不存在的,也即 $x(t)$ 在 $t=0$ 点不是弱可导的. 证毕.

注 1. 下面我们举出一个从 $(0, 2\pi)$ 到空间 (c) 内,处处"数值函数"导数 $\{f[x(t)]\}'_t$, $(\forall f\in(c)^*)$ 存在,但却处处不存在弱导数的抽象函数的反例.

反例. 设 $x(t)$ 为从 $(0, 2\pi)$ 到空间 (c) 内的抽象函数

$$x(t)=\left\{\frac{e^{int}}{n}\right\},\quad \forall t\in(0,\ 2\pi),$$

那么，$\forall f\in(c)^*$，数值函数 $f[x(t)]$ 在 $(0,\ 2\pi)$ 内处处可导，然而抽象函数 $x(t)$ 却在 $(0,\ 2\pi)$ 内处处均不存在弱导数.

验. 首先，由于 $(c)^*=(l^1)$，因而对任意泛函 $f\in(c)^*$，其可对应唯一的一个元 $\{b_n\}\in(l^1)$，使得

$$f[x(t)]=\sum_n\frac{b_ne^{int}}{n},\quad t\in(0,\ 2\pi),$$

于是，由 $\sum\limits_n ib_ne^{int}$ 在区间 $(0,\ 2\pi)$ 内的一致(且绝对)收敛性，我们立即可以导出 $\{f[x(t)]\}'_t=\sum\limits_n ib_ne^{int}$ 在 $(0,\ 2\pi)$ 内处处存在. 但另一方面，如果假设 $x(t)$ 在某点 $t_0\in(0,2\pi)$ 上有弱导数 $x'(t_0)=\{\xi_n^0\}\in(c)$，那么，由定理 1 的上半段命题我们有

$$\sum_n ib_ne^{int_0}=\{f[x(t)]\}'_{t=t_0}=f[x'(t_0)]=\sum_n b_n\xi_n^0,$$

$$\forall f=\{b_n\}\in(l').$$

于是，当特别取一列泛函 $\{f^{(k)}\}\subset(c)^*$，使其与

$$\{f_n^{(k)}\}=(0,\cdots,0,\underset{(\text{第}k\text{位})}{1},0,\cdots)\in(l^1)\quad(k=1,\ 2,\cdots)$$

对应时由上面的关系式可导出 $\{\xi_k^0\}=\{ie^{ikt_0}\}$，但注意到 $\lim\limits_{k\to\infty}ie^{ikt_0}$ 不存在，因而，与 $\{\xi_k^0\}\in(c)$ 的假设矛盾，此即说明，$x(t)$ 在 $(0,2\pi)$ 是处处没有弱导数的. 验毕.

此外，关于 $x(t)$ 的强、弱可导性之间的关系，由定义不难直接得到下面的定理:

定理 3. 如果 $x(t)$在区域 $G\subset\boldsymbol{K}$ 内的 t_0 点是强可导的，那么，它也必在 x_0 点弱可导并且其弱导数(元)就是其强导数(元).

注 2. 反之对于一个“实变数”的抽象函数 $x(s)$ 而言，当 $x(s)$ 在 (α,β) 内的一点 s_0 是弱可导时，$x(s)$ 未必在 s_0 点强可导.

反例 1. 设 $x(s)$ 是从 $(-1,\ 1)$ 到 $(l^p)(p>1)$ 内的抽象函数，

$$x(s)=\begin{cases}\theta, & \text{当 } s\neq \dfrac{1}{n},\ s\in(-1,1) \text{ 时};\\ \Big(0,\cdots,0,\underset{(\text{第}n\text{位})}{\dfrac{1}{n}},0,\cdots\Big), & \text{当 } s=\dfrac{1}{n} \text{ 时 } (n=1,2,\cdots),\end{cases}$$

那么，$x(s)$ 在 $s=0$ 点是弱可导而非强可导的.

验. 由于

$$\frac{x(s)-x(0)}{s}$$

$$=\begin{cases}\theta, & \text{当 } s\neq \dfrac{1}{n},\ t\in(-1,1) \text{ 时};\\ (0,\cdots,0,\underset{(n)}{1},0,\cdots) & \text{当 } s=\dfrac{1}{n} \text{ 时 } (n=1,2,\cdots),\end{cases}$$

因而，由 $(l^p)^*=(l^q)$，显然可知 $\dfrac{x(s)-x(0)}{s}\underset{(\text{弱})}{\longrightarrow}\theta \quad (s\to 0)$. 即 $x(s)$ 在 $s=0$ 点的弱导数为 θ. 但另一方面，由

$$\left\|\frac{x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)}{\frac{1}{n}}\right\|=1 \not\to \|\theta\|=0 \quad (n\to\infty),$$

由定理 3 的后半命题，可以导出在 $s=0$ 点，$x(s)$ 不是强可导的. 验毕.

至于处处弱可导但不强可导的例子 Гельфанд 文献 [56] 中第 I 部分 §9 已经举出过，由于需要一些别的知识，因此，这里不作详细讨论. 但是这样的例子我们却也可以由上节注 3 中的反例 1 利用积分方法作出来.

反例 2. 设 $x(t)$ 为 $[0,\infty)$ 到 (l^2) 内的抽象函数，

$$x(t)=\left(\frac{t^2}{2},\sqrt{1+t^2},\ \frac{1}{2}\ln(1+t^2),\frac{-1}{\sqrt{1+t^2}},\cdots,\right.$$
$$\left.\frac{-1}{(k-2)\ (\sqrt{1+t^2})^{k-2}},\cdots\right),\quad 0\leqslant t<\infty,$$

那么，$x(t)$ 在 $[0,\infty)$ 是处处存在弱导数为

$$y(t)=\left(t,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^2},\cdots,\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^k},\cdots\right),$$

然而,至少在 $t=0$ 它不是强可导的.

验. 分以下两种情况分别验证 $x(t)$ 在点 $t_0\in[0,\infty)$ 上均有弱导数:

1) 当 $0<t_0<\infty$ 时. 由于只要 $\Delta t\neq 0$, $t_0+\Delta t\in(0,\infty)$, 通过微分中值公式则可导出抽象函数

$$z_{t_0}(\Delta t)=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\left\{\frac{x_n(t_0+\Delta t)-x_n(t_0)}{\Delta t}\right\}$$

$$=\{x'_n(t_n^0)\}$$

$$=\left(t_1^0,\frac{t_2^0}{\sqrt{1+(t_2^0)^2}},\cdots,\frac{t_n^0}{(\sqrt{1+(t_n^0)^2})^{n-1}},\cdots\right)$$

(其中 $t_n^0(n=1,2,\cdots)$ 均为 t_0 与 $t_0+\Delta t$ 之间的某一数). 由此不难看出,抽象函数 $z_{t_0}(\Delta t)$ 的每个"坐标"均有

$$\frac{t_n^0}{(\sqrt{1+(t_n^0)^2})^{n-1}}\to\frac{t_0}{(\sqrt{1+t_0^2})^{n-1}}\quad(\Delta t\to 0)$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

此外, 当 $|\Delta t|<\frac{t_0}{2}$ 时, 又有

$$\|z_{t_0}(\Delta t)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t_n^0}{(\sqrt{1+(t_n^0)^2})^{n-1}}\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(t_0+\frac{t_0}{2}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{t_0}{2}\right)^2\right]^{n-1}}$$

$$=\frac{9}{4}t_0^2\Bigg/\left(1-\frac{1}{1+\left(\frac{t_0}{2}\right)^2}\right)=9\left(1+\left(\frac{t_0}{2}\right)^2\right).$$

即在 t_0 的 $\frac{t_0}{2}$ 一邻域内, $\|z_{t_0}(\Delta t)\|$ 是"一致有界"的. 这样,由 (l^p)

($p>1$) 内元的弱收敛充要条件(或由 § 6.1 习题 3) 可导出,

$$\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=z_{t_0}(\Delta t)\underset{(\text{弱})}{\longrightarrow}y(t_0)$$

$$(\Delta t\to 0,\ 0<t_0<\infty).$$

即抽象函数 $x(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上任意一点均有弱导数为 $y(t)$.

2) 当 $t_0=0$ 时,与 1) 类似,我们容易看出 $z_0(\Delta t)$ 的每个"坐标"也均趋向于 $y(0)$ 的每个坐标 0. 下面,验证 $\|z_0(\Delta t)\|$ 在某一个域 $0<\Delta t<\delta_0$ 也是"一致有界"的. 为此,我们只要来验证级数

$$u(\Delta t^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n\cdot\Delta t}\left[(1+\Delta t^2)^{-\frac{n}{2}}-1\right]\right\}^2$$

$$=\frac{1}{\Delta t^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(1+\Delta t^2)^{-(n/2)}-1\right]^2,$$

当 $0<\Delta t<\delta_0$ 时, 是"一致有界"的就行了 (因为 $\|z_0(\Delta t)\|$ 与 $u(\Delta t^2)$ 仅差三项在 $0<\Delta t<\delta_0$ 均有界的函数). 为此,我们考查函数

$$v(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(1+t)^{-n/2}-1\right]^2\quad(0<t<\delta),$$

不难验证,对于任意正数 ε, 在区域 $\varepsilon<t<\delta$ 内上面的级数内各项导函数所成函数项级数是一致收敛的, 因此可以导出在 $(0,\delta)$ 内 $v(t)$ 是可以逐项微分的, 即

$$v'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}\left[(1+t)^{-(n/2)}-1\right](1+t)^{-(n+2)/2}\quad(0<t<\delta).$$

下面,我们再来说明 $v'(t)$ 在某个 $(0,\delta_1)$ 内是有界的. 事实上,由上面的式子可知

$$v'(t)=(1+t)^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(1+t)^{-n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+t)^{-(n/2)}}{n}\right]$$

$$=(1+t)^{-1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-[(1+t)^{-1}]^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-[(1+t)^{-\frac{1}{2}}]^n}{n}\right\}$$

$$=(1+t)^{-1}\left\{\ln[1-(1+t)^{-1}]-\ln[1-(1+t)^{-\frac{1}{2}}]\right\}$$

$$= (1+t)^{-1}\ln\left[\frac{1-(1+t)^{-1}}{1-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= (1+t)^{-1}\ln\left[\frac{t}{(1+t)-(1+t)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \frac{1}{1+t}\ln\frac{t}{(1+t)-\sqrt{1+t}},$$

而当注意到

$$\lim_{t\to 0+}\frac{t}{(1+t)-\sqrt{1+t}} = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}} = 2$$

时，不难看出 $v'(t)$ 在 $(0,\delta_1)$(δ_1 为任一给定正数)内必是有界的. 不妨设其一个界为 β_0. 于是，注意到上面的做法，可知 $u(t)=\frac{v(t)}{t}$ 以及 $v(0)=0$，从而由中值公式可得出当 $0<t<\delta_1$ 时，有

$$|u(t)| = \left|\frac{v(t)}{t}\right| = \left|\frac{v(t)-v(0)}{t}\right| = |v'(\theta_{(t)}\cdot t)| \leqslant \beta_0$$

[其中，$0<\theta_{(t)}<1$，$t\in(0,\delta_1)$]. 由此，可直接导出抽象函数 $z_0(\Delta t)$ 的范数 $\|z_0(\Delta t)\|$ 当 $0<\Delta t<\delta_0=\sqrt{\delta_1}$ 时也是"一致有界"的. 从而与 1) 一样，我们也即得到了抽象函数 $x(t)$ 在 $t=0$ 点也是具有弱导数 θ 的.

其次，$x(t)$ 在 $x=0$ 点不是强可导的. 事实上，从上面已得的关系式中，我们不难得到

$$|u(t)| = |v'(\theta t)| = \frac{1}{1+\theta t}\ln\frac{\theta t}{(1+\theta t)-\sqrt{1+\theta t}} \to \ln 2 \quad (t\to 0).$$

从而可导出

$$\|z_0(\Delta t)\| \geqslant |u(\Delta t)| \to \ln 2 \neq \|\theta\| = 0 \quad (\Delta t\to 0)$$

此即证得 $x(t)$ 在 $t=0$ 点不是强可导的. 验毕.

下面的定理给出了有关抽象函数的弱可导与强连续之间关系.

定理 4. 设 $x(t)$ 为区域 $G\subset \boldsymbol{K}$ 内定义的抽象函数. 那么，对

于任意一点 $t_0 \in G$，只要 $x(t)$ 是弱可导的，则其必在 t_0 点是强连续的．

证．任取一收敛于 0 的非零数列 $\{\delta_n\}$，作 E^* 上的泛函

$$F_n(f) = f\left[\frac{x(t_0+\delta_n) - x(t_0)}{\delta_n}\right], \quad \forall f \in E^*.$$

显然 $\{F_n\}$ 是 E^* 上的一列有界线性泛函，并且由 $x(t)$ 在 t_0 点弱可导的假设可知，$\forall f \in E^*$，极限

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f) = \lim_{n\to\infty} f\left[\frac{x(t_0+\delta_n) - x(t_0)}{\delta_n}\right]$$

均存在．因而，由 § 4.5 关于"弱收敛"的充要条件，可得常数 β，使得 $\left\|\frac{x(t_0+\delta_n) - x(t_0)}{\delta_n}\right\| \leqslant \beta \quad (n=1, 2, \cdots)$．由此可导出

$$\|x(t_0+\delta_n) - x(t_0)\| \leqslant \beta \cdot |\delta_n| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

从而可知 $x(t)$ 在 t_0 点是强连续的．证毕．

注 3. 当 $x(t)$ 在 t_0 点强连续时，未必保证其在 t_0 点有弱导数，反例是容易找出来的．我们可举最简单的一个反例．

反例 1. 设 $x(t)$ 为 $[0, 1]$ 到 (l^1) 空间的抽象函数，

$$x(s) = \begin{cases} \theta, & \text{当 } s \neq \frac{1}{n},\ s \in [0, 1] \text{ 时} \\ (0, \cdots, 0, \underset{\text{第}n\text{位}}{\frac{1}{n}}, 0, \cdots), & \text{当 } s = \frac{1}{n} \text{ 时 } (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

那么，$x(s)$ 在 $s=0$ 点是强连续但非弱可导的．

验．由于 $\|x(s)\| = 0$，当 $s \neq \frac{1}{n}, s \in [0,1]$ 时；$\|x(s)\| = \frac{1}{n}$，当 $s = \frac{1}{n}$ 时，因而，显然有 $x(s) \to x(0) = \theta\ (s \to 0)$．但另一方面，注意到 $(l^1)^* = (m)$，因此，当取一泛函 $f_0 = (1,1,1,\cdots) \in (m)$ 时，则有

$$f_0\left[\frac{x\left(\frac{1}{n}\right) - x(0)}{\frac{1}{n}}\right] = 1 \quad (n=1, 2, \cdots)$$

和

$$f_0^{(n)}\left[\frac{x(s)-x(0)}{s}\right]=0 \quad \left(当 s \neq \frac{1}{n},\ s\in[0,1]时\right),$$

因而可知 $x(t)$ 在 $t=0$ 点无弱导数存在．验毕．

比反例 1 更有趣的是，我们还可以找到在一个区间上"处处强连续"然而却"处处不弱可导"的例子．回忆起在数学分析中，找出一个处处连续而又处处不可导的函数是多么不易，但这里的例子却并不是很难的，原因就在于对于一个抽象函数而言"弱可导"的要求条件比起"强连续"的条件来要强的多，正如在复变函数中找出一个处处连续而处处不可导的函数也是极容易的一样（如函数 $f(z)=|z|$ 就是一个）．下面，我们就给出这样的一个反例：

反例 2． 设 $x(t)$ 是由 $[0,2\pi]$ 到 (l^2) 内的一个抽象函数，

$$x(t)=\left(1,\ \sin t,\ \frac{\sin(2t)}{2^{(1+\sigma)/2}},\ \cdots,\ \frac{\sin(nt)}{n^{(1+\sigma)/2}},\cdots\right),$$

$$0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

（其中，$0<\sigma<1$）．那么，$x(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 上处处强连续且处处不弱可导．

验． 首先，由

$$\|x(t)\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin(nt)}{n^{(1+\sigma)/2}}\right)^2\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}<\infty$$

可知，上面定义的 $x(t)$ 的确是 (l^2) 中的元．并且，$\forall t_0\in[0,2\pi]$，只要 $t_0+\Delta t\in[0,2\pi]$，就有

$$\begin{aligned}\|x(t_0+\Delta t)-x(t_0)\|^2&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin(n(t_0+\Delta t))-\sin(nt_0)}{n^{(1+\sigma)/2}}\right)^2\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\cos\left[n\left(t_0+\dfrac{\Delta t}{2}\right)\right]\cdot\sin\dfrac{\Delta t}{2}}{n^{(1+\sigma)/2}}\right)^2\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n^{(1+\sigma)/2}}\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)^2\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}\right)\Delta t\to 0\quad(\Delta t\to 0).\end{aligned}$$

因而导出抽象函数 $x(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上任何一点均是强连续的．其次由于 $(l^2)^* = (l^2)$，因此如果抽象函数 $x(t) = \{x_n(t)\}$．在 t_0 点有弱导数存在时，则其"弱导数"必为 $\{x'_n(t_0)\}$．并且，由元列弱收敛极限元的性质(参看 §4.5 习题)，我们还应有

$$\|\{x'_n(t_0)\}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x'_n(t_0)|^2 < \infty. \tag{2}$$

然而，根据

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x'_n(t_0)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos nt_0}{n^{(\sigma-1)/2}}\right)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 nt_0}{n^{\sigma-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} n^{1-\sigma} \cdot \cos^2 nt_0$$

和上面的级数的通项，当 $n \to \infty$ 时并不趋向 0，从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x'_n(t_0)|^2 = \infty$$

与式 (2) 矛盾，所以我们可以知道抽象函数在 $[0, 2\pi]$ 上处处均是不弱可导的．验毕．

注 4. 当 E 为"自反"空间时，$x(t)$ 如果在 $[\alpha, \beta]$ 是强囿变抽象函数，那么，它必在 $[\alpha, \beta]$ 内几乎处处有强导数[56]．但是当 E 不是自反时，此命题则未必正确．我们可举出具有下面更强一些结论的反例如下(当注意到强绝对连续也必是处处强连续时，下例也可作为上面注 3 中的另一类型例子)．

反例．设 $x(t)$ 是从 $[0, 1]$ 到 $L[0, 1]$ 内的抽象函数，

$$[x(t)](\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi \leqslant t; \\ 0, & t < \xi \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

那么，$x(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是强绝对连续的(从而是强囿变的)，然而却并不几乎处处有弱导数(因而也不几乎处处有强导数)．

验．由

$$\|[x(\beta)](\xi) - [x(\alpha)(\xi)]\| = \int_\alpha^\beta d\xi = (\beta - \alpha),$$

$$\forall [\alpha, \beta] \subset [0, 1].$$

我们可得，对于$[0, 1]$内任意互不相交的有限个区间(α_k, β_k)($k=1, 2, \cdots, n$)，必有

$$\sum_k \|x(\beta_k) - x(\alpha_k)\| = \sum_k (\beta_k - \alpha_k),$$

从而立即可以证出$x(t)$在$[0, 1]$上是强绝对连续的．其次，注意到$(L[0, 1])^* = M[0, 1]$．因此，$\forall f = b(\xi) \in M[0, 1]$，有

$$f[x(t)] = \int_0^1 [x(t)](\xi) \cdot b(\xi) d\xi = \int_0^t b(\xi) d\xi, \quad \forall t \in [0, 1].$$

于是

$$\frac{d}{dt}(f[x(t)]) = b(t) \quad (\text{概})\ t \in [0, 1].$$

这样，如果$x(t)$在$[0,1]$上几乎处处有弱导数元为$y(t) \in L[0,1]$，$t \in [0, 1]$，那么，由本节定理 1 又可得

$$\frac{d}{dt}(f[x(t)]) = f(y(t)) = \int_0^1 [y(t)](\xi) b(\xi) d\xi,$$

$$\forall f = b(\xi) \in M[0, 1].$$

将以上两关系式合起来便导出$\forall f = b(\xi) \in M[0, 1]$，均有

$$\int_0^1 [y(t)](\xi) \cdot b(\xi) d\xi = b(t) \quad (\text{概})\ t \in [0, 1].$$

然而，对于关系式成立的任一点$t_0 \in [0, 1]$，当$y_0 = y(t_0)$时（当然有$y_0 \in L[0, 1]$)，有

$$\int_0^1 y_0(\xi) \cdot b(\xi) d\xi = b(t_0), \quad \forall b(\xi) \in M[0, 1],$$

其与§2.4中证明“δ-函数”不能用积分形式表出(从而L不是自反空间)的方法一样，上面的结果与$y_0(\xi)$积分的绝对连续性是矛盾的．此即证明了这里给出的抽象函数在$[0, 1]$上是不能几乎处处有弱导数的．验毕．

事实上，该反例中的抽象函数在$[0, 1]$上是“处处”不强可导的，这个结论作为习题留给读者来完成．

在本段最后，我们给出下面简单定理：

定理 5 设$x(t)$是在区域$G \subset \boldsymbol{K}$内定义的抽象函数．那么，

为了 $x(t) \equiv x_0(t \in G)$ 必须且只须（弱）$x'(t) \equiv \theta(t \in G)$.

证. 定理的必要性是显然的. 下面，我们证明其充分性. 首先，由上面定理 1 可知，$\forall f \in E^*$，数值函数 $f[x(t)]$ 在区域 G 内均是可导的，且有 $\frac{d}{dt}(f[x(t)]) = f[x'(t)]$，$\forall t \in G$（其中，$x'(t)$ 为抽象函数 $x(t)$ 的弱导数）. 这样一来，由定理假设我们导出

$$\frac{d}{dt}(f[x(t)]) = f(\theta) = 0, \quad \forall t \in G.$$

于是，由数学分析及复变函数论的知识，我们有 $f[x(t)] \equiv C(f)$，$\forall t \in G$（其中，$C(f)$ 为与 t 无关的常数）. 最后，当任取定一点 $t_0 \in G$，而令 $x_0 = x(t_0)$ 时，可知，$\forall t \in G$，均有

$$f[x(t)] = f[x(t_0)] = C(f), \quad \forall f \in E^*.$$

因而由 §3.1 定理 3 的推理，我们可推得以上两元是相等的，即

$$x(t) = x(t_0) = x_0, \quad \forall t \in G.$$

证毕.

（二）

下面讨论实抽象函数（即从实数域 $\boldsymbol{R}$ 到实 Banach 空间内的抽象函数）的 Riemann 积分问题.

定义 2. 设 $x(s)$ 是定义在实数区间 $[\alpha, \beta]$ 上而在实 Banach 空间 E 内取值的抽象函数，对 $[\alpha, \beta]$ 做任意有穷分割

$$\mathscr{P}:\ \alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = \beta,$$

做和

$$S_{\mathscr{P}} = \sum_{k=0}^{n-1} x(s_k)(s_{k+1} - s_k).$$

如果上面有序定向列 $(S_{\mathscr{P}})$（$\mathscr{P}$ 以"细分"来定"序"）强收敛于 E 中的一元 y，那么，$x(s)$ 称做在 $[\alpha, \beta]$ 上 Riemann 可积（简记为 (R)-可积）. 而 y 称做 $x(s)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的 Riemann 积分，表示为

$$y = \int_\alpha^\beta x(s)ds.$$

注 5. 与数学分析类似，由上面的定义，不难看出，在 $[\alpha,\beta]$ 区间上 (R) 可积的抽象函数一定是有界的.

下面，我们将对于强连续的抽象函数导出与平常数学分析中类似的关于 Riemann 积分的一个基本命题:

定理 6. 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上强连续的抽象函数 $x(s)$ 必定是 (R) 可积的.

证. $\forall\varepsilon>0$，由设 $x(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上强连续，因此，由 §6.1 我们可知 $x(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也是一致连续的，从而，$\exists\delta>0$，使得 $\forall s',s''\in[\alpha,\beta]$，有

$$|s'-s''|<\delta\Rightarrow\|x(s')-x(s'')\|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

取 $[\alpha,\beta]$ 区间的分割 $\mathscr{P}_0=\mathscr{P}(\delta)$，

$$\alpha=s_0<s_1<\cdots<s_{n-1}<s_n=\beta,\quad |s_{k+1}-s_k|<\delta$$
$$(k=0,1,\cdots,n-1).$$

那么，对任意的分割 $\mathscr{P}_1$，$\mathscr{P}_2$，只要 $\mathscr{P}_1>\mathscr{P}_0$，$\mathscr{P}_2>\mathscr{P}_0$，便可导出

$$\|S_{\mathscr{P}_1}-S_{\mathscr{P}_2}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\varepsilon. \tag{3}$$

这样，我们就可做出 E 中的一 Cauchy 列 $\{S_{\mathscr{P}_m}\}$，但由 E 的完备性，可导出一元 $y\in E$，使得

$$S_{\mathscr{P}_m}\to y\quad(m\to\infty).$$

同样由式 (3)，不难导出，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$(分割) $\mathscr{P}_\varepsilon$，当 $\forall$ (分割) $\mathscr{P}>\mathscr{P}_\varepsilon$，均有 $\|S_{\mathscr{P}}-y\|<\varepsilon$. 即证得 $x(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 是 (R) 可积的，且有 $\int_\alpha^\beta x(s)ds=y$. 证毕.

注 6. 与数学分析一样，我们容易推得以下有关抽象函数的 (R) 积分的基本性质:

1° 如果 $x(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 (R) 可积，那么，对任一列分法 $\{\mathscr{P}_m\}$ 只要

$$d(\mathscr{P}_m)=\max_{0\leqslant k\leqslant n_m}|s_{k+1}^{(m)}-s_k^{(m)}|\to0\quad(m\to\infty)$$

[其中，$\mathscr{P}_m: \alpha = s_0^{(m)} < s_1^{(m)} < \cdots < s_{n_m-1}^{(m)} < s_{n_m}^{(m)} = \beta$ ($m = 1, 2, \cdots$)]，则必有 $\lim_{m\to\infty} S_{\mathscr{P}_m} = \int_\alpha^\beta x(s)ds$.

2°在区间 $[\alpha, \beta]$ 上如果抽象函数 $x_1(s)$, $x_2(s)$ 均是 (R) 可积的，那么，$\forall\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}$, $\lambda_1 x_1(s) + \lambda_2 x_2(s)$ 亦 (R) 可积，且有

$$\int_\alpha^\beta [\lambda_1 x_1(s) + \lambda_2 x_2(s)]ds = \lambda_1 \int_\alpha^\beta x_1(s)ds + \lambda_2 \int_\alpha^\beta x_2(s)ds.$$

3°在 $[\alpha, \beta]$ 上，如果抽象函数 $x(s)$ 是强连续的(仅 (R) 可积不行)，那么，数值函数$\|x(s)\|$ 也必是 (R)-可积的，且有

$$\left\|\int_\alpha^\beta x(s)ds\right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \|x(s)\|ds.$$

4°在 $[\alpha, \beta]$ 上，如果抽象函数 $x(s)$ 是强连续的，数值函数 $\lambda(s) \geqslant 0$ 是连续的，那么，$\lambda(s)x(s)$ 必是 (R) 可积的，且有

(i) $\left\|\int_\alpha^\beta \lambda(s)x(s)ds\right\| \leqslant \max_{\alpha\leqslant s\leqslant\beta} \|x(s)\| \cdot \int_\alpha^\beta \lambda(s)ds$;

(ii) $\exists f_0 \in E^*$, $\|f_0\| = 1$; 及 $\exists s_0 \in [\alpha, \beta]$，使得

$$\left\|\int_\alpha^\beta \lambda(s) \cdot x(s)ds\right\| = f_0[x(s_0)] \cdot \int_\alpha^\beta \lambda(s)ds.$$

与上面关于弱导数存在的定理 1 类似，我们可以给出关于 $x(s)$ 的 (R) 可积性与其相应的数值函数 $f[x(s)]$ ($\forall f \in E^*$) 可积性之间的一个命题.

定理 7. 如果抽象函数 $x(s)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是(R)可积的，那么，$\forall f \in E^*$，数值函数 $f[x(s)]$ 均是 (R) 可积的，$\left(\text{且有} \int_\alpha^\beta f[x(s)]ds = f\left[\int_\alpha^\beta x(s)ds\right]\right)$；反之，当空间 E 是 (l^1) 时，逆命题也对.

证. 定理的前半段命题是容易的，只要注意到抽象函数 Riemann 可积的定义就不难导出. 下面，证明定理的后半段命题. 事实上，对任意一列分法 $\{\mathscr{P}_m\}$，当其满足

$$d(\mathscr{P}_m) = \max_{0\leqslant k\leqslant n_m} |s_{k+1}^{(m)} - s_k^{(m)}| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

[其中，$\mathscr{P}_m: \alpha = s_0^{(m)} < s_1^{(m)} < \cdots < s_{n_m-1}^{(m)} < s_{n_m}^{(m)} = \beta$ ($m = 1, 2, \cdots$)] 时，注意到 $f[x(s)]$ 均是 (R) 可积的假设，可以导出

$$f(S_{\mathscr{P}_m}) = \sum_{k=0}^{n_m-1} f[x(s_k^{(m)})]\,(s_{k+1}^{(m)} - s_k^{(m)})$$
$$\to \int_\alpha^\beta f[x(s)]ds \quad (m\to\infty); \quad \forall f\in E^*.$$

即 $\{S_{\mathscr{P}_m}\} = \left\{\sum_{k=0}^{n_m-1} x(s_k^{(m)})\,(s_{k+1}^{(m)} - s_k^{(m)})\right\}$ 为 E 中一弱 Cauchy 列，因而，由 (l^1) 中强、弱收敛等价，故知，$\exists y\in E$，使得

$$S_{\mathscr{P}_m} = \sum_{k=0}^{n_m-1} x(s_k^{(m)})\cdot(s_{k+1}^{(m)} - s_k^{(m)}) \underset{(弱)}{\longrightarrow} y \quad (m\to\infty).$$

同样地，注意到 $f[x(s)]$ $(\forall f\in E^*)$ 均 (R) 可积的假设，不难导出上面元 y 与那里分法 $\{\mathscr{P}_m\}$ 的选择是无关的，从而导出 $x(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是 (R) 可积的，且有 $\int_\alpha^\beta x(s)ds = y$. 证毕.

推理. 在 (l^1) 空间中取值的抽象函数 $x(t)$，只要它在 $[\alpha,\beta]$ 上是弱连续的，那么它必在 $[\alpha,\beta]$ 上是 (R) 可积的. 注 7. 在定理 7 中，即使空间是自反的，逆命题也未必正确.

最后，我们同样对于抽象函数也给出与微积分基本定理类似的命题：

定理 8 (Newton-Leibniz 公式). 如果抽象函数 $x(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有 (R) 可积的弱导数 $x'(s)$，那么，

$$\int_\alpha^\beta x'(s)ds = x(\beta) - x(\alpha).$$

证. 首先，由定理 6 可知，积分 $\int_\alpha^\beta x'(s)ds$ 是存在的，而且其确定了 E 中一元，$y = \int_\alpha^\beta x'(s)ds$. 其次，由上面定理 7 我们还可得到

$$f(y) = f\left[\int_\alpha^\beta x'(s)ds\right] = \int_\alpha^\beta f[x'(s)]ds, \quad \forall f\in E^*.$$

最后，由本节第(一)段关于弱可导与泛函对应的数值函数可导的关系以及数值函数推广的 Newton-Leibniz 公式，立即可以导出

$$f(y) = \int_\alpha^\beta f[x'(s)]ds = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(f[x(s)])ds$$
$$= f[x(\beta)] - f[x(\alpha)], \quad \forall f\in E^*.$$

而由 § 3.1 的推理也可得出

$$x(\beta)-x(\alpha)=y=\int_{\alpha}^{\beta}x'(s)ds.$$

证毕.

同样，利用上面定理 7 后的推理，类似定理 8 的证明方法，我们不难直接导出下面的推理:

推理. (l^1) 空间中取值的抽象函数 $x(t)$，只要它在 $[\alpha,\beta]$ 上有弱连续的弱导数 $x'(s)$，那么就有

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\text{弱})x'(s)ds=x(\beta)-x(\alpha)$$

成立.

习　　题

1．试证明：对于一个在 (l^p) $(p>1)$ 内取值的抽象函数 $x(t)=\{x_n(t)\}$ 而言，$x(t)$ 在 t_0 点"弱可导"的充要条件是

(i) 存在正常数 M_0 及 δ_0，使当 $0<|\delta|\leqslant\delta_0$ 时一致有

$$\sum_n\left|\frac{x_n(t_0+\delta)-x_n(t_0)}{\delta}\right|^p\leqslant M_0;$$

(ii) 各"坐标" $x_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 均在 t_0 点可导.

并且，当 $x(t)$ 在 t_0 点弱可导时，有 (弱) $x'(t_0)=\{x_n'(t_0)\}$.

2．试证明:对于在 (l^1) 空间取值的抽象函数 $x(t)=\{x_n(t)\}$ 而言，$x(t)$ 在 t_0 点"强可导"的充要条件是

(i) 各"坐标" $x_n(t)$ 均在 t_0 点存在导数 $x_n'(t_0)$ $(n=1,2,\cdots)$;

(ii) $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\delta_0>0$，N_0 (自然数)，使得当 $0<|\delta|\leqslant\delta_0$ 时，一致地有

$$\sum_{n>N_0}\left|\frac{x_n(t_0+\delta)-x_n(t_0)}{\delta}-x_n'(t_0)\right|<\varepsilon.$$

3．设 $x(t)$ 是在 $L[-\pi,\pi]$ 取值的抽象函数，

$$x(0)=\theta;\quad x(t)=t\sin\frac{\xi}{t},\text{当 } t\neq0,\ t\in[-\pi,\pi]\text{ 时},$$

试验证 $x(t)$ 在 $t=0$ 点是弱可导而不强可导的.

4．试证明：$[0,1]$ 到 $L[0,1]$ 内的抽象函数(强绝对连续)

$$[x(t)](\xi)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi\leqslant t\\ 0, & t<\xi\leqslant1\quad(0\leqslant t\leqslant1).\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上处处无强导数.

5. 试证明本节注 6 中关于抽象函数的 Riemann 积分的四条基本性质.

6. 试证明本节定理 8 后面的推理.

7. 设 T 是从 E 到 E_1 内的有界线性算子，$x(s)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 到 E 内的强连续抽象函数，试证明，取值 E_1 内的抽象函数 $T[x(s)]$ 亦在 $[\alpha,\beta]$ 上 (R) 可积，并且 $\int_\alpha^\beta T[x(s)]ds = T\left[\int_\alpha^\beta x(s)ds\right]$.

§ 6.3. 实抽象可测函数

在实变函数论中我们知道，为了处理一些问题，常常需要比 Riemann 积分更一般的 Lebesgue 积分. 因此，一个常用的方法就是先引进函数的"可测"的概念. 相应地，对于抽象函数的 Riemann 积分，当要作更一般地推广时，我们亦要引进函数可测的概念. 下面，我们先给出几个定义:

定义 1. 在测度空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中定义并在实 Banach 空间 E 中取值的抽象函数 $x(s)$ 称作弱可测的，是指 $\forall f\in E^*$，$f[x(s)]$ 均是 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上的(平常)数值可测函数(特别，我们常考查 $\Omega=[\alpha,\beta]$. $\alpha<\beta$ 均为实数，μ 为 Lebesgue 测度的情形，那么，上面即要求 $f[x(s)]$ 在 $[\alpha,\beta]$ 是 Lebesgue 可测函数).

定义 2. 如果 $x(s)$ 为上面定义的抽象函数，我们称 $x(s)$ 是可数值阶梯函数，是指 Ω 可以表示成可数个互不相交的可测集 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 的"并"，而在每个 A_k 上，$x(s)$ 取定常值 $x_k\in E$ $(k=1,2,\cdots)$.

定义 3. 上面 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上的抽象函数称为强可测的，是指存在一可数值阶梯函数列 $\{x_n(s)\}$，使得

$$x(s)=\lim_{n\to\infty}x_n(s),\quad (\text{概})\, s\in\Omega.$$

注 1. 由上面的定义易知，当 $E=\boldsymbol{R}$ 时强可测、弱可测及实值函数可测的三概念是等价的.

注 2. 当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时强可测定义中"可数值"阶梯函数列可以用"有限值"阶梯函数列来代替(两者是等价的). 事实上，设可数

值函数列 $\{x_n(s)\}$ 在 Ω 上概收敛于 $x(s)$，$x_n(s)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^{(n)}C_{A_k^{(n)}}(s)$ ($C_{A_k^{(n)}}(s)$ 为集 $A_k^{(n)}$ 的特征函数)$(n=1,2,\cdots)$. 由于 $\mu(\Omega)<\infty$，因此可以在每个 $x_n(s)$ 内留下"有限个"互不交的可测集 $A_k^{(n)}(k=1,2,\cdots,k_n)$. 并令 $\Omega\Big/\bigcup_{k=1}^{k_n}A_k^{(n)}=B_n$，使得 $\mu(B_n)<\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$，令 $B=\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n$，显然 $\mu(B)=0$，当再设 $\{x_n(s)\}$ 不收敛于 $x(s)$ 的集合为 B_0 时，则有 $\mu(B\cup B_0)=0$. 最后，我们来说明在集 $\Omega\backslash(B\cup B_0)$ 上，有限值可数函数 $x_n^\circ(s)=\sum_{k=1}^{k_n}x_k^{(n)}C_{A_k^{(n)}}(s)+\theta(n=1,2,\cdots)$ 亦是收敛于 $x(s)$ 的. 事实上，$\forall s\in\Omega\backslash(B\cup B_0)$，由于 $s\bar{\in}B$，故 $\exists N$，使 $n\geqslant N$ 时，有 $s\bar{\in}\bigcup_{n=N}^{\infty}B_n$，因而 $x_n^\circ(s)=x_n(s)$. 再由 $s\bar{\in}B_0$，故知亦有 $x_n^\circ(s)\to x(s)(n\to\infty)$. 此即证得结论.

下面，我们给出关于强、弱可测之间关系的一个定理:

定理 1. 在测度空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中，设 $x(s)$ 是强可测的，那么，必可导出: (i) $x(s)$ 弱可测; (ii) 实值函数 $\|x(s)\|$ 可测.

证. 1) 由 $x(s)$ 强可测的假设可知，$\forall f\in E^*$，$f[x(s)]$ 乃是实可数值阶段函数的概收敛的极限，从而，其亦必为可测的实函数，也即证毕 $x(s)$ 是弱可测的.

2) 由于 $x_n(s_0)\to x(s_0)$ $(n\to\infty)$ 就有 $\|x_n(s_0)\|\to\|x(s_0)\|$ $(n\to\infty)$，故由假设可知，实函数 $\|x(s)\|$ 乃是可数值阶段函数 $\|x_n(s)\|$ 概收敛的极限，从而亦是可测的. 证毕.

注 3. 与实值函数一样，我们容易证明下面关于可测函数的基本性质: 1° 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上，强(弱)连续的抽象函数必定是强(弱)可测的. 2° 在测度空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中强(弱)可测函数的线性组合亦是强(弱)可测的. 3° 如果 $x(s)$ 为 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中一强(弱)可测函数，而 $\alpha(s)$ 为有限实值可测函数，那么 $\alpha(s)\cdot x(s)$ 亦为强(弱)可测函数. 4° 如果 $\{x_n(s)\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 中一列弱可测函数，设 $x(s)\in E(\forall s\in\Omega)$ 有

$$x_n(s) \xrightarrow[(弱)]{} x(s) \quad (概)\, s \in \Omega,\ (n \to \infty),$$

那么 $x(s)$ 亦为弱可测函数(本节后面的定理将告诉我们，此性质对“强”可测也是正确的). 5° 如果 $x(s)$, $y(s)$ 均为 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$中的强可测函数，空间$E$中的元对于乘法是“封闭的”(即 $x, y \in E \Longrightarrow x \cdot y \in E$)且范数满足乘法不等式(即$\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$)，那么，$x(s)y(s)$ 亦为强可测函数.

注 4. 由定理，我们已知强可测必定蕴含着弱可测. 但是，弱可测未必可推得强可测.

*反例** 设Q为$[0, 1]$内的一个非L可测集，定义从$[0, 1]$到$l^2(\mathscr{N})$内的抽象函数(这里，$\mathscr{N}$ 表示“连续势”，即$l^2(\mathscr{N})$中的元的“坐标”是在$[0, 1]$上“连续”变化的)为

$$x(s) = (\cdots, x_\xi(s), \cdots), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1),$$

其中，$x_\xi(s)$: (i) 当 $s \notin Q$ 时 $x_\xi(s) \equiv 0\ (0 \leqslant \xi \leqslant 1)$; (ii) 当 $s \in Q$ 时，如果 $\xi \neq s$, $x_\xi(s) = 0$, 及 $\xi = s$, $x_\xi(s) = 1$，那么，由于 $x(s)$ 的每个“坐标” $x_{\xi_0}(s)$ 为

$$x_{\xi_0}(s) \equiv 0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1 \quad (当\ \xi_0 \notin Q\ 时),$$

$$x_{\xi_0}(s) = \begin{cases} 0, & s \neq \xi_0 \quad s \in [0, 1], \\ 1, & s = \xi_0, \end{cases} \qquad (当\ \xi_0 \in Q\ 时).$$

因而，$x_{\xi_0}(s)$ 为 $[0, 1]$ 上的可测函数 $(0 \leqslant \xi_0 \leqslant 1)$，也即 $x(s)$ 是弱可测的. 但另一方面，由于

$$\|x(s)\| = \sqrt{\sum_\xi |x_\xi(s)|^2} = \begin{cases} 0, & s \notin Q\ 时, \\ 1, & s \in Q\ 时, \end{cases}$$

所以导出 $\|x(s)\|$ 为不可测集Q的“特征函数”，且是不可测的. 这样，由定理1，知 $x(s)$ 在 $[0, 1]$ 不是强可测的.

下面，为了导出关于强、弱可测性等价的充要条件，我们先给出“可分值”的概念:

定义 4. 抽象函数 $x(s)$ 称为取可分值的，是指它的值域 $\{x(s) | s \in \Omega\}$ 是可分的，称为几乎取可分值的，是指存在一子集 $\Omega_0 \subset \Omega$，使得 $\mu(\Omega_0) = 0$，而值域集 $\{x(s) | s \in \Omega \backslash \Omega_0\}$ 是可分的.

引理. 设 $x(s)$ 是测度空间 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上几乎取可分值的弱可测实抽象函数. 那么, $\|x(s)\|$ 是实值可测函数.

证. 不妨设 $x(s)$ 是取可分值的, 否则可令 $x(s)=\theta, \forall s\in\Omega_0$. 而这样改变,并不影响 $\|x(s)\|$ 的可测性(因为 $\mu(\Omega_0)=0$). 从而, 即知值域 $x(\Omega)=\{x(s)\,|\,s\in\Omega\}$ 是可分的. 下面,我们就来证明本引理的结论.

首先,我们令 $E_0=\overline{[\{x(s)\,|\,s\in\Omega\}]}$ (该集的"线性闭扩张"). 由于 E_0 是 Banach 空间 E 中的闭线性子空间,故其亦为一 Banach 空间. 并且由假设还知 E_0 是可分的. 因此由 § 3.5 定理 4 的结果, 可知 E_0^* 上的闭单位球 $\bar{S}_1^*$ 必定是"$*$弱可分"的. 今设 $\{f_n^0\}\subset\bar{S}_1^*$ 为"$*$弱稠"于 $\bar{S}_1^*$ 的泛函集. 其次,我们假设

$$g(s)=\sup_n f_n^0[x(s)], \quad \forall s\in\Omega$$

(其中, $\{f_n^0\}\subset\bar{S}_1^*\subset E_0^*$),那么,注意到 $E\subset E^{**}$,以及 E_0^* 上的元 f^0 均可"保范延拓"为 E^* 中的元 f. 因此我们可以得到

$$\begin{aligned}\|x(s)\| &= \sup\{|f[x(s)]|\,|\,\|f\|=1, f\in E^*\}\\ &\geqslant \sup\{|f^0[x(s)]|\,|\,\|f^0\|=1, f^0\in E_0^*\},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \forall s\in\Omega.\end{aligned}$$

即 $\|x(s)\|\geqslant g(s)$, $\forall s\in\Omega$. 但, 如果有一点 $s_0\in\Omega$, 使上面有严格不等式

$$\|x(s_0)\|>g(s_0)=\sup_n f_n^0[x(s_0)]$$

成立时,由 § 3.1 定理 3,我们可知, $\exists f_\Delta\in E^*$ (其相应地在 E_0 上为有界泛函 f_Δ^0), 使得 $\|f_\Delta\|=1$,且有

$$f_\Delta^0[x(s_0)]=f_\Delta[x(s_0)]=\|x(s_0)\|.$$

于是,将上两关系式合起来,可导出

$$f_\Delta^0[x(s_0)]>\sup_n f_n^0[x(s_0)].$$

然而, 由于 $\|f_\Delta^0\|_{E_0^*}\leqslant 1$, 故 $f_\Delta^0\in\bar{S}_1^*$. 于是,上式显然与 $\{f_n^0\}$"$*$弱稠"于 $\bar{S}_1^*$ 矛盾. 从而便导出

$$\|x(s)\|=\sup_n f_n^0[x(s)], \quad \forall s\in\Omega.$$

最后，由 $\forall f_n^0 \in E_0^*$，其均可"保范延拓"为 $f_n \in E^*$ ($n = 1, 2, \cdots$). 那么，上式可变为

$$\|x(s)\| = \sup_n f_n[x(s)], \quad \forall s \in \Omega.$$

但注意到 $x(s)$ 是弱可测的假设，由 $f_n[x(s)]$ ($n = 1, 2, \cdots$) 均为可测实值函数，我们不难知道它们的"上包络"(即 $\|x(s)\|$) 也是可测的. 证毕.

有了上面的引理我们就可给出下面联系强弱可测两个概念的定理:

定理 2 (Pettis 定理). 为了抽象函数 $x(s)$ 是强可测的，必须且只须它是弱可测并且几乎取可分值的.

证. 1) "$\Longrightarrow$" 首先由定理 1 可知，$x(s)$ 是弱可测的，故余下仅须证明其几乎取可分值. 事实上，由假设 $x(s)$ 是强可测的，故存在一可数值阶梯函数列 $\{x_n(s)\}$ 及零测集 Ω_0，使得

$$x(s) = \lim_{n \to \infty} x_n(s), \quad \forall s \in \Omega \backslash \Omega_0.$$

又因为 $\forall n$，$x_n(s)$ 仅取空间 E 中的可数个值；故知集 $\{x_n(s) | s \in \Omega, n = 1, 2, \cdots\}$ 亦是可数的，从而，$\forall s_0 \in \Omega \backslash \Omega_0$，均有

$$x(s_0) \in \overline{\{x_n(s) |, s \in \Omega, n = 1, 2, \cdots\}}.$$

即 $x(\Omega \backslash \Omega_0) = \{x(s) | s \in \Omega \backslash \Omega_0\} \subset \overline{\{x_n(s) | s \in \Omega, n = 1, 2, \cdots\}}$(其中，$\mu(\Omega_0) = 0$). 由 §1.3 的定理 1 (可分距离空间的子集必为可分的)，此即导出 $x(\Omega \backslash \Omega)_0)$ 也是可分的，从而推得 $x(s)$ 是几乎取可分值的.

2) "$\Longleftarrow$" 首先，由假设不妨认为 $x(\Omega)$ 是可分的(因为由定义可知，当改变一"零测集"的值时，并不影响函数的强可测性)，因而有元列 $\{x_n\} \subset x(\Omega)$，使得

$$\overline{\{x_n\}} = x(\Omega). \tag{1}$$

这时，$\forall m$ (自然数)，做 Ω 中的集列

$$G_{n,m} = \left\{ s \,\Big|\, \|x(s) - x_n\| < \frac{1}{m} \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

那么，由式 1 易知，这里的集列 $G_{n,m}$ ($n = 1, 2, \cdots$). 复盖了 Ω,

也即有 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{n,m}(m=1,2,\cdots)$. 其次，又因为 $x(s)$ 假设是弱可测的，当然对于常元 x_n 可知抽象函数 $(x(s)-x_n)(n=1,2,\cdots)$ 亦是弱可测的，故由上面引理推知 $\|x(s)-x_n\|$ $(n=1,2,\cdots)$ 是实值可测函数. 从而我们可导出上面的每一集 $G_{n,m}(n,m=1,2,\cdots)$ 均是可测集.

最后，我们对于每个自然数 m，由 $\{G_{n,m}|n=1,2,\cdots\}$ 做互斥集列 $\{A_{n,m}|n=1,2,\cdots\}$，$A_{n,m}=G_{n,m}\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1} G_{k,m}$；那么，我们亦有 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,m}(m=1,2,\cdots)$. 然后我们做抽象函数列 $\{x_m(s)\}$，

$$x_m(s)=x_1，当\ x\in A_{1,m};=x_2，当\ x\in A_{2,m};\cdots;=x_n，\\ 当\ x\in A_{n,m};\cdots\quad(m=1,2,\cdots).$$

那么，显然可见 $\{x_m(s)\}$ 是一可数值的阶梯函数列，且由集 $G_{n,m}$ 及 $A_{n,m}$ 的做法，可知在 Ω 上必一致地有

$$\sup_{s\in\Omega}\|x_m(s)-x(s)\|\leqslant\sup_{n\geqslant 1}\{\|x_n-x(s)\|\,|\,s\in A_{n,m}\}\\ <\frac{1}{m}\to 0\quad(m\to\infty).$$

从而导出 $x(s)$ 为一可数值阶梯函数列 $\{x_m(s)\}$ 的"一致收敛"极限，即证得 $x(s)$ 是强可测的. 证毕.

在定理证明中，我们直接可以得到下面关于强可测的更强一些的结果:

推理 1. 为了函数 $x(s)$ 是强可测的，必须且只须存在一可数值阶梯函数列 $\{x_n(s)\}$，使得

$$x_n(s)\xrightarrow[(一致)]{} x(s),\quad(概)\ s\in\Omega(n\to\infty).$$

推理 2. 对于取值在可分空间的抽象函数而言，强可测性与弱可测性是等价的概念.

推理 3. 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上定义的左(或右)弱连续的抽象函数必是强可测的.

关于强可测抽象函数列的极限函数可测性的问题，我们有下面较好的结果：

定理 3. 设 $x_n(s)(n=1,2,\cdots)$ 均为测度空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上的强可测抽象函数，并设

$$x_n(s) \xrightarrow[(弱)]{} x(s) \quad (概)\, s\in\Omega(n\to\infty),$$

那么 $x(s)$ 必也是强可测的.

证. 首先，由假设可知，$\exists B_0\subset\Omega$，使得 $\mu(B_0)=0$，且有

$$x_n(s)\to x(s)\quad(n\to\infty);\ \forall s\in\Omega\backslash B_0. \tag{2}$$

于是由 $x_n(s)(n=1,2,\cdots)$ 均强可测的假设，及 Pettis 定理的必要性结论，可知它们均是几乎取可分值的. 即存在相应的集 $B_n\subset\Omega$，使得 $\mu(B_n)=0$，并且 $x_n(\Omega\backslash B_n)(n=1,2,\cdots)$ 均是取可分值的. 今令 $\Omega_0=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}B_n$，显然 $\mu(\Omega_0)=0$，并且 E 的闭线性子空间 $E_0=\overline{[\{x_n(\Omega\backslash B_n)\}]}$ 是可分的. 这样注意到式 (2) 以及 § 4.5 中定理 4 可导出 $x(\Omega\backslash\Omega_0)\subset E_0$，故 $x(\Omega\backslash\Omega_0)$ 也必是可分的，此即导出 $x(\Omega)$ 是几乎取可分值的.

另一方面，由定理 1，可知 $x_n(s)(n=1,2,\cdots)$ 亦为弱可测的. 因此由该定理后面的注 3，可得其弱极限函数 $x(s)$ 也是弱可测的.

最后，综合 $x(s)$ 的上述两个性质，再利用 Pettis 定理充分性，立即可导出抽象函数 $x(s)$ 也是强可测的. 证毕.

与实变函数类似，对抽象函数列 $\{x_n(s)\}$ 定义

$$\mu(s\,|\,\|x_n(s)-x(s)\|\geqslant\sigma)\to 0,\ \forall\sigma>0\quad(n\to\infty)$$

为 $\{x_n(s)\}$ 依测度收敛于 $x(s)$ 时，我们也可得到定理 3 的一个推理：

推理. 把定理 3 中的“概弱收敛”换为“依测度收敛”，命题仍真.

在本节最后，与实变函数论一样，我们还可得到两个重要的定理，它们分别给出了强可测抽象函数的“概(逐点)收敛“与”一致收敛”，“强可测”性与“强连续”性之间的内在深刻联系(其证明作为

习题请读者完成).

定理 4 (Егоров 定理). 设 $\mu(\Omega) < \infty$, $\{x_n(s)\}$ 为测度空间 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上定义的一列强可测抽象函数. 那么, 只要有

$$x_n(s) \to x(s) \quad (\text{概})\ s \in \Omega (n \to \infty);$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathscr{B}$, 使得 $\mu(A) < \varepsilon$, 且

$$x_n(s) \underset{(\text{一致})}{\Longrightarrow} x(s) \quad (n \to \infty);\ \forall s \in \Omega \backslash A.$$

定理 5 (Лузин 定理). 设 $x(t)$ 为测度空间 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上定义的强可测抽象函数. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ (闭集) 使得 $\mu(\Omega \backslash F) < \varepsilon$, 且 $x(t)$ 在 F 上是强连续的.

推理 设 $x(t)$ 为 $\Omega = [\alpha, \beta]$ 上的强可测抽象函数. 那么, $\forall \varepsilon > 0$, 必有在 $[\alpha, \beta]$ 上强连续的一抽象函数 $y(t)$, 使得

$$\mu(s \mid x(s) \neq y(s), \quad s \in [\alpha, \beta]) < \varepsilon;$$

且当 $\|x(s)\| \leqslant \beta$ 时亦有 $\|y(s)\| \leqslant \beta (\forall s \in [\alpha, \beta])$.

注 5. 在距离空间中, 闭集上的连续函数均可"保界延拓"到全空间, 因此, 上面的推理可以推广到 Ω 为任意距离空间的情况.

习 题

1. 试证明本节注 1.
2. 试证明本节注 3 中关于可测函数的五个基本性质.
3. 试证明本节定理 2 后面的推理 3.
4. 试证明本节定理 3 后面的推理.
5. 试证明关于抽象函数的 Егоров 定理(定理 4).
6. 试证明关于抽象函数的 Лузин 定理(定理 5).
7. 试证明本节定理 5 后面的推理.

§6.4. 实可测函数的 Pettis 积分与 Bochner 积分

类似实变函数论, 由 (R)-积分推广到 (L)-积分的不同途径, 在抽象函数中, 也可以把上面 Riemann 积分以各种形式推广. 例如有以实变函数中 Fréchet 定理或 Лузин 定理为基本出发点, 从

而先由连续函数的抽象积分,定义到一般的抽象函数的积分;也有从阶梯函数的积分,定义到一般函数积分等等.

本节仅简单介绍目前使用最广泛的 Pettis 积分与 Bochner 积分的定义及其基本性质.

(一)

定义 1. 定义在测度空间 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 上而在实的 Banach 空间 E 中取值的抽象函数 $x(s)$ 称为 Pettis 可积的 ((P) 可积),是指存在一元 $x_0 \in E$,使得 $\forall f \in E^*$, Lebesgue 积分 $\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$ 均存在,且有 $\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds) = f(x_0)$. 这时,我们记

$$(P)\int_\Omega x(s)\mu(ds) = x_0 \text{ 或就写成 } \int_\Omega x(s)\mu(ds) = x_0.$$

并称元 x_0 是抽象函数 $x(s)$ 在 Ω 上的 Pettis 积分(简记为 (P) 积分).

注 1. 由上面的定义易知,1° 当 $E = \boldsymbol{R}$ 时, Pettis 积分与通常的 Lebesgue 积分意义相同;2° 在 Ω 上,如果 $x(t)$ 是 Pettis 可积的那么,它也必是弱可测的; 3° 当 $x(s)$ 在 Ω 上的 (P) 积分为 x_0 时(由 Hahn-Banach 定理可知), x_0 是唯一确定的.

关于 $x(s)$ 的 Lebesgue 积分 $\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$ $(\forall f \in E^*)$ 存在与其 (P) 积分 $(P)\int_\Omega x(s)\mu(ds) = x_0$ 存在的关系,我们有下面的定理:

定理 1. 如果 E 为自反空间,那么,只要

$$\forall f \in E^*,\ (L)\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$$

均存在,则 $x(s)$ 的 Pettis 积分也存在.

证. 首先,我们令

$$F(f) = \int_\Omega f[x(s)]\mu(ds), \quad \forall f \in E^*.$$

由定理假设,可知 F 是 E^* 上的一个线性泛函.

其次同样由假设我们可以定义一个由 E^* 到 $L^1(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 空间内的线性算子 T,

$$\mathrm{T}(f)=f[x(s)],\quad \forall f\in E^*\quad (s\in\Omega).$$

易见,T 显然是分配的. 下面验证它是闭算子. 事实上,当设 $f_n\to f_0$ 和 $\mathrm{T}(f_n)\to y(n\to\infty)$; $(f_n,f_0\in E^*\ \ \forall n,)$ 时,显然有 $f_0\in\mathscr{D}(\mathrm{T})$,并且有

$$\begin{aligned}|f_n[x(s)]-f_0[x(s)]|&=|(f_n-f_0)[x(s)]|\\&\leqslant\|f_n-f_0\|\|x(s)\|\to 0,\ \forall s\in\Omega\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

即 $f_n[x(s)]\xrightarrow[(逐点)]{}f_0[x(s)](s\in\Omega)$. 此外,由假设条件

$$\|\mathrm{T}(f_n)-y\|_{L^1}=\|f_n[x(s)]-y(s)\|_{L^1}\to 0\quad(n\to\infty).$$

故由 § 1.2 注 3 我们可知 $\{f_n[x(s)]\}$ 有子列 $\{f_{n_k}[x(s)]\}$ 存在,使得

$$f_{n_k}[x(s)]\xrightarrow[(逐点)]{}y(s),\quad (概)s\in\Omega(n\to\infty).$$

从而导出 $f_0[x(s)]=y(s)$,(概) $s\in\Omega$. 即在 $L^1(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 空间中有 $\mathrm{T}(f_0)=y$,此即证得 T 为在 (B) 空间 E^* 上定义的闭线性算子,故由 § 5.2 中定理 2 可知,T 必为有界线性算子.

最后,回到最初 E^* 上定义的泛函 F,利用上面的结果可得到

$$\begin{aligned}|F(f)|&\leqslant\int_\Omega|f[x(s)]|\mu(ds)=\|\mathrm{T}(f)\|\\&\leqslant\|\mathrm{T}\|\|f\|,\quad\forall f\in E^*.\end{aligned}$$

此即 F 是 E^* 上的有界线性泛函,即有 $F\in E^{**}$,而当注意到 E 的自反性时,则可唯一确定一元 $x_0\in E$,使得 $F(f)=f(x_0)$, $\forall f\in E^*$,即导出

$$\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)=f(x_0).$$

证毕.

推理. 在定理 1 中(E 未必自反),必存在一元 $\tilde{x}_0\in E^{**}$,使得

$$\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)=\tilde{x}_0(f),\quad\forall f\in E^*.$$

注 2. 上面的命题,从形式上看,当 E 不是自反的时,一般仅从 $\forall f\in E^*$,$(L)\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$ 的存在,是保证不了 $x(s)$ 的 (P)

积分 x_0 存在的.

反例. 设 $x(s)$ 为定义在 $[0,1]$ 上取值在 (c) 内的抽象函数, $x(s)=\{x_n(s)\}$, $0\leqslant s\leqslant 1$; 其中,

$$x_1(s)\equiv 0;\quad x_{2n}(s)\equiv 0;$$

$$x_{2n+1}(s)=\begin{cases}2n, & \text{当 } 0<s\leqslant\dfrac{1}{2n} \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } s\in[0,1] \text{ 为其它值时}\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots).$$

那么, $\forall f\in(c)^*=(l^1)$ (数值) 函数 $f[x(s)]$ 在 $[0,1]$ 上均 (L) 可积,但是 $x(s)$ 不是 (P) 可积的.

验. 从上面 $x(s)$ 的定义不难看出 $x(s)$ 的形式,

当 $\dfrac{1}{2}<s\leqslant 1$ 时, $x(s)=(0,0,\cdots,0,\cdots)$;

当 $\dfrac{1}{4}<s\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, $x(s)=(0,0,2,0,\cdots)$;

当 $\dfrac{1}{6}<s\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时, $x(s)=(0,0,2,0,4,0,\cdots)$;

当 $\dfrac{1}{2n}<s\leqslant\dfrac{1}{2(n-1)}$ 时,

$$x(s)=(0,0,2,0,4,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\(2n-1)}}{2(n-1)},0,0,\ 0,0,\cdots);$$

……

因而, $\forall f=\{b_n\}\in(c)^*=(l^1)$, 有

$$\int_0^1 f[x(s)]ds=\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_nx_n(s)\right]ds$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}}+\cdots+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2(n-1)}}+\cdots$$

$$=0+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot b_3+\frac{1}{12}(2b_3+4b_5)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2n(n-1)}(2b_3+4b_5+\cdots$$

$$+2(n-1)b_{2n-1})+\cdots,$$

注意到

$$\frac{1}{k(k-1)}+\frac{1}{(k+1)k}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots=\frac{1}{k-1}.$$

故可知上面的积分

$$\int_0^1 f[x(s)]ds = b_3+b_5+b_7+\cdots+b_{2n+1}+\cdots$$

存在．但另一方面，由于 $(c)^{**}=(m)$ 中元 $\tilde{x}_0=(0,0,1,0,1,0,1,\cdots,0,1,\cdots)\notin(c)$，因此知 $x(s)$ 在 $[0,1]$ 不是 (P) 可积的．验毕．

注 3. 由注 1，我们已知 (P) 可积的抽象函数 $x(s)$ 必是弱可测的，但是一般说来它未必是强可测的．

反例．*取 § 6.3 定理 1 后面关于弱可测而不强可测的例子．那么，由于 $\forall f=\{f_\xi\}\in[l^2(\mathscr{N})]^*$，必有 $f=\{b_{\xi_n}\}\in(l^2)$，从而知 $f[x(s)]=\sum_{n=1}^{\infty}b_{\xi_n}\cdot x_{\xi_n}(s)$，且由 $x_\xi(s)$ 的假设还知 $f[x(s)]$ 为除可数个点外均取 0 值的函数，因此有

$$\int_0^1 f[x(s)]ds=f(\theta),\quad \forall f\in[l^2(\mathscr{N})]^*.$$

即 $x(s)$ 的 (P) 积分为 θ（然而前面已知 $x(s)$ 不是强可测的）．

注 4. 与数值函数积分一样，我们不难从定义得到关于 Pettis 积分的以下基本性质：当设 $x(s),y(s)$ 均为测度空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上定义的 (P) 可积抽象函数．那么，

1°. $\alpha x(s)+\beta y(s)$ 亦是 (P) 可积的，且有

$$(P)\int_\Omega[\alpha x(s)+\beta y(s)]\mu(ds)$$
$$=\alpha(P)\int_\Omega x(s)\mu(ds)+\beta(P)\int_\Omega y(s)\mu(ds);$$

2°. 如果 $x(s)=y(s)$（概）$s\in\Omega$，则

$$(P)\int_\Omega x(s)\mu(ds)=(P)\int_\Omega y(s)\mu(ds);$$

3°. 如果 $x(s)$ 是有限值阶梯函数 $x(s)=\sum_{k=1}^{n}x_kC_{A_k}(s)$ $\Big($其中，$C_{A_k}(s)$ 为集 A_k 的特征函数，A_k 为互不相交的可测集（$k=1,2,\cdots,n$），$\Omega=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)$，则

$$(P)\int_\Omega x(s)\mu(ds)=\sum_{k=1}^{n}x_k\mu(A_k);$$

4°. 如果 E 为自反空间，那么，当 $\alpha(s)$ 是"本性有界"的实值 (L) 可积函数时，抽象函数 $\alpha(s)x(s)$ 也必为 (P) 可积的.

注 5. 我们必须注意的是，本节注 4 中的 4）当 E 不是自反空间的时候未必成立.

反例. 设 $x(s)$ 为从 $[0,1]$ 到空间 (c_0) 内的抽象函数，

$$x(s)=\begin{cases}\dfrac{e_n}{\mu(A_{2n-1})}, & \text{当 } s\in A_{2n-1}\text{ 时}\\[2ex] \dfrac{-e_n}{\mu(A_{2n})}, & \text{当 } s\in A_{2n}\text{ 时}\quad(n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

$\Big($其中，$e_n=(0,\cdots,0,\underset{(n)}{1},0,\cdots)(n\geqslant 1)$；$A_n(n=1,2,\cdots)$ 为 $[0,1]$ 内互不相交的正测度可测集，且有 $[0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)$，设数值函数 $\alpha(s)$，

$$\alpha(s)=\begin{cases}1, & \text{当 } s\in A_{2n-1}\text{ 时}\\ 0 & \text{当 } s\in A_{2n}\text{ 时}\quad(n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

那么，$x(s)$ 是 (P) 可积抽象函数，$\alpha(s)$ 为有界 (L) 可积函数，但 $\alpha(s)x(s)$ 不是 (P) 可积函数.

验. 首先，由其做法显然可知，$\alpha(s)$ 是有界 (L) 可积的. 其次，我们有 $\forall f=\{b_i\}=(c_0)^*=(l^1)$，

$$f[x(s)] = \begin{cases} \dfrac{b_n}{\mu(A_{2n-1})}, & \text{当 } s \in A_{2n-1} \text{ 时} \\ -\dfrac{b_n}{\mu(A_{2n})}, & \text{当 } s \in A_{2n} \text{ 时} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

为可测函数;且有

$$\int_0^1 f[x(s)]ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0, \quad \forall f = \{b_n\} \in (l^1).$$

即导出

$$\int_0^1 f[x(s)]ds = f(\theta), \quad \forall f \in (c_0)^*.$$

此即说明 $x(s)$ 在 $[0, 1]$ 是 (P) 可积的. 最后,注意到

$$\int_0^1 f[\alpha(s)x(s)]ds = \int_{\bigcup_n A_{2n-1}} f[x(s)]\mu(ds)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n = f(z_0), \quad \forall f = \{b_n\} \in (c_0)^*.$$

但 $z_0 = (1, 1, \cdots) \notin (c_0)$. 故知 $\alpha(s)x(s)$ 在 $[0, 1]$ 上不是 (P) 可积的. 验毕.

在本段最后,我们再来介绍一个关于 Pettis 积分与有界线性算子相互可交换的定理:

定理 2. 设 T 是由 E 到 E_1 内的有界线性算子,那么,如果 $x(s)$ 是在 E 中取值的 Pettis 可积函数,则 $\mathrm{T}[x(s)]$ 必是在 E_1 中取值的 Pettis 可积函数,且有

$$(P)\int_\Omega \mathrm{T}[x(s)]\mu(ds) = \mathrm{T}[(P)\int_\Omega x(s)\mu(ds)].$$

证. 由 Pettis 积分的定义以及 Hahn-Banach 定理,可知,只要能证明,$g(\mathrm{T}[x(s)])$ 均是 (L) 可积的,且满足

$$\int_\Omega g(\mathrm{T}[x(s)])\mu(ds) = g[\mathrm{T}(x_0)]; \quad \forall g \in E_1^*$$

$\left(其中，x_0 = (P)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right)$；那么定理就证得了．下面验证这个结论．

由于T是有界线性算子，故知其共轭算子 T^* 存在，且仍是有界线性算子，因而 $\forall g \in E_1^*$，有 $T^* g \in E^*$，并由 $x(s)$ 的假设可知，

$$g(T[x(s)]) = (T^* g)[x(s)], \quad \forall s \in \Omega$$

均是 (L) 可积的．由此可推得

$$\int_\Omega g(T[x(s)])\mu(ds) = \int_\Omega (T^* g)[x(s)]\mu(ds)$$
$$= (T^* g)(x_0) = g(T x_0), \quad \forall g \in E_1^*.$$

但根据 Pettis 积分的定义，可导出

$$(P)\int_\Omega T[x(s)]\mu(ds) = T(x_0) = T\left((P)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right).$$

证毕．

注 6. 如果抽象函数在某种定义下的积分，当函数取值的空间 E 变为 $\boldsymbol{R}$ 时，就变为平常的 Lebesgue 积分，而且还满足上面定理 2，那么，此抽象函数必也是 Pettis 可积的，并且其积分值与其 Pettis 积分值相同（这是明显的，只要在上面定理 2 中取 $E_1 = \boldsymbol{R}$ 则可直接导出上述结论）．

注 7. Pettis 积分与 Lebesgue 积分的一些性质有相似之处，例如，(强)完全可加性，绝对连续性，控制收敛定理等等，这里不予详细讨论．有兴趣的读者可以参看文献 [117] 等．

（二）

下面讨论“Bochner 积分”．首先，我们给出下面定义：

定义 2. 称 $x(s)$ 是 Bochner 可积的（简记为 (B) 可积），是指

(i) $x(s) = x^\circ(s)$ 是可数值阶梯函数，且 $\|x^\circ(s)\|$ 是 Lebesgue 可积的，而这时定义其 Bochner 积分

$$(B)\int_\Omega x^\circ(s)\mu(ds) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mu(A_k) \quad (强极限)$$

(这里已设 $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k(k = 1,2,\cdots)$ 为互不相交的可测集；且 $x^0(s) = x_k \in E$, $\forall s \in A_k(k = 1, 2, \cdots, n)$);

(ii) $x(s)$ 是上面 Bochner 可积的可数值阶梯函数列 $\{x_n^0(s)\}$ 概收敛的强极限，且有

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|x(s) - x_n^0(s)\| \mu(ds) = 0,$$

而这时定义其 Bochner 积分

$$(B)\int x(s)\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} (B)\int x_n^0(s)\mu(ds).$$

注 8. 为了说明上面定义 2 中 (ii) 的合理性，我们需要解释两点，即极限 $\lim_{n\to\infty} (B)\int_\Omega x_n^0(s)\mu(ds)$ 是存在的，并且关于 $x(s)$ 是一意确定的. 事实上，由(注意到关于积分极限的假设)

$$\begin{aligned}
&\left\|(B)\int_\Omega x_n^0(s)\mu(ds) - (B)\int_\Omega x_m^0(s)\mu(ds)\right\| \\
&= \left\|(B)\int_\Omega [x_n^0(s) - x_m^0(s)]\mu(ds)\right\| \\
&\leqslant \int_\Omega \|x_n^0(s) - x_m^0(s)\|\mu(ds) \\
&\leqslant \int_\Omega \|x_n^0(s) - x(s)\|\mu(ds) \\
&\quad + \int_\Omega \|x_m^0(s) - x(s)\|\mu(ds) \to 0 \quad (n, m \to \infty),
\end{aligned}$$

可知 $\left\{(B)\int_\Omega x_n^0(s)\mu(ds)\right\}$ 是 E 中一 Cauchy 列，因而由 E 的完备性我们立即可以导出，其在 E 内是存在极限的. 其次，如果另一可数值阶梯函数列 $\{x_n(s)\}$ 对于 $x(s)$ 也有上面定义 2 中 (ii) 的假设条件成立，那么我们再做一个可数值阶梯函数列 $\{y_n(s)\}$,

$$y_n(s) = \begin{cases} x_k^0(s), & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时} \\ x_k(s), & \text{当 } n = 2k \text{ 时} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

$\{y_n(s)\}$ 显然亦是满足那里的假设条件的，从而

$$\lim_{n\to\infty} (B)\int_{\Omega} y_n(s)\mu(ds)$$

也是存在的. 这样,注意到元列

$$\left\{(B)\int_{\Omega} x_n^0(s)\mu(ds)\right\} \text{ 和 } \left\{(B)\int_{\Omega} x_n(s)\mu(ds)\right\}$$

均为元列

$$\left\{(B)\int_{\Omega} y_n(s)\mu(ds)\right\}$$

的子列,因而它们均收敛于 E 中的同一元.

下面，我们给出一个抽象函数为 Bochner 可积的充要条件的命题，由此我们可以看出该积分定义的一个重要价值就在于容易用简单的概念来表征它.

定理 3. 为了 $x(s)$ 是 Bochner 可积的,必须且只须 $x(s)$ 是强可测的,并且 $\|x(s)\|$ 是 Lebesgue 可积的.

证. 1) "$\Longrightarrow$" 由 $x(s)$ 是 Bochner 可积的,故由其一般定义可知它是一可数值阶梯函数列 $\{x_n^0(s)\}$ 的概收敛的强极限，从而它是强可测的;且由

$$\int_{\Omega} \|x(s)\|\mu(ds) \leqslant \int_{\Omega} \|x(s) - x_n^0(s)\|\mu(ds) + \int_{\Omega} \|x_n^0(s)\|\mu(ds) < \infty,$$

从而推得 $\|x(s)\|$ 是 (L) 可积的.

2) "$\Longleftarrow$" 由于 $\|x(s)\|$ 是 (L) 可积的,故知 $\forall n$ (自然数)均有 $\mu\left(s\,|\,\|x(s)\| > \frac{1}{n}\right) < \infty$. 因而存在互不相交的可测集 A_n,使得 $0 < \mu(A_n) < \infty$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 且有

$$\Omega_1 = (s\,|\,\|x(s)\| > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

再注意到 $x(s)$ 强可测的假设，由上节 Pettis 定理的推理 1 可知 $\forall m$ (自然数), $\forall A_n (n \geqslant 1)$, 我们均能找到一个 "可数值" 阶梯函数 $x_n^{(m)}(s)$, 使其一致地有

$$\|x_n^{(m)}(s) - x(s)\| < \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \cdot \frac{1}{m}, \quad (\text{概})\, s \in A_n. \tag{1}$$

今在整个 Ω 上定义抽象函数 $x^{(m)}(s)$，使得

$$x^{(m)}(s) = \begin{cases} x_n^{(m)}(s), & \text{当 } s \in A_n \text{ 时} \quad (n = 1, 2, \cdots), \\ \theta, & \text{当 } s \in \Omega \backslash \Omega_1 \text{ 时} \quad (m = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

那么，我们可以看到，这时 $x^{(m)}(s)(m \geqslant 1)$ 亦是可数值的阶梯函数，且有

$$\|x^{(m)}(s) - x(s)\| \to 0 \quad (\text{概})\, s \in \Omega \ (m \to \infty).$$

而由上式(1)，我们还可得到

$$\int_\Omega \|x^{(m)}(s) - x(s)\| \mu(ds) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot \mu(A_n)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \mu(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

以及

$$\int_\Omega \|x^{(m)}(s)\| \mu(ds) \leqslant \int_\Omega \|x^{(m)}(s) - x(s)\| \mu(ds) + \int_\Omega \|x(s)\| \mu(ds)$$

$$< \frac{1}{m} + \int_\Omega \|x(s)\| \mu(ds) < \infty \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

因而，我们由上面后一关系式可知，可数值的阶梯函数 $x^{(m)}(s)$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 均是 Bochner 可积的，并且由上面前一关系式还可导出

$$\lim_{m \to \infty} \int_\Omega \|x^{(m)}(s) - x(s)\| \mu(ds) = 0.$$

此即得出 $x(s)$ 是 Bochner 可积的. 证毕.

在上面定理充分性的证明中，其实我们已得到了一个更强的结果(这在后面定理 6 的证明中要用到的.):

推理. 设 $x(s)$ 是 Bochner 可积的，又令集 $\Omega_1 = \{s \mid \|x(s)\| > 0\}$，那么，$\forall \varepsilon > 0$，必存在 Ω_1 上的一个分割 $\Omega_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ $(B_n(n =$

1, 2, $\cdots$) 相互不交), 使得 $\forall s_n^0 \in B_n$ ($n=1, 2, \cdots$), 抽象可数值函数

$$x_\varepsilon^0(s)=\begin{cases}x(s_n^0), & \text{当 } s\in B_n \text{ 时} \quad (n=1,2,\cdots);\\ \theta, & \text{当 } s\in \Omega\backslash\Omega_1 \text{ 时}\end{cases}$$

是 (B) 可积的, 且有 $\int_\Omega \|x_\varepsilon^0(s)-x(s)\|\mu(ds)<\varepsilon$.

证. 事实上, 当对上述正数 ε, 我们设自然数 m 满足 $\frac{2}{m}<\varepsilon$ 时, 对于每个自然数 n, 我们就可以在每个集 A_n 上做出上节 Pettis 定理证明中那种形式的可数值阶梯函数 $x_n^{(m)}(s)$ $\left(\text{那里的 } \frac{1}{m} \text{ 换为 } \frac{1}{2^n\cdot\mu(A_n)}\cdot\frac{1}{m}\right)$ 以及 A_n 的可数分割 $A_k^{(n)}$ ($k=1, 2, \cdots$) 来, 使 $x_n^{(m)}(s)$ 满足上面定理的关系式 (1). 这样一来, 当我们取 Ω 的分割 $\{A_k^{(n)}|k, n=1, 2, \cdots\}$ 为这里的 $\{B_n\}$ 时. 根据 $\{x_n^{(m)}(s)\}$ 的做法便可导出, $\forall s_n^0 \in B_n$ ($n=1, 2, \cdots$), 有

$$\begin{aligned}\|x(s)-x(s_n^0)\| &\leqslant \|x_i^{(m)}(s)-x(s)\|+\|x_i^{(m)}(s)-x(s_n^0)\|\\ &<\frac{1}{2^i\mu(A_i)}\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{2^i\mu(A_i)}\cdot\frac{1}{m}\\ &=\frac{1}{2^i\mu(A_i)}\cdot\frac{2}{m}, \quad \forall s\in B_n=A_{k(n)}^{(i)}\subset A_i.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|x_\varepsilon^0(s)-x(s)\|\mu(ds) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_n}\|x(s_n^0)-x(s)\|\mu(ds)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{2}{m}=\frac{2}{m}<\varepsilon\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|x_\varepsilon^0(s)\|\mu(ds) &\leqslant \int_\Omega \|x_\varepsilon^0(s)-x(s)\|\mu(ds)\\ &\quad+\int_\Omega \|x(s)\|\mu(ds)<\infty.\end{aligned}$$

此即导出结论. 证毕.

下面，我们再给出有关 (B) 积分与 (P) 积分之间关系的一个定理:

定理 4. 如果 $x(s)$ 是 Bochner 可积的. 那么，其必也是 Pettis 可积的，并且该两积分"值"(元)是相同的.

证. 设 $x(s)$ 是 (B) 可积的. 那么，由定义首先可知必存在一 (B) 可积的可数值阶梯函数列 $\{x_n^0(s)\}$ 使得

$$x_n^0(s) \to x(s), \quad (\text{概})\ s \in \Omega \ (n \to \infty).$$

由于 $x_n^0(s)$ 是可数值的阶梯函数，故 $f[x_n^0(s)](\forall f \in E^*)$ 均是可测的数值函数; 且由 $|f[x_n^0(s)]| \leqslant \|f\|\,\|x_n^0(s)\|$ 及 $x_n^0(s)$ 是 (B) 可积的从而知 $f[x_n^0(s)](n = 1, 2, \cdots)$ 均是 (L) 可积的，并且，由 $x(s)$ 的 (B) 可积的假设还可以推得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (f[x(s)] - f[x_n(s)])\mu(ds)\right| &\leqslant \int_\Omega \Big|f[x(s) - x_n(s)]\Big|\mu(ds) \\ &\leqslant \|f\|\int_\Omega \|x(s) - x_n(s)\|\mu(ds) \\ &\to 0(n \to \infty), \quad \forall f \in E^*.\end{aligned}$$

因此导出

$$\int_\Omega f[x_n(s)]\mu(ds) \to \int_\Omega f[x(s)]\mu(ds) \quad (n \to \infty), \quad \forall f \in E^*.$$

但同样由 $x(s)$ 的 (B) 可积假设，由定义可知元列

$$(B)\int_\Omega x_n(s)\mu(ds) \to (B)\int_\Omega x(s)\mu(ds) \quad (n \to \infty),$$

故由 $f \in E^*$ 的连续性则又可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega f[x_n(s)]\mu(ds) &= f\left[(B)\int_\Omega x_n(s)\mu(ds)\right] \\ &\to f\left[(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right] \quad (n \to \infty), \quad \forall f \in E^*.\end{aligned}$$

最后，注意到极限的唯一性，由上面的结果，我们可导得

$$\forall f \in E^*, \quad (L)\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$$

均存在，且有

$$\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds) = f\left[(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right], \quad \forall f \in E^*.$$

从而由 Pettis 积分的定义及其积分值的唯一性，立即可以推

$$(P)\int_\Omega x_n(s)\mu(ds) = (B)\int_\Omega x(s)\mu(ds).$$

证毕.

注 9. 反之，当一个抽象函数是 Pettis 可积的时候，显然其未必是 Bochner 可积的. 事实上由前面定理 3 关于 (B) 可积函数的特征，我们可以取上一节一个 (P) 可积而不强可测的反例作为这里的反例. 同样地，我们也可从该定理 3 中找出一个 (P) 可积但 $\|x(t)\|$ 不 (L) 可积的反例.

反例. 设 $x(t)$ 为从 $[0, \infty)$ 到 (c) 空间内的抽象函数，

$$x(t) = \Big(0, \cdots, 0, \underset{(\text{第 } n \text{ 位})}{\frac{1}{n}}, 0, \cdots\Big),$$

$$t \in [n-1, n) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

那么，$x(t)$ 是 (P) 可积的，但 $\|x(t)\|$ 不 (L) 可积，从而 $x(t)$ 不是 (B) 可积的.

验. 由于，$\forall f = \{f_n\} \in (c)^* = (l^1)$，均有

$$\int_0^\infty f[x(t)]dt = \int_0^1 + \int_1^2 + \cdots + \int_{n-1}^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{n} < \infty,$$

即有

$$\int_0^\infty f[x(t)]dt = f(x_0), \quad \forall f \in (c)^* \left(\text{其中}, x_0 = \left\{\frac{1}{n}\right\} \in (c)\right).$$

此即导出 $(P)\int_0^\infty x(t)dt = x_0 = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. 但另一方面，我们显然有

$$\int_0^\infty \|x(t)\|dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty,$$

因而，$\|x(t)\|$ 在 $[0, \infty)$ 不是 (L) 可积的，$x(t)$ 也不是 (B) 可积的. 验毕.

注 10. 对于 Bochner 积分，我们不难导出下面一些基本性质：当抽象函数 $x(s)$，$y(s)$ 均为 (B) 可积时，那么，

1°. $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha x(s)+\beta y(s)$ 亦为 (B) 可积的，且有

$$(B)\int_\Omega [\alpha x(s)+\beta y(s)]\mu(ds)$$
$$=\alpha\left[(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right]+\beta\left[(B)\int_\Omega y(s)\mu(ds)\right];$$

2°. 如果有 $x(s)=y(s)$ (概) $s\in\Omega$，则

$$(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)=(B)\int_\Omega y(s)\mu(ds);$$

3°. $\left\|(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right\|\leqslant\int_\Omega\|x(s)\|\mu(ds)$;

4°. 如果 $\alpha(s)$ 是"本性有界"的实值 (L) 可积函数，则抽象函数 $\alpha(s)x(s)$ 亦为 (B) 可积函数(这里，除了 4° 及 3° 中说明 $\|x(s)\|$ 积分存在需要用到前面定理 3 的结论外，其余的均不难由 (B) 可积的定义进行验证).

注 11. 对于 Bochner 积分而言，与实变函数论一样，下面的命题也是成立的(证明留给读者完成)：

1°. 设 $\{x_n(s)\}$ 为一 (B) 可积抽象函数列，且有

$$x_n(s)\to x(s)\quad(概)\ s\in\Omega\ (n\to\infty).$$

此外，又有一实值 (L) 可积函数 $\alpha(s)$，使得

$$\|x_n(s)\|\leqslant\alpha(s),\quad(概)\ s\in\Omega,$$

那么，$x(s)$ 亦为 (B) 可积的，且有

$$\lim_{n\to\infty}(B)\int_\Omega x_n(s)\mu(ds)$$
$$=(B)\int_\Omega\lim_{n\to\infty}x_n(s)\mu(ds)=(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)$$

(这就是控制收敛定理).

2°. 设 $x(s)$ 是 (B) 可积的，且有

$$(B)\int_A x(s)\mu(ds)=\theta,\quad\forall A\in\mathscr{B}.$$

那么，$x(s)=\theta$ (概) $s\in\Omega$.

3°. Bochner 积分是“强完全可加”且“绝对连续”的集函数.（这里，强完全可加是指如果 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$A_n(n=1,2,\cdots)$ 为相互不交的可测集，则有

$$(B)\int_{\Omega} x(s)\mu(ds)=\sum_{n=1}^{\infty}(B)\int_{A_n} x(s)\mu(ds)\ (\text{强收敛}).$$

绝对连续是指，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall A\in\mathscr{B}$，只要 $\mu(A)<\delta$，就有 $\left\|(B)\int_A x(s)\mu(ds)\right\|<\varepsilon$.）

下面，我们对于 (B) 可积抽象函数的全体所成的集合引出一个有趣的结果：

定理 5. 对于测度空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 所有 Bochner 可积函数的全体 $B(\Omega,\mathscr{B},\mu)$，当对其元定义范数为

$$\|x\|_B=\int_{\Omega}\|x(s)\|\mu(ds),\quad \forall x\in B(\Omega,\mathscr{B},\mu)$$

时，按通常的加法与数乘（“概”相等的元视为同一元）构成一个 Banach 空间.

证. 由前面定理 3 及注 10 中 1），我们显然可以看出 $B(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是一赋范线性空间. 下面证明空间的完备性. 假设 $\{x_n\}\subset B(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 为空间一 Cauchy 列，有

$$\|x_n-x_m\|_B=\int_{\Omega}\|x_n(s)-x_m(s)\|\mu(ds)\to 0\quad (n,m\to\infty),$$

那么，用通常 (L) 积分中相应的处理方法（参看 § 1.2 的例 3），我们不难从 $\{x_n(s)\}$ 中选出一子列 $\{x_{n_k}(s)\}$，使其满足

$$\int_{\Omega}\left\{\|x_{n_1}(s)\|+\sum_{k=2}^{\infty}\|x_{n_k}(s)-x_{n_{k-1}}(s)\|\right\}\mu(ds)<\infty.$$

因而，知抽象函数

$$x_{n_1}(s)+\sum_{k=2}^{\infty}[x_{n_k}(s)-x_{n_{k-1}}(s)]$$

在 Ω 上是概收敛的. 这样一来，当令此极限（抽象）函数为 $x_\infty(s)$ 时，注意到上节的定理 3，我们立即导得 $x_\infty(s)$ 亦是强可测的，而且由

其取法还知 $\|x_\infty(s)\|$ 也是(L)可积的，因此，$x_\infty(s)\in B(\Omega,\mathscr{B},\mu)$。最后，与 § 1.2 例 3 的验证方法类似，由

$$\|x_\infty - x_{n_m}\|_B \leqslant \int_\Omega \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_{n_k}(s) - x_{n_{k-1}}(s)\|\mu(ds) \to 0 \quad (m\to\infty)$$

和 $\{x_{n_m}\}\subset\{x_n\}$，以及后者乃空间一 Cauchy 列，我们不难通过

$$\|x_\infty - x_n\|_B \leqslant \|x_\infty - x_{n_m}\|_B + \|x_{n_m} - x_n\|_B$$

最后导出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$. 证毕.

下面，我们给出一个比 Pettis 积分性质（定理 2）更强一些的命题：

定理 6. 设T是由 E 内到 E_1 内的闭线性算子，那么，如果 $x(s)$ 与 $\mathrm{T}[x(s)]$ 分别为从测度空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 到 E 与 E_1 内的 Bochner 可积函数，则有：

$$(B)\int_\Omega \mathrm{T}[x(s)]\mu(ds) = \mathrm{T}\left[(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right].$$

证. 首先，直接利用上面定理 3 后的推理，我们对于 $x(s)$ 可以做 Ω 的一个分割，使其对应地有 E 中一"可数值"(B) 可积的抽象函数 $x_\varepsilon^0(s)$，使得 $\int_\Omega \|x_\varepsilon^0(s) - x(s)\|\mu(ds) < \varepsilon/2$；类似地，对于 $\mathrm{T}[x(s)]$ 也可做 Ω 的一个分割，使其对应有 E_1 中一可数值 (B) 可积的抽象函数 $\mathrm{T}[x_\varepsilon^{(1)}(s)]$，使得 $\int_\Omega \|\mathrm{T}[x_\varepsilon^{(1)}(s) - \mathrm{T}[x(s)]\|\mu(ds) < \varepsilon/2$. 于是，当取以上两分割的总体作为一个新的分割(显然是比原两个更"细分"(或全同)的分割)时，同样由那里的推理的结果，我们又可做 E 中一可数值 (B) 可积抽象函数 $x_\varepsilon(s)$，其对应地不难验证 $\mathrm{T}[x_\varepsilon(s)]$ 亦为 E_1 中可数值的 (B) 可积抽象函数. 且由

$$x(s) - x_\varepsilon(s) = [x(s) - x_\varepsilon^0(s)] + [x_\varepsilon^0(s) - x_\varepsilon(s)]$$

和

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}[x(s)] - \mathrm{T}[x_\varepsilon(s)]\\&= [\mathrm{T}[x(s)] - \mathrm{T}[x_\varepsilon^{(1)}(s)]] + [\mathrm{T}[x_\varepsilon^{(1)}(s)] - \mathrm{T}[x_\varepsilon(s)]],\end{aligned}$$

我们用类似那里推理中的证明方法不难导出

$$\int_\Omega \|x(s)-x_\varepsilon(s)\|\mu(ds)<\varepsilon,$$

$$\int_\Omega \|\mathrm{T}[x(s)]-\mathrm{T}[x_\varepsilon(s)]\|\mu(ds)<\varepsilon. \tag{2}$$

注意到

$$(B)\int_\Omega x_\varepsilon(s)\mu(ds)=\sum_{n=1}^{\infty}x(s_n)\mu(B_n)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}x(s_n)\cdot\mu(B_n)$$

和

$$(B)\int_\Omega \mathrm{T}[x_\varepsilon(s)]\mu(ds)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{T}[x(s_n)]\mu(B_n)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\mathrm{T}\left[\sum_{n=1}^{N}x(s_n)\mu(B_n)\right].$$

这里，$x_\varepsilon(s)$ 与前面定理 3 后的推理假设一样，为在互不相交的集 B_n 上取常值 $x(s_n)(n=1,2,\cdots)$ 的 (B) 可积可数值函数，

$$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

于是，由 T 为闭算子的假设，我们从上两关系式可导出

$$(B)\int_\Omega x_\varepsilon(s)\mu(ds)\in\mathscr{D}(\mathrm{T})$$

以及

$$\mathrm{T}\left[(B)\int_\Omega x_\varepsilon(s)\mu(ds)\right]=(B)\int_\Omega \mathrm{T}[x_\varepsilon(s)]\mu(ds). \tag{3}$$

最后，当我们取一数列 $\{\varepsilon_n\}$，使 $\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$. 那么，由上面的做法，我们可以得到 E 中一可数值 (B) 可积抽象函数列 $\{x_{\varepsilon_n}(s)\}$，使得（注意式 (2)）

$$(B)\int_\Omega x_{\varepsilon_n}(s)\mu(ds)\to(B)\int_\Omega x(s)\mu(ds)\quad(n\to\infty)$$

和（并注意到上式 (3)）

$$\mathrm{T}\left[(B)\int_{\Omega} x_{\varepsilon_n}(s)\mu(ds)\right] = (B)\int_{\Omega}\mathrm{T}[x_{\varepsilon_n}(s)]\mu(ds)$$
$$\to (B)\int_{\Omega}\mathrm{T}[x(s)]\mu(ds) \quad (n\to\infty).$$
从而，当 T 为闭算子的时候，就可导得
$$\mathrm{T}\left[(B)\int_{\Omega} x(s)\mu(ds)\right] = (B)\int_{\Omega}\mathrm{T}[x(s)]\mu(ds).$$
证毕.

特别，当 T 为 E 上定义的有界线性算子的时候（当然的闭线性算子），我们可以得到下面的推理:

推理. 设 T 是由 E 到 E_1 内的有界线性算子，那么，如果 $x(s)$ 是在 E 中取值的 Bochner 可积函数，则 $\mathrm{T}[x(s)]$ 必为在 E_1 中取值的 Bochner 可积函数，并且有
$$(B)\int_{\Omega}\mathrm{T}[x(s)]\mu(ds) = \mathrm{T}\left[(B)\int_{\Omega} x(s)\mu(ds)\right].$$

证. 由上面定理 6 可知，我们只要导出 $\mathrm{T}[x(s)]$ 是 Bochner 可积函数，命题就证得了. 事实上，由 $x(s)$ 是 (B) 可积的，因而由定义必存在 (B) 可积的可数值阶梯函数列 $\{x_n^0(s)\}$，使得
$$x_n^0(s)\to x(s),\, n\to\infty\,(\text{概}) \quad s\in\Omega; \tag{4}$$
且有
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|x_n^0(s)-x(s)\|\mu(ds)=0. \tag{5}$$
由此可见，$\{\mathrm{T}(x_n^0(s)]\}$ 也是在 E_1 内取值的可数值阶梯函数列，而由 T 是有界算子及 $\|x_n^0(s)\|$ 可积性的假设，以及 $\|\mathrm{T}[x_n^0(s)]\|\leqslant\|\mathrm{T}\|\|x_n^0(s)\|$，因而可知 $\{\|\mathrm{T}[x_n^0(s)]\|\}$ 也为一列 Lebesque 可积函数. 即 $\{\mathrm{T}[x_n^0(s)]\}$ 也是 (B) 可积的. 最后由 T 的连续性及式 (4) 和 (5)，我们还可导出
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}[x_n^0(s)] = \mathrm{T}[\lim_{n\to\infty} x_n^0(s)] = \mathrm{T}[x(s)], \quad (\text{概})\ s\in\Omega$$
和
$$\int_{\Omega}\|\mathrm{T}[x_n^0(s)]-\mathrm{T}[x(s)]\|\mu(ds)$$
$$\leqslant\|\mathrm{T}\|\int_{\Omega}\|x_n^0(s)-x(s)\|\mu(ds)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

此即导出 $T[x(s)]$ 是 E_1 中取值的 (B) 可积函数．证毕．

注 12. 由定理 6 及其推理，当换 Ω 为其内任一集 $A\in\mathscr{B}$ 时，结论仍是成立的．

事实上，在上面定理的证明中，只要注意到积分关系式

$$\int_E x_\varepsilon(s)\mu(ds)=\sum_{n=1}^{\infty}x(s_n)\mu(B_n\cap E),\cdots,$$

可类似地导出结论．

习　　题

1．试证明本节注 4 中关于 Pettis 积分的三条基本性质．

2．试证明本节注 10 中关于 Bochner 积分的四条基本性质．

3．试证明本节注 11 中关于 Bochner 积分类似于实变函数论中的三条重要性质．

4．试证明本节注 12．

§ 6.5. 复变数的抽象解析函数

本节与 § 6.3，§ 6.4 两节不同的是，要考虑定义在复平面内的某一区域 G 上而在某一复 Banach 空间中取值的抽象函数的特征．而且我们还要指出许多（数值）复变函数论中的重要命题，对于复变数的抽象函数亦是正确的． 首先，我们给出关于抽象函数是解析函数的定义：

定义 1. 设 $x(t)$ 是定义在复平面的某一区域 G 上并在复 Banach 空间 E 中取值的抽象函数． 我们称 $x(t)$ 是 G 内的解析函数，是指 $\forall t\in G$，$x(t)$ 均存在着强导数

$$x'(t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}\quad(\delta\text{ 表示复数}).$$

这里，“极限”是指“按 E 中的范数”收敛．

注 1. 由 § 6.2 中的结果，我们可知如果 $x(t)$ 是 G 内的解析函数，那么，

1°. $\forall f\in E^*$, $f[x(t)]$ 是 G 内的平常复值解析函数;

2°. $x(t)$ 是 G 内强连续抽象函数;

3°. 在 G 内任何一有界闭区域 F, $\{\|x(t)\| \mid t\in F\}$ 是有界实数集.

对于复抽象函数来说,其解析的定义中"强导数存在"的要求也可以等价地用"弱导数存在"来代替,这是因为有下命题保证.

定理 1 (Dunford 定理). 设 $x(t)$ 是定义在复平面中的某一区域 G 内的抽象函数. 那么,为了 $x(t)$ 在 G 内强可导,必须且只须 $x(t)$ 在 G 内弱可导.

证. 定理的必要性已在 § 6.2 中阐明过,下面仅证明定理的充分性.

假设复平面上某一区域 G 内定义的抽象函数 $x(t)$(复)是弱可导的. 那么,$\forall t_0\in G$ 由于 t_0 是内点,故我们可以做一以 t_0 为心,r 为半径的圆 A,使圆 A 含于 G 内. 这时,如果设此圆周记为 c,由 $x(t)$ 弱可导可知 $\forall f\in E^*$, $f[x(t)]$ 均是通常数值解析函数,因而由复变函数论中的 Cauchy 积分公式可得

$$f[x(t_0)]=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f[x(\lambda)]}{\lambda-t_0}\,d\lambda,\quad \forall f\in E^*. \tag{1}$$

现做 E^* 上的一族泛函

$$\{F_{\delta_1,\delta_2}\}=\left\{F_{\delta_1,\delta_2}\,\middle|\,\delta_1\neq\delta_2,\ 0<|\delta_1|,\ |\delta_2|\leqslant\frac{r}{2}\right\},$$

其中每个泛函

$$F_{\delta_1,\delta_2}(f)=\frac{1}{\delta_1-\delta_2}\left\{\frac{f[x(t_0+\delta_1)]-f[x(t_0)]}{\delta_1}-\frac{f[x(t_0+\delta_2)]-f[x(t_0)]}{\delta_2}\right\},\quad \forall f\in E^*;$$

$\left(\forall\delta_1\neq\delta_2,\ 0<|\delta_1|,|\delta_2|\leqslant\dfrac{r}{2}.\right)$ 易见每个 F_{δ_1,δ_2} 均是 E^* 上的线性泛函,且由关系式

$$|F_{\delta_1,\delta_2}(f)| \leqslant \frac{1}{|\delta_1-\delta_2|}\left\|\frac{x(t_0+\delta_1)-x(t_0)}{\delta_1} - \frac{x(t_0+\delta_2)-x(t_0)}{\delta_2}\right\|\|f\|, \quad \forall f\in E^*.$$

我们还知$\left(对每个固定的 \delta_1, \delta_2, \delta_1 \neq \delta_2, 0<|\delta_1|, |\delta_2| \leqslant \frac{r}{2}\right)$它也是有界的,从而导出上面泛函族$\{F_{\delta_1,\delta_2}\}\subset E^*$.

注意到$\forall f\in E^*$,从上面的定义我们有

$$F_{\delta_1,\delta_2}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f[x(\lambda)]}{(\lambda-t_0)(\lambda-t_0-\delta_1)(\lambda-t_0-\delta_2)}d\lambda,$$

当设 $M(f)=\max\limits_{\lambda\in C}|f[x(\lambda)]|$时,由上式可导得

$$|F_{\delta_1,\delta_2}(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M(f)}{r(r-|\delta_1|)(r-|\delta_2|)}\cdot 2\pi r$$

$$\leqslant \frac{r\cdot M(f)}{r\left(r-\frac{r}{2}\right)\left(r-\frac{r}{2}\right)} = \frac{4M(f)}{r^2}, \quad \forall f\in E^*.$$

因而导出

$$\sup\left\{|F_{\delta_1,\delta_2}(f)| \,\Big|\, \delta_1\neq\delta_2, 0<|\delta_1|, |\delta_2|\leqslant\frac{r}{2}\right\}<\infty, \quad \forall f\in E^*.$$

于是,由 E^* 是 Banach 空间及"共鸣定理"可推得 $\exists\beta_0>0$, 使得

$$\sup\left\{\|F_{\delta_1,\delta_2}\| \,\Big|\, \delta_1\neq\delta_2, 0<|\delta_1|, |\delta_2|\leqslant\frac{r}{2}\right\}\leqslant\beta_0.$$

然而,由 F_{δ_1,δ_2}的定义以及 $E\subset E^{**}$, 还有

$$\|F_{\delta_1,\delta_2}\| = \left\|\frac{1}{\delta_1-\delta_2}\left[\frac{\tilde{x}(t_0+\delta_1)-\tilde{x}(t_0)}{\delta_1} - \frac{\tilde{x}(t_0+\delta_2)-\tilde{x}(t_0)}{\delta_2}\right]\right\|_{E^{**}}$$

$$= \left\|\frac{1}{\delta_1-\delta_2}\left[\frac{x(t_0+\delta_1)-x(t_0)}{\delta_1}\right.\right.$$

$$- \frac{x(t_0 + \delta_2) - x(t_0)}{\delta_2} \Big\| \Big\|$$

$$\left(\forall \delta_1 \neq \delta_2,\ 0 < |\delta_1|, |\delta_2| \leqslant \frac{r}{2}\right)$$

（这里，$\tilde{x}(t)$ 表示 $x(t)$ 在 E^{**} 中的“自然映象”），由此可导得

$$\sup_{\delta_1 \neq \delta_2} \left\{ \frac{1}{|\delta_1 - \delta_2|} \left\| \frac{x(t_0 + \delta_1) - x(t_0)}{\delta_1} - \frac{x(t_0 + \delta_2) - x(t_0)}{\delta_2} \right\| \right\} \leqslant \beta_0,$$

$$0 < |\delta_1|,\ |\delta_2| < \frac{r}{2},$$

从而得出

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \left\| \frac{x(t_0 + \delta_1) - x(t_0)}{\delta_1} - \frac{x(t_0 + \delta_2) - x(t_0)}{\delta_2} \right\| = 0.$$

最后，注意到空间 E 是完备的，便可导出抽象函数 $x(t)$ 在 t_0 点的“强导数” $x'(t_0)$ 是存在的．证毕．

借助于注 1 中的 1°（即如果 $x(t)$ 在 G 内解析，则数值函数 $f[x(t)]$($\forall f \in E^*$) 必均在 G 内解析）以及 Hahn-Banach 定理(如果有 $f(x) = f(y)$, $\forall f \in E^*$, 则必有 $x = y$) 我们就能将平常复值解析函数论中的许多重要定理推广到抽象解析函数上来．下面我们仅作简单的介绍．

定理 2 (Liouville 定理). 设 $x(t)$ 是整个复平面 $\boldsymbol{C}$ 上定义的抽象解析函数，并且 $\|x(t)\|$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上有界．那么，$x(t)$ 必在 E 中恒取一常元 x_0($\forall t \in \boldsymbol{C}$).

证．由假设可知，$\forall f \in E^*$, $f[x(t)]$ 是整个复平面 $\boldsymbol{C}$ 上定义的复值解析函数，且由

$$|f[x(t)]| \leqslant \|f\| \cdot \|x(t)\|, \quad \forall f \in E^*,$$

还可得知 $f[x(t)]$ 的“模”在整个复平面是有界的，从而，由平常值解析函数的 Liouville 定理，可导出，必有一复常数 $M(f)$ 使得

$$f[x(t)] = M(f), \quad \forall f \in E^* \quad (t \in \boldsymbol{C});$$

这样，如果固定一数 $t_0 \in \boldsymbol{C}$, 并令 $x_0 = x(t_0)$, 那么，从上式可导出

$\forall t\in \boldsymbol{C}$，恒有

$$f[x(t)]\equiv M(f)\equiv f[x(t_0)],\quad \forall f\in E^*.$$

因此，由 Hahn-Banach 定理，我们导出 $x(t)=x(t_0)=x_0$. 证毕.

注 2. 在抽象解析函数中，没有与复值解析函数一样的"最大模定理"，而只有下面较弱的结果：

抽象函数的最大模定理. 假设 $x(t)$ 在某一复平面区域 G 内解析. 那么，只要 $\|x(t)\|$ 在 G 内不恒为常数，则 $\|x(t)\|$ 绝不可能在 G 的内部达到最大值.

其证明请读者完成. 下面，为了引进抽象函数的 Cauchy 定理和 Cauchy 公式等相应命题，首先还必须给出关于复抽象函数积分的定义：

定义 2. 设 $x(t)$ 是定义于复平面区域 G 上的抽象函数，Γ 是 G 中的可度长曲线，做分法 $\mathscr{P}$: $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\in\Gamma$，这里，$\lambda_0, \lambda_n$ 各表示 Γ 的端点（如果 Γ 不封闭；而当 Γ 封闭时，任取一点作为 $\lambda_0=\lambda_n$)，而 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是依次排列于 Γ 的. 做和

$$S_{\mathscr{P}}=\sum_{k=0}^{n-1}x(\lambda_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k),$$

又令

$$\delta_{(\mathscr{P})}=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|,$$

那么，当 $\delta_{(\mathscr{P})}\to 0$ 时，如果 $S_{\mathscr{P}}$ 有一固定极限（仍是属于 E 中的元）时，则称 $x(t)$ 在 Γ 上是可积的，并表示成

$$\lim_{\delta(\mathscr{P})\to 0}S_{\mathscr{P}}=\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda=x_0.$$

而该元 x_0 称为抽象函数 $x(t)$ 在 Γ 上的积分.

定理 3. 区域 $G\subset \boldsymbol{C}$ 上的强连续抽象函数 $x(t)$，在 G 内任意的可度长曲线 Γ 上均是可积的.

证. 这是简单的，只要注意到 Γ 是复数平面上的一闭有界集，$x(t)$ 必在 Γ 上一致连续. 完全类似于 § 6.2 的定理 6 的方法，利用抽象函数取值的空间的完备性，则可推得. 证毕.

定理 4 (Cauchy 定理). 设 $x(t)$（抽象函数）在封闭的可度长

Jordan 曲线Γ所围成的区域$\overline{D}\subset \boldsymbol{C}$上强连续，且在区域$D$内是解析的，那么，

$$\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda=\theta\quad (E\text{ 中的零元}).$$

证．由积分的定义不难看出，对每个$f\in E^*$，恒有

$$f\left[\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda\right]=\int_\Gamma f[x(\lambda)]d\lambda.$$

但由通常数值解析函数的 Cauchy 定理，便可导得

$$\int_\Gamma f[x(\lambda)]d\lambda=0,\quad \forall f\in E^*.$$

也即

$$f\left(\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda\right)=0,\quad \forall f\in E^*.$$

从而得到

$$\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda=\theta.$$

证毕．

定理 5（Cauchy 公式）． $x(t)$，Γ，D同定理 4 所设，那么，$\forall t_0\in D$，“强导数“ $x^{(n)}(t_0)(n=1,2,\cdots)$ 均存在，且有

$$x^{(n)}(t_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x(\lambda)}{(\lambda-t_0)^{n+1}}d\lambda\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

证．$\forall f\in E^*$，由假设可知$f[x(t)]$在D内是任意阶可导的，从而由上面 Dunford 定理之推理可知$x(t)$在D内也是具有任意阶（强）导数的，且有

$$(f[x(t)])^{(n)}=f[x^{(n)}(t)],\quad \forall t\in D\ (n=1,2,\cdots).$$

故对（数值解析函数）$f[x(t)]$使用 Cauchy 公式可得到

$$(f[x(t_0)])^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f[x(\lambda)]}{(\lambda-t_0)^{n+1}}d\lambda\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因而，对于每个自然数n及 0 恒有

$$\begin{aligned}f[x^{(n)}(t_0)]&=(f[x(t_0)])^{(n)}\\&=f\left[\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x(\lambda)}{(\lambda-t_0)^{n+1}}d\lambda\right],\quad \forall f\in E^*,\end{aligned}$$

最后，再由 Hahn-Banach 定理便可推得

$$x^{(n)}(t_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x(\lambda)}{(\lambda-t_0)^{n+1}}d\lambda \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

证毕.

与数值解析函数一样，我们可以直接得到下面推理：

推理. 设 $x(t)$ 是区域 $G\subset \boldsymbol{C}$ 上的抽象解析函数，又设 Γ 是 G 中一条封闭的可度长曲线，且 Γ 所围成的区域完全含于 G 内和当点 λ 沿着 Γ（正向）运转一周时，幅角 $\arg(\lambda-t_0)$ 增加 2π（这里，t_0 是 Γ 所围成的区域内的一点）；那么，$x(t)$ 在 t_0 的任意阶"强导数"均存在，且有

$$x^{(n)}(t_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x(\lambda)}{(\lambda-t_0)^{n+1}}d\lambda \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

借助于上面抽象函数的 Cauchy 公式，我们同样可以得到关于抽象函数的 Taylor 展开式和 Laurent 展开式.

定理 6（Taylor 展开定理）. 如果抽象函数 $x(t)$ 在圆形区域 $S(t_0,r_0)=\{t\mid |t-t_0|<r_0\}\subset \boldsymbol{C}$ 内解析，且存在一常数 M，使 $\|x(t)\|\leqslant M$，$\forall t\in S(t_0,r_0)$，那么，在这圆中，Taylor 展开式成立，即有

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n\,(\text{强}),\quad \forall t\in S(t_0,r_0).$$

证. $\forall t\in S(t_0,r_0)$，有 $|t-t_0|=r<r_0$，注意到 Cauchy 公式（Γ 表示为 $S(t_0,r)$ 的边界所围成的圆周 $C(t_0,r)$），可得

$$\|x^{(n)}(t_0)\|=\left\|\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x(\lambda)}{(\lambda-t_0)^{n+1}}d\lambda\right\|$$

$$\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{n!M}{r^n}$$

$$(\forall n=0,1,2,\cdots).$$

由上式对一切 $r<r_0$ 均成立，因此我们可以推得

$$\|x^{(n)}(t_0)\|\leqslant\frac{n!M}{r_0^n}\quad(\forall n=0,1,2,\cdots).$$

由此可知，数值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n\right\|$$

对于任意的点 $t\in S(t_0, r_0)$ 均是收敛的，而由 $x(t)$ 的取值空间 E 的完备性，即推得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$$

按范收敛于 E 中一元 $y(t)$，即恒有

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n\,(\text{强}),\quad \forall t\in S(t_0, r_0).$$

因而导得 $\forall f\in E^*$，均有

$$\begin{aligned} f[y(t)] &= f\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f[x^{(n)}(t_0)]}{n!}(t-t_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f[x(t_0)])^{(n)}}{n!}(t-t_0)^n, \\ &\qquad \forall t\in S\ (t_0, r_0). \end{aligned}$$

但另一方面，由（数值解析函数）$f[x(t)]$ 的 Taylor 公式（那时展开的条件是满足的），我们又有

$$f[x(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f[x(t_0)]^{(n)})}{n!}(t-t_0)^n,\quad \forall t\in S(t_0, r_0).$$

从而注意到前面所得的关系式，我们可推得 $\forall t\in S(t_0, r_0)$，恒有

$$f[y(t)]=f[x(t)],\quad \forall f\in E^*.$$

最后，由 Hahn-Banach 定理便可导得

$$y(t)=x(t),\quad \forall t\in S(t_0, r_0).$$

此即导出

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n\,(\text{强}),\quad \forall t\in S(t_0, r_0).$$

证毕。

定理 7（Laurent 展开）. 设抽象函数 $x(t)$ 在复平面内的环形区域 D,

$$0 \leqslant r_1 < |t - t_0| < r_2 \leqslant \infty$$

内解析，并设 Γ 是该环形区域中环绕内圆 $|t - t_0| = r_1$ 一周的封闭可度长曲线. 那么，在区域 D 中，Laurent 展开式成立. 也即有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n (t - t_0)^n, \quad \forall t \in D,$$

其中，元

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x(\lambda)}{(\lambda - t_0)^{n+1}} d\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

证. 首先，由 Cauchy 定理，如果通常复变函数论一样可以推知，上面 x_n 的值对于任意环绕内圆 $|t - t_0| = r_1$ 一周的封闭可度长曲线 Γ 均是相同的. 因而不妨设 Γ 为圆周 $C(t_0, r)$（其中 r 满足 $r_1 < r < r_2$）. 那么，注意到上面 x_n 的定义，我们则有

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{C(t_0, r)} \frac{\|x(\lambda)\|}{|(\lambda - t_0)|^{n+1}} d\lambda \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_r}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M_r}{r^n}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $Mr = \max\limits_{|\lambda - t_0| = r} \|x(\lambda)\|$.

由于对任意的点 $t \in D$，我们有下两结论：

i. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n (t - t_0)^n$ 是收敛的. 事实上，由于在上面不等式 (2) 中，特别地，取那里的圆周 $\Gamma = C(t_0, r)$ 的半径 r 满足 $|t - t_0| < r < r_2$. 那么由数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n (t - t_0)^n\|$ 借助于式 (2) 所确定的“优级数”是收敛的，因而可知它自己也是收敛的，从而，由空间 E 的完备性推得

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n (t - t_0)^n$$

是强收敛的。

ii. 级数 $\sum_{n=-\infty}^{-1} x_n(t-t_0)^n$ 也是收敛的. 类似 i 我们可在上面式 (2) 中,取 r 满足 $r_1 < r < |t-t_0|$, 那么, 由数值级数

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \|x_n(t-t_0)^n\|$$

有"优级数"

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} M_r \frac{|t-t_0|^n}{r^n},$$

而后者即是等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_r \frac{r^n}{(t-t_0)^n}$, 且由公比 $\frac{r}{|t-t_0|} < 1$, 可知它是收敛的,从而,类似上面 i 可得本结论.

因而,综合以上 i, ii 的结论,知 $\forall t \in D$, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t-t_0)^n$ 均强收敛于 E 中一元 $y(t)$. 于是, $\forall f \in E^*$, 应有

$$f[x(t)] = f\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n(t-t_0)^n\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x_n)(t-t_0)^n, \quad \forall t \in D.$$

而由 x_n 的定义可知,这里有

$$f(x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f[x(\lambda)]}{(\lambda-t_0)^{n+1}} d\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

但另一方面,此时易证 (数值复函数) $f[x(t)]$ 在 D 上是能 Laurent 展开的,且展开式与上面关系式的右边相重合,也即 $\forall t \in D$ 恒有

$$f[y(t)] = f[x(t)], \quad \forall f \in E^*.$$

因而,最后由 Hahn-Banach 定理,可推得

$$x(t) = y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n(t-t_0)^n, \quad \forall t \in D.$$

证毕.

注 3. 从上面的 Laurent 展开式易见,特别地有

$$\int_\Gamma x(\lambda) d\lambda = 2\pi i x_{-1},$$

这里, x_{-1} 是 $x(t)$ 的 Laurent 展开式中 $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ 项的"系数".

习　　题

1．试证明本节注 2.

2．试证明：如果 G 中两抽象解析函数在 G 的一含有极限点的无限点集上相等，则它们必在整个区域 G 内恒等.

3．试证明：对于 E 中元列级数的 Cauchy-Hadamard 定理，设有 E 中“幂级数”

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t-t_0)^n \quad (\{x_n\}\subset E),$$

则下面结论成立：

(i) 它的收敛半径 $r=1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n\|^{1/n}$（即当 $|t-t_0|<r$ 时，该级数按范(绝对收敛)收敛，而当 $|t-t_0|>r$ 时级数发散）；

(ii) 级数在圆 $|t-t_0|<r$ 内是一个抽象解析函数；

(iii) 级数在圆 $S(t_0,r)$ 内的任何闭圆 $\bar{S}(t_1,r_1)$ 均是“一致收敛”的；

4．设 $x(t)=x(\xi+i\eta)$ 在条形区域 $U:\xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_1,\ -\infty<\eta<+\infty$ 内解析且有界，那么，如存在数 M，使得

$$\|x(\xi_0+i\eta)\|\leqslant M$$
$$\|x(\xi_1+i\eta)\|\leqslant M \quad (-\infty<\eta<+\infty),$$

则有

$$\|x(t)\|\leqslant M \quad (t\in U).$$

第七章　Banach 代数简介

在 1935 年以前，Banach 代数还并不为人们所注意，然而，在本世纪三十年代末期，由于 M. H. Stone 及 И. М. Гельфанд 的突出的工作，这一近世代数与 Banach 空间的一般理论相结合的新方向才显示出其无限的生命力，并被誉为“泛函分析中的一个最大的成就”.

Banach 代数目前已是泛函分析领域中最活跃的分支之一，吸引着世界各国的许多数学工作者. 它的内容十分丰富. 在它的研究中，许多古典分析的深刻结果得到更透彻的理解，使它们的本性显示了出来. 特别在算子谱论和抽象调和分析的研究中，Bnanch 代数理论更起着突出的作用.

§7.1.　Banach 代数的定义及例

在介绍 Bnanch 代数的定义之前，我们先给出在抽象代数学中的两个重要的概念，即环和代数的概念.

定义 1.　集 $\mathfrak{S}$ 称为环，是指在其中定义了两个运算，“加法”和“乘法”，使对加法运算其构成一交换群，而对乘法运算其构成一半群，且满足两种运算的分配律.

定义 2.　$\mathfrak{S}$ 称为域 $\boldsymbol{K}$ 上的代数，是指 $\mathfrak{S}$ 是域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，并且是环；此外，$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$，$\forall \alpha \in \boldsymbol{K}, x, y = \mathfrak{S}$.

由以上两个定义，当考察 §2.2 中引出的从 Bnanch 空间 E 到 Banach 空间 $E_1 = E$ 中的一切有界线性算子的全体构成的 Banach 空间 $\mathfrak{E}(E) = B(E \to E)$ 时，如果 $\forall T_1, T_2 \in \mathfrak{E}(E)$，我们定义其乘法 $T_1 \cdot \Gamma_2$，

$$(T_1 \cdot T_2)(x) = T_1(T_2(x)), \quad \forall x \in E,$$

则容易验证，$\mathfrak{C}(E)$ 构成复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的代数，并且它还满足

$$\|T_1 \cdot T_2\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|T_2\|.$$

从而由

$$\|TT' - T_0T_0'\| \leqslant \|TT' - TT_0'\| + \|TT_0' - T_0T_0'\|$$
$$\leqslant \|T\| \cdot \|T' - T_0'\| + \|T - T_0\| \cdot \|T_0'\|,$$

可以推出映象 $(T, T') \longmapsto T \cdot T'$ 是由乘积空间 $\mathfrak{C}(E) \times \mathfrak{C}(E)$ 到空间 $\mathfrak{C}(E)$ 中的连续映象. 特别地，在空间 $\mathfrak{C}(E)$ 中对于"左乘"和"右乘"均是连续的，即有

$$\lim_{T \to T_0} TT_0' = T_0T_0' \text{ 和 } \lim_{T' \to T_0'} T_0T' = T_0T_0'.$$

上面对于 Banach 空间 E 上的一切有界线性算子的全体 $\mathfrak{C}(E)$ 的考察，提供了一类新的数域 $\boldsymbol{K}$ 上的代数模型，即 Banach 代数的结构.

定义 3. 集 $\mathfrak{U}$ 称为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的 Banach 代数（简记为 (B)-代数），是指它满足：(i) $\mathfrak{U}$ 是 $\boldsymbol{K}$ 上的 Banach 空间；(ii) 在 $\mathfrak{U}$ 中定义了乘法：$(x, y) \longmapsto xy$，使其按这种乘法构成域 $\boldsymbol{K}$ 上的代数；(iii)对于左乘和右乘均是连续的，即有

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow \|x_ny - xy\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$
$$\|y_n - y\| \to 0 \Rightarrow \|xy_n - xy\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

下面给出几个常用的 Banach 代数的例子：

例 1. 在 Banach 空间 E 上定义且取值在其内的一切有界线性算子的全体 $\mathfrak{C}(E)$ 是一个 (B)-代数（特别，当 E 是 Hilbert 空间时，$\mathfrak{C}(E)$ 常称为"运算子代数"，而当 E 是有穷维欧氏空间时，则 $\mathfrak{C}(E)$ 即为"方阵代数"）.

例 2. 复数域 $\boldsymbol{C}$ 本身是域 $\boldsymbol{C}$ 上的 (B)-代数，其中运算就是平常的加法和乘法，而元的范数就是复数的模.

例 3. 在 Banach 空间 $C(\Omega)$ 中，引入乘法 $(x \cdot y)(t) = x(t)y(t)$ $(\forall t \in \Omega)$，那么，$C(\Omega)$ 构成一个 (B)-代数，并且它满足乘法不等式，即

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in C(\Omega).$$

注 1. 当例 3 中 Ω 是有穷集时，如果设其中点为 $\{1, 2, \cdots, n\}$，则 $C(\Omega)$ 即为 n 维复数空间 $\boldsymbol{C}^n$，这时，由原范数定义可知，

$$\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \quad \text{有} \quad \|x\|_1 = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|,$$

但是，如果令

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2},$$

则有

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\, \|x\|_1.$$

从而知 $\|x\|$ 与 $\|x\|_1$ 两个范数是"拓扑等价"的（即决定同样的收敛），因此，当把空间 $\boldsymbol{C}^n$ 改赋以范数 $\|x\|$ 时(此即通常以"向量长度"定义为范数的 n 维复欧氏空间)，它仍是 (B)–代数

注 2. 当例 3 中 $\Omega = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ 时，即得到空间 (c) 是 (B)–代数，那里 $x = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in (c)$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \xi_0$，且其内元间乘法定义为"按坐标相乘"。

例 4. 设 A 表示在复平面内单位圆 $|t| \leqslant 1$ 上连续并在 $|t| < 1$ 内解析的复变函数 $x(t)$ 的全体，范数定义为

$$\|x\| = \max_{|t| \leqslant 1} |x(t)|,$$

加法，数乘，乘法运算如常．那么，容易证明 A 构成一个满足乘法不等式的 (B)–代数．

例 5 (Wiener 环)．设 W 是实轴 $(-\infty, +\infty)$ 上实变数复值的绝对收敛三角级数 $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int}$ 的全体，按普通定义加法和数乘，范数定义为

$$\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|,$$

而"乘法"定义为对任意

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int},$$

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_n e^{int},$$

$$(x*y)(t)=z(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_n e^{int}$$

$\left(\text{其中，}\zeta_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_{n-k}\eta_k\right)$. 那么，$W$ 构成一个满足乘法不等式的 (B)–代数.

验. W 构成一个 Banach 空间,并且是域 $\boldsymbol{C}$ 上的代数均是容易验证的. 下面仅说明它是满足乘法不等式的.

如上所设 $x, y\in W$,那么,

$$\|(x*y)\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\zeta_n|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_{n-k}\cdot\eta_k\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\xi_{n-k}\cdot\eta_k|$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_{n-k}|\right)\cdot|\eta_k|$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}|\xi_i|\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\eta_j|=\|x\|\cdot\|y\|.$$

验毕.

例 5′. 设 $L^1(\boldsymbol{Z})$表示一切满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|<+\infty$ 的数列 $x=(\xi_n)$ $(n=0, \pm1, \pm2,\cdots)$ 的全体,按普通意义下定义加法与数乘,按"结式"定义乘法,即

$$(\xi_n)*(\eta_n)=(\zeta_n)$$

(其中，$\zeta_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_{n-k}\eta_k$, $n=1, 2,\cdots$) 那么，当把此处的每个元 $x=(\xi_n)$ 与例 5 中的相应元 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{int}$ 等同时，则容易看出 $L^1(\boldsymbol{Z})$ 亦构成一个满足乘法不等式的 (B)–代数.

例 6. 对于 $(-\infty, \infty)$ 上的复值绝对可积函数所组成的

Banach 空间 $L^1(-\infty, \infty)$，这里范数定义为

$$\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \quad (x \in L^1(-\infty, \infty)).$$

当定义其间的乘法为

$$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

时,则其构成一个满足乘法不等式的 (B)-代数.

验. 下面仅验证，上述定义的乘法是封闭的并且满足乘法不等式和乘法的结合律:

i. 乘法的封闭性. 此需证明,如果任给 $x, y \in L^1$,则 $x*y$ 有定义，且仍属于空间 L^1. 由假设可知 $x(t)$, $y(t)$ 均为可测函数，且 $x(t-\tau)$, $x(t-\tau)y(\tau)$ 亦为二元可测函数. 由 Fubini 定理的推理,可知只要下面三个积分中有一个有穷,则有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)\cdot y(\tau)| dt d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)\cdot y(\tau)| d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)| dt \qquad (1)\end{aligned}$$

成立. 但由于 Lebesgue 测度对于直线上的平移 $t \to t-\tau$ 是不变的,故知

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty.$$

所以从 (1) 式推得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)y(\tau)| d\tau < +\infty,$$

即导出,殆遍一切的 $t \in (-\infty, \infty)$，函数

$$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

是存在的,并为 t 的可测函数,而且它还是绝对可积的. 此即推得

$$x*y \in L^1(-\infty, \infty).$$

ii 乘法不等式. 事实上，由定义，上面 (i) 后面的关系式，我们立即导出

$$\begin{aligned}\|x*y\| &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau\right| dt \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|y(\tau)|d\tau\int_{-\infty}^{\infty}|x(t-\tau)|dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|y(\tau)|d\tau=\|x\|\cdot\|y\|.\end{aligned}$$

iii. 乘法满足结合律. 事实上，由 Fubini 定理及变数替换，我们便可推得

$$\begin{aligned}x*(y*z) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau-\sigma)z(\sigma)d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(\sigma)d\sigma\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\sigma)y(\tau-\sigma)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(\sigma)d\sigma\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\sigma-\tau)y(\tau)d\tau \\ &= (x*y)*z.\end{aligned}$$

验毕.

例 7. 设 D_n 是定义在 $[0, 1]$ 上的一切有连续 n 阶导函数的复数值函数 $x=x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的全体. 加法、数乘和乘法运算定义如常. 且范数定义为

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n}\frac{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(k)}(t)|}{k!},$$

那么 D_n 构成一满足乘法不等式的 (B)-代数.

验. 首先，容易验证上面 $\|x\|$ 满足范数的定义，并且由数学分析中所知的关于函数列在一致收敛的条件下逐项微分的定理，可以证明 D_n 构成一个 Banach 空间. 而在如常定义的乘法运算下也容易证明 D_n 乃是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的代数，下面仅证明其对乘法满足乘法不等式. 为方便起见，我们设

$$\alpha_k = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(k)}(t)|,\quad \beta_k = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|y^{(k)}(t)| \quad (k=0, 1, 2, \cdots).$$

则由关于乘积函数的导数的 Leibniz 公式，可得

$$(x\cdot y)^{(k)}(t)=\sum_{s=0}^{k}c_k^s x^{(s)}(t)\cdot y^{(k-s)}(t),$$

从而有

$$\begin{aligned}\|x\cdot y\|&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|(xy)^{(k)}(t)|}{k!}\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k}c_k^s\frac{1}{k!}\alpha_s\beta_{k-s}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{\alpha_s\beta_{k-s}}{s!(k-s)!}\\&\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_j}{j!}=\|x\|\cdot\|y\|.\end{aligned}$$

验毕.

例 8. 设 $V^{(p)}(p\geqslant 1)$ 是 $[0,1]$ 上一切绝对连续，且具有 p 次幂可积的导函数的函数 $x(t)$ 的全体，加法、数乘和乘法的运算如常，而范数定义为

$$\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\left(\int_0^1|x'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

那么，$V^{(p)}$ 构成一满足乘法不等式的 (B)-代数.

验. 首先，上面 $\|x\|$ 构成范数是容易验证的，这里，仅需注意到在验证范数的“三角不等式”时，要利用 Minkowski 不等式.

其次，可验证 $V^{(p)}$ 在上面的范数定义下构成一 Banach 空间. 下面，我们仅证明 $V^{(p)}$ 的完备性. 设元列 $\{x_n\}\subset V^{(p)}$，满足

$$\|x_n-x_m\|\to 0\quad(n,m\to\infty),$$

那么，(i) 由于 $x_n(t)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，故存在极限函数 $x(t)$，又因为 $x_n(t)$ 在 $[0,1]$ 中绝对连续，故 $x(t)$ 也必连续. (ii) 由于 $x_n'(t)$ 在 $[0,1]$ 中是一个“p 幂平均收敛”列，因而由空间 L^p 的完备性，可知必存在一个 p 幂可积的函数 $y(t)$，使得

$$\|x_n'-y\|_p\to 0\quad(n\to\infty)$$

(在这里及下面的式子中，我们均用 $\|x\|_p$ 表示 x 在空间 L^p 的范数

$\left[\int_0^1 |x(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$). 但又由于 $x_n(t)$ 是绝对连续的，故应有

$$x_n(t) = \int_0^t x_n'(\tau)d\tau + x_n(0).$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\left|x_n(t) - x_n(0) - \int_0^t y(\tau)d\tau\right| \\
&= \left|\int_0^t x_n'(\tau)d\tau - \int_0^t y(\tau)d\tau\right| \\
&\leqslant \int_0^t |x_n'(\tau) - y(\tau)|d\tau \leqslant \int_0^1 |x_n'(\tau) - y(\tau)|d\tau \\
&\leqslant \left[\int_0^1 |x_n'(\tau) - y(\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 1^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x_n' - y\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

(上面，数 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，且使用了 Hölder 不等式). 因而

$$\int_0^t y(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty} [x_n(t) - x_n(0)] = x(t) - x(0).$$

由于不定积分 $\int_0^t y(\tau)d\tau$ 的导函数是殆遍等于 $y(t)$ 的，所以有

$$y(t) \underset{(殆遍)}{=\!=} [x(t) - x(0)]' = x'(t).$$

由此，我们便可推得

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &= \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_n(t) - x(t)| + \left[\int_0^1 |x_n'(t) - x'(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_n(t) - x(t)| + \left[\int_0^1 |x_n'(t) - y(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_n(t) - x(t)| + \|x_n' - y\|_p \to 0 \\
&\qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

从而证得空间 $V^{(p)}$ 的完备性.

最后，为要说明 $V^{(p)}$ 构成 (B)-代数，这里我们仅说明上面乘法定义的封闭性（由普通函数乘法的定义可知结合律是显然成立

的）以及乘法不等式成立，因为其他性质均是容易验证的．这里，乘法确实是在全空间 $V^{(p)}$ 中有定义的． 因为如果 x，y 都是绝对连续，则它们在[0，1]上的乘积亦是绝对连续的，且还有

$$\left\{\int_0^1 |(xy)'(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_0^1 |x'(t)y(t) + x(t)y'(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |y(t)| \left[\int_0^1 |x'(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \left[\int_0^1 |y'(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$< +\infty$$

从而即知 x，$y \in V^{(p)}$． 此外，由上式也容易推得

$$\|x\cdot y\| \leqslant \max_t |x(t)| \cdot \max_t |y(t)| + \max_t |x(t)| \cdot \|y'\|_p$$

$$+ \max_t |y(t)| \cdot \|x'\|_p \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

验毕．

注 3． 并不是所有的 Banach 代数均是满足乘法不等式的(参看下面习题 1)．

习　　题

1．试证明：在 §1.2 习题 5 中引出的在 [0，1] 上有 k 阶连续导函数的函数 $x(t)$ 的全体 $C^{(k)}[0,1]$，在加法、数乘和乘法如通常定义，且范数定义为

$$\|x\| = \sum_{m=0}^{k} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(m)}(t)|$$

时，构成一个 (B)-代数，但是它不满足乘法不等式．

2．设 $D_m^{(\infty)}$ 表示定义于闭直线 $[-\infty, +\infty]$ 上的一切具有 m 阶绝对可积且连续的导函数的绝对可积的函数全体，运算如常定义，范数定义如下 $\forall x(t) \in D_m^{(\infty)}$，

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \max_{-\infty<t<\infty} |x^{(k)}(t)| + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \int_{\infty}^{\infty} |x^{(k)}(t)| dt,$$

试证明 $D_m^{(\infty)}$ 构成一满足乘法不等式的 (B)-代数．

3．设 $V^{(b)}$ 是定义于闭直线 $[-\infty, \infty]$ 上的一切囿变右连续，且 $x(-\infty) = 0$ 的复值函数的全体，加法，数乘如常定义，范数定义成

$$\|x\| = \text{VarRe}\quad x(t) + \text{Var}\, I_m\quad x(t),$$

乘法定义为

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)dx_2(\tau) \quad (\text{其中积分是 } R\text{-}S \text{ 积分}),$$

试证明 $V^{(b)}$ 构成一满足乘法不等式的 (B)-代数.

§7.2. Banach 代数的同构

本节，我们要给出关于数域 $\boldsymbol{K}$ 上的任何 Banach 代数，与具有范数为 1 的"主单位元"的 Banach 代数以及满足乘法不等式的 Banach 代数之间的密切关系. 为此，我们先给出下面关于主单位元的定义:

定义 1. Banach 代数中的元 e 称为主单位元，是指对于该代数中的任意元 x，均有 $xe = ex = x$.

例. $\mathfrak{E}(E)$ 中的主单位元就是不变算子 C. 实数域 $\boldsymbol{R}$ 中的主单位元就是数 1 . $C(\Omega)$, A, W, D_n, $V^{(p)}$ 中的主单位元就是那里恒等于 1 的函数.

我们必须注意，并非一切 Banach 代数都有主单位元，下面就是一个相反的例子:

反例. (B)-代数 $L^1(-\infty, \infty)$ 中无主单位元.

验. 反之，如果设 $L^1(-\infty, \infty)$ 中有主单位元 e，那么，$\forall x \in L^1(-\infty, \infty)$，均有

$$x(t) = (e*x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

特别地，对任意有界的 $|x(t)| \leqslant \beta$ 的元 $x \in L^1(-\infty, \infty)$，有

$$\begin{aligned}|x(t+\delta) - x(t)| &= |(e*x)(t+\delta) - (e*x)(t)| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} e(t+\delta-\tau)x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e(t-\tau)x(\tau)d\tau\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e(t+\delta-\tau) - e(t-\tau)| \cdot |x(\tau)|d\tau \\ &\leqslant \beta \int_{-\infty}^{\infty} |e(t+\delta-\tau) - e(t-\tau)|d\tau.\end{aligned}$$

但由变量替换以及利用到空间 $L^1(-\infty,\infty)$ 中的元 $x(t)$ 关于"平移 $t\to t+\delta$"的连续性[参看 § 1.3 习题 6],以上便导出

$$|x(t+\delta)-x(t)|\leqslant\beta\int_{-\infty}^{\infty}|e(t+\delta)-e(t)|\,dt$$
$$=\beta\|e(t+\delta)-e(t)\|\to 0\quad(\delta\to 0).$$

此即在空间 $L^1(-\infty,\infty)$ 中，任意的有界函数均是连续函数. 矛盾.(亦可由上面第一式,特别取 $x(t)=\chi_{[a,b]}(t)$ 导出与绝对连续性矛盾.)验毕.

定义 2. 数域 $\boldsymbol{K}$ 上的 (B)-代数 $\mathfrak{A}$ 中的子集 $\mathfrak{S}$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的 Banach 子代数,是指 $\mathfrak{S}$ 按 $\mathfrak{A}$ 中的运算与范数亦成为一(B)-代数.

定义 3. 数域 $\boldsymbol{K}$ 上的两 (B)-代数 $\mathfrak{A}_1$ 与 $\mathfrak{A}_2$ 称为同构的,是指它们作为 Banach 空间是等价的(参看 § 1.5),而且还保存乘法(即有"等价映象"φ，使当 $x_1\overset{\varphi}{\longleftrightarrow}x_2$，$y_1\overset{\varphi}{\longleftrightarrow}y_2$时，便有

$$x_1y_1\overset{\varphi}{\longleftrightarrow}x_2y_2;$$
$$\forall x_1,\ y_1\in\mathfrak{A}_1,\ x_2,\ y_2\in\mathfrak{A}_2).$$

例. 设域 $\boldsymbol{K}$ 上的 (B)-代数 $\mathfrak{A}$ 具有主单位元 e，且 $\|e\|=1$，那么数域 $\boldsymbol{K}$ 必同构于 $\mathfrak{A}$ 的 (B)-子代数 $\{\alpha e\,|\,\alpha\in\boldsymbol{K}\}$.

下面给出两个有用的定理，借助于它，我们将可以把任意的 (B)-代数与具有主单位元 e，又有 $\|e\|=1$,而且还满足乘法不等式的 (B)-代数之间的关系找出来.

定理 1. 数域 $\boldsymbol{K}$ 上的任何 (B)-代数必同构于一个具有主单位元 e，且 $\|e\|=1$ 的 (B)-代数的某一 (B)-子代数.

证. 设已给 (B)-代数 $\mathfrak{A}$，我们任取一个元 $e^0\,\bar{\in}\,\mathfrak{A}$，做一新的集合

$$\mathfrak{A}'=\{x\oplus\lambda e^0\,|\,x\in\mathfrak{A},\ \lambda\in\boldsymbol{K}\},$$

对于 $\mathfrak{A}'$ 中的元定义运算和范数为

$$(x\oplus\lambda e^0)+(y\oplus\mu e^0)=(x+y)\oplus(\lambda+\mu)e^0;$$
$$\alpha(x\oplus\lambda e^0)=\alpha x\oplus(\alpha\lambda)e^0;$$
$$(x\oplus\lambda e^0)\cdot(y\oplus\mu e^0)=(xy+\lambda y+\mu x)\oplus(\lambda\mu)e^0;$$
$$\|x\oplus\lambda e^0\|=\|x\|+|\lambda|;\quad\forall x,\ y\in\mathfrak{A};\ \lambda,\ \alpha\in\boldsymbol{K}.$$

由于 $\mathfrak{U}' \underset{(等价)}{=\!=} \mathfrak{U} \times \boldsymbol{K}$，故由空间 $\mathfrak{U}$ 的完备性(因 $\mathfrak{U}$ 是 (B)-代数) 及数域 $\boldsymbol{K}$ 的完备性，从而知 $\mathfrak{U}'$ 亦为 (B)-空间. 且由乘法定义，知 $\mathfrak{U}'$ 亦是对"左乘"和"右乘"连续的，从而容易验证其亦是一个 (B)-代数. 而当设元 $e = \theta \oplus e^0 \in \mathfrak{U}'$ 时，从上面的乘法定义易见 e 乃是 $\mathfrak{U}'$ 的主单位元，且其范数

$$\|e\| = \|\theta \oplus e^0\| = \|\theta\| + |1| = 1.$$

并且，显然易见 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 同构于 $\mathfrak{U}'$ 的 (B)-子代数

$$\{x + \lambda e \mid x \in \mathfrak{U}, \lambda = 0\}.$$

证毕.

注 1. 从上面定义 1 后面的反例中我们已知 $L^1(-\infty, \infty) = \mathfrak{U}$ 是无主单位元的，而当依上面定理"添加"了主单位元后，这时所构成的 (B)-代数 $\mathfrak{U}'$，常记为 $V^{(a)}$.

定理 2. 任何具有主单位元的 (B)-代数 $\mathfrak{U}$. 必可经过改赋另一"拓扑等价"的范数后，同构于 (B)-代数 $\mathfrak{E}(\mathfrak{U})$ 的某一个 (B)-子代数.

证. 下面我们分五步证明:

1) 令 $A_x(y) = x \cdot y; \quad \forall y \in \mathfrak{U}.$

由于 $\mathfrak{U}$ 是 (B)-代数，故知上式后面乘法是有定义的，并且作用后的元仍属于空间 $\mathfrak{U}$. 另外由其对"右乘"是连续的，故知 A_x 是从 E 上到 E 内的连续算子. 而再由定义显然知它是分配的，从而即知 $A_x \in \mathfrak{E}(\mathfrak{U})$.

2) 令 $\mathfrak{S} = \{A_x \mid x \in \mathfrak{U}\}$.

当然 $\mathfrak{S}$ 乃 $\mathfrak{E}(\mathfrak{U})$ 内的子集，对于空间 $\mathfrak{U}$，改赋其中元的范 $\|x\|$ 为

$$\|x\|_1 = \|A_x\|, \quad \forall x \in \mathfrak{U}.$$

为区别起见，记这时所成的赋范线性空间为 $\mathfrak{U}_1$，现做映象 φ，使得

$$x \overset{\varphi}{\longmapsto} A_x, \quad \forall x \in \mathfrak{U}_1,$$

那么，φ 必满足

i. φ 是 $\mathfrak{U}_1$ 到 $\mathfrak{S}$ 上的一对一的保范映象. 事实上，由上面假设，余下仅证明 φ 的一对一的性质即可. 但这是显然的，因为如果

$x = y$，那么，当设 $x \overset{\varphi}{\longmapsto} A_x$，$y \overset{\varphi}{\longmapsto} A_y$ 时，则有

$$(A_x - A_y)(z) = A_x(z) - A_y(z) = xz - yz$$
$$= (x - y) \cdot z = \theta, \quad \forall z \in \mathfrak{U}.$$

此即得到 $A_x = A_y$. 而当 $x \neq y$ 时，由于 $A_x(e) \neq A_y(e)$，故知

$$A_x \neq A_y.$$

ii. φ 是线性的. 这是明显的，因为我们有

$$A_{\alpha x+\beta y}(z) = (\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot y \cdot z$$
$$= \alpha A_x(z) + \beta A_y(z) = (\alpha A_x + \beta A_y)(z),$$
$$\forall z \in \mathfrak{U}, \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}.$$

iii. φ 是保存乘法的. 这同样是明显的，因为我们有

$$A_{xy}(z) = (xy) \cdot z = x \cdot (yz) = A_x(y \cdot z)$$
$$= A_x(A_y(z)) = (A_x A_y)(z), \quad \forall z \in \mathfrak{U}.$$

综合上面 i, ii, iii 可知，φ 是由空间 $\mathfrak{U}_1$ 到 $\mathfrak{S}$ 上的保范的代数同构映象，也即赋范线性空间 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{S}$ 是等价的，并且还保存乘法.

3) $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{E}(\mathfrak{U})$ 的一个 (B)-子代数. 由上面 2)我们可知，$\mathfrak{S}$ 是个代数. 而又由 $\mathfrak{E}(\mathfrak{U})$ 乃是一个 (B)-代数，因而，只要证明 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{E}(\mathfrak{U})$ 中的一个闭集就证得了. 下面我们分两步证明：

i. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' = \{A \mid A \in \mathfrak{E}(\mathfrak{U})', A(yz) = A(y) \cdot z\}$. 首先，设任意 $A_x \in \mathfrak{S}$，由定义可得

$$A_x(yz) = x(yz) = (xy) \cdot z = A_x(y) \cdot z,$$
$$\forall y, z \in \mathfrak{U}.$$

也即有 $A_x \in \mathfrak{S}'$. 另一方面，对任意 $A \in \mathfrak{S}'$，由于 $\mathfrak{U}$ 有主单位元 e，故知恒有

$$A(x) = A(ex) = A(e) \cdot x = A_{A(e)}(x), \quad \forall x \in \mathfrak{U}.$$

即 $A = A_{A(e)} \in \mathfrak{S}$.

ii. $\mathfrak{S}'$ 是 $\mathfrak{E}(\mathfrak{U})$ 中的闭集. 事实上，如果设 $\{A_n\} \subset \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$，$A \in \mathfrak{E}(\mathfrak{U})$，有 $A_n \to A (n \to \infty)$，则由 $\mathfrak{S}'$ 的定义；及 $\mathfrak{U}$ 是 (B)-代数，故对"左乘"是连续的；从而推得

$$A(yz)=\lim_{n\to\infty}A_n(yz)=\lim_{n\to\infty}A_n(y)\cdot z=A(y)\cdot z,$$

也即推得 $A\in\mathfrak{S}'$.

4) 空间 $\mathfrak{U}$ 在改赋的范数 $\|x\|_1$ 下乃是一与 $\mathfrak{S}$ 同构的 (B)-代数. 这是明显的,因为由上面 2) 已经知道,这时 $\mathfrak{U}$ 在范 $\|x\|_1$ 下所成的赋范线性空间 $\mathfrak{U}_1$ 是与 $\mathfrak{S}$ 等价的, 且保存乘法. 从而由 3) 指出 $\mathfrak{S}$ 是 (B)-代数就可推出 $\mathfrak{U}_1$ 亦是 (B)-代数, 故由定义即知 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{S}$ 是 Banach 代数同构.

5) 空间 $\mathfrak{U}$ 中的范数 $\|x\|$ 和 $\|x\|_1$ 是拓扑等价的.

首先,由定义可知

$$\|x\|_1=\|A_x\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|A_x(y)\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|xy\|$$

$$\geqslant\left\|x\cdot\frac{e}{\|e\|}\right\|=\frac{\|x\|}{\|e\|},$$

也即有

$$\|x\|\leqslant\|e\|\cdot\|x\|_1\quad(x\in\mathfrak{U}).$$

但由定理的假设及上面 4), 可知 $\mathfrak{U}$ 在范 $\|x\|$ 和范 $\|x\|_1$ 下都构成 (B)-代数, 从而均是 Banach 空间, 因而直接由 § 5.2 中的推理 4 可完成本结论. 证毕.

推理 1. 任何具有主单位元 e 的 (B)-代数可以改赋以拓扑等价的范数 $\|x\|_1$, 使得在该范数下, 满足乘法不等式,且主单位元 e 的范数为 1 .

证. 由在定理 2 中的证明,可知只要令 $\|x\|_1=\|A_x\|$, 则有

$$\|xy\|_1=\|A_xA_y\|\leqslant\|A_x\|\cdot\|A_y\|=\|x\|_1\cdot\|y\|_1$$

以及

$$\|e\|_1=\|A_e\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|A_e(y)\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|e\cdot y\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|y\|=1.$$

证毕.

推理 2. 对于任意的 (B)-代数 $\mathfrak{U}$, $(x, y)\longmapsto xy$ 乃是 $\mathfrak{U}\times\mathfrak{U}$ 到 $\mathfrak{U}$ 中的连续映象.

证. 借助于上面定理 1 可以在 $\mathfrak{U}$ 中添加主单位元, 使之成为 (B)-代数 $\mathfrak{U}'$, 然后由上面推理 1 ,可把 $\mathfrak{U}'$ 中的范数与满足乘法不

等式的 (B)-代数 $\mathfrak{C}(\mathfrak{U}')$ 中的范数拓扑等价．从而，由于在后面范数下，$(x, y) \longmapsto xy$ 是二元连续的映象，故可推得在 $\mathfrak{U}'$ 的原来范数下亦是如此；特别地对于 $\mathfrak{U}'$ 内的 (B)-子代数 $\mathfrak{U}$ 亦对．证毕．

习　　题

1．把 §7.1 习题 1 的 (B)-代数 $C^{(k)}[0;1]$ 改赋一新的拓扑等价的范数，使在该新的范数下，代数满足乘法不等式．

2．试证明：任一 (B)-代数必拓扑等价，且代数地同构(与范数无关)于一个满足乘法不等式，具有范数为 1 的主单位元的 (B)-代数的 (B)-子代数．

3．由 $\mathfrak{U}$ 的完备性直接证明定理 2 中的集 $\mathfrak{S} = \{A_x | x \in \mathfrak{U}\}$ 是$\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ 的闭集．

§7.3.　正则元、幻、极大幻与根基

基于 §7.2 的两个推理，在本节以及以后各节的讨论中，如无特别的声明，我们均把所考虑的 Banach 代数 $\mathfrak{U}$ 看作含有范数为 1 的主单位元 e，且范数是满足乘法不等式的．

(一)

定义 1． (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的元 y 称为元 x 的右逆，或称 x 为 y 的左逆，是指$xy = e$．如果 y 即是 x 的右逆又是 x 的左逆，则称为 x 的逆，记为 x^{-1}．对于任意元 $x \in \mathfrak{U}$．如果 x 在 $\mathfrak{U}$ 中有逆，则称 x 是 $\mathfrak{U}$ 的正则元，否则称为 $\mathfrak{U}$ 的特异元．

注 1． 与代数学中所熟知的那样，当 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的一元 x 在 $\mathfrak{U}$ 内既有左逆又有右逆时，则 x 有逆 x^{-1}；当元 x 有逆时，则逆元必是唯一的；当 x 有逆 x^{-1} 时，则 x^{-1} 也有逆为 x；当 $\mathfrak{U}$ 中元 x 和 y 均有逆存在时，则 $x \cdot y$ 也有逆存在，并且有

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1};$$

注 2． 一般说来，当 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的一元 x 在 $\mathfrak{U}$ 内有左(右)逆时未必有右(左)逆．

下面我们举几个关于逆元的例子：

例 1. 如果 $\mathfrak{U} = \boldsymbol{C}$,则其内所有非零的元均有逆.

例 2. 为了 $\mathrm{T} \in \mathfrak{C}(E)$($E$ 为 Banach 空间)在 (B)-代数 $\mathfrak{C}(E)$ 内有逆,必须且只须 T 的值域 $W(\mathrm{T}) = E$,并且存在一正数 α,使得 $\|\mathrm{T}(x)\| \geqslant \alpha\|x\|$, $\forall x \in E$. (参看 § 2.1 定理 2 后的推理 2).

例 3. 在 Banach 空间 $(l^p)(p \geqslant 1)$ 中,设其上的有界线性算子 T, $U_k(k = 1, 2, \cdots)$ 定义为

$$\mathrm{T}(e_n) = e_{n+1};$$

$$U_k(e_n) = \begin{cases} e_{k-1}, & \text{当 } n = 1 \text{ 时} \\ e_{n-1} & \text{当 } n \neq 1 \text{ 时} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots,\ k = 1, 2, \cdots),$$

其中,约定 $e_0 = \theta$, e_n 即 (l^p) 中的基底 $e_n = (0, \cdots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, \cdots)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 那么, $U_k(k = 1, 2, \cdots)$ 都是 T 的左逆,但 T 无右逆,因而不存在逆.

验. 首先,由上面算子的定义不难得到

$$(U_k \mathrm{T})(x) = U_k[\mathrm{T}(x)] = x, \quad \forall x \in (l^p).$$

故知 $U_k(k = 1, 2, \cdots)$ 均为 T 的左逆. 其次,注意到上面的注 1,我们可知,如果 T 还有右逆存在的话,则右逆必等于左逆(等于逆),即亦为 $U_k(k = 1, 2, \cdots)$,然而由

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}\,U_k)(e_1) &= \mathrm{T}[U_k(e_1)] \\ &= \begin{cases} \theta, & k = 1 \\ e_k, & k \neq 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

可知这是不可能的. 验毕.

下面我们给出关于正则元的两个定理:

定理 1. 设 $\mathfrak{U}$ 是 (B)-代数.那么,对于任意元 $x \in \mathfrak{U}$,只要它满足 $\|x - e\| < 1$,则它就必在 $\mathfrak{U}$ 中存在逆元 x^{-1},并且

$$x^{-1} = e + \sum_{k=1}^{\infty} (e - x)^k.$$

证. 首先,由于假设 $\|e - x\| = \|x - e\| < 1$,故由乘法不等式,便可推出

$$\|e\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|(e-x)^k\| \leqslant \|e\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|e-x\|^k < \infty.$$

从而由 $\mathfrak{U}$ 的完备性(参看 § 1.2 习题 9),可知存在元 $y \in \mathfrak{U}$,使得

$$y_n = e + \sum_{k=1}^{n} (e-x)^k \to y = e + \sum_{k=1}^{\infty} (e-x)^k \quad (n \to \infty).$$

再由(B)-代数 $\mathfrak{U}$ 对于乘积的连续性,可得

$$xy_n \to xy, \quad y_n x \to yx \quad (n \to \infty). \tag{1}$$

另一方面,由

$$xy_n = (e-(e-x))\left(e + \sum_{k=1}^{n} (e-x)^k\right) = e - (e-x)^{n+1},$$

$$y_n x = \left(e + \sum_{k=1}^{n} (e-x)^k\right)(e-(e-x)) = e - (e-x)^{n+1},$$

同样由假设 $\|e-x\| < 1$, 可得 $(e-x)^{n+1} \to \theta (n - \infty)$,也即推得

$$xy_n = y_n x \to e \quad (n \to \infty).$$

因此,根据 1 式,则得到 $xy = yx = e$, 此即导出

$$y = e + \sum_{k=1}^{\infty} (e-x)^k$$

就是 x 的逆元 x^{-1}. 证毕.

定理 2. (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的正则元的全体组成一个开集 $G(\mathfrak{U})$, 而且 $x \xrightarrow{\varphi} x^{-1}$ 是定义在 $G(\mathfrak{U})$ 上的连续映象.

证. 下面分别证明结论:

1) $G(\mathfrak{U})$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的开集. 设 $x_0 \in G(\mathfrak{U})$, 那么 x_0^{-1} 是存在的, 且

$$x_0 x_0^{-1} = x_0^{-1} x_0 = e.$$

由于 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 对乘积的连续性, 故对数 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in \mathfrak{U}$, 只要 $\|x - x_0\| < \delta$,就有

$$\|(x-x_0)x_0^{-1}\| < 1 \quad 和 \quad \|x_0^{-1}(x-x_0)\| < 1.$$

也即有

$$\|xx_0^{-1}-e\|<1 \quad 和 \quad \|x_0^{-1}x-e\|<1.$$

但当注意到前面定理 1 时,由上面两个不等式,便可推得元 xx_0^{-1} 及元 $x_0^{-1}x$ 均有逆,即存在元 $(xx_0^{-1})^{-1}\in\mathfrak{U}$ 及元 $(x_0^{-1}x)^{-1}\in\mathfrak{U}$,使得

$$xx_0^{-1}(xx_0^{-1})^{-1}=e, \quad (x_0^{-1}x)^{-1}\cdot x_0^{-1}x=e.$$

由上两式我们还可看出,元 x 在 $\mathfrak{U}$ 中既有右逆又有左逆,因而导出 x 有逆 x^{-1}. 即对任何满足上面不等式 $\|x-x_0\|<\delta$ 的 $x\in\mathfrak{U}$,均有 $x\in G(\mathfrak{U})$,此即证毕 $\mathfrak{U}(G)$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的开集.

2) $x\overset{\varphi}{\longmapsto}x^{-1}$ 是定义在 $G(\mathfrak{U})$ 上的连续映象. 设 $\{x_n\}\subset G(\mathfrak{U})$, $x\in G(\mathfrak{U})$, 并有 $x_n\to x(n\to\infty)$. 则由 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 对乘积的连续性,便可得到

$$x_nx^{-1}\to xx^{-1}=e \quad (n\to\infty).$$

因而可知 $\forall\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, $\exists N$(自然数),使得当 $n>N$ 时,均有

$$\|x_nx^{-1}-e\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,从上面定理 1 及前面注 1,便可推得

$$xx_n^{-1}=(x_nx^{-1})^{-1}=e+\sum_{k=1}^{\infty}(e-x_nx^{-1})^k,$$

即

$$\begin{aligned}\|xx_n^{-1}-e\|&=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(e-x_nx^{-1})^k\right\|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|e-x_nx^{-1}\|^k\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{2^k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.\end{aligned}$$

也即

$$xx_n^{-1}\to e \quad (n\to\infty).$$

最后,根据 (B)-代数对于乘积的连续性,我们就可得到

$$x_n^{-1}=x^{-1}(xx_n^{-1})\to x^{-1} \quad (n\to\infty).$$

证毕.

(二)

下面我们给出关于幻的定义:

定义 2. (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的子集 I 称为左(右)幻(理想),是指它满足 (i) $I \neq \mathfrak{U}$; (ii) $x \in I$, $y \in I \Rightarrow \lambda x + \mu y \in I(\lambda, \mu \in \boldsymbol{K})$; (iii)$z \in \mathfrak{U}$, $x \in I \Rightarrow zx \in I$ (相应地 $xz \in I$). 如果 I 既是左幻又是右幻则称为两侧幻.

注 3. 从上面的定义显然易见,如果 I 是幻,必有 $e \notin I$ 和 $\theta \in I$;并且 I 是 $\mathfrak{U}$ 内的线性真子空间. 此外,任意多个左(右、两侧)幻的交必仍是左(右、两侧)幻.

下面,我们举几个关于幻的例子:

例 1. 由 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中零元 θ 所成的集 $\{\theta\}$ 是一个不足道的两侧幻,常称为"零幻".

例 2. 在 (B)-代数 $\mathfrak{E}(E)$ 中,对于 E 中某给定的元 $x_0 \neq \theta$,设

$$I_{(x_0)} = \{T \mid T(x_0) = \theta, T \in \mathfrak{E}(E)\}.$$

则 $I(x_0)$ 构成 $\mathfrak{E}(E)$ 的一个左幻,但未必是两侧幻.

验. 事实上, $I(x_0)$ 为左幻是明显的. 由定义 1 下面的例 3, 我们可以看出, 当取 $x_0 = e_1$ 时, 由于 $U_1e_1 = \theta$, 可知 $U_1 \in I(e_1)$. 但由 $(U_1T)e_1 = e_1 \neq \theta$, 知 $U_1T \notin I(e_1)$,即 $I(e_1)$ 不是 $\mathfrak{E}(E)$ 的右幻. 验毕.

例 3. 设 $\mathfrak{U}$ 是无主单位元的 (B)-代数, $\mathfrak{U}'$ 是由 $\mathfrak{U}$ 添加了主单位元 e 后而成的 (B)-代数,那么, $\mathfrak{U}$ 可以看作是 $\mathfrak{U}'$ 的两侧幻.

验. 事实上,由于对任意 $x \oplus \lambda e \in \mathfrak{U}'$, $y \in \mathfrak{U}$, 均有

$$(x \oplus \lambda e)y = xy + \lambda y \in \mathfrak{U},$$
$$y(x \oplus \lambda e) = yx + \lambda y \in \mathfrak{U}.$$

验毕.

下面讨论极大幻. 我们先给出下面的定义:

定义 3. (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的左(右、两侧)幻称为极大左(右、两侧)幻,是指它不是 $\mathfrak{U}$ 中任何其它左(右、两侧)幻的真子集.

注 4. 在非可易(非交换)的代数中. 极大左(右)幻也可能亦为其

极大两侧幻；例如，当取$\mathfrak{U}=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\right\}$时，则$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$与$\left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d\end{pmatrix}\right\}$均为其极大左幻，并且也是极大两侧幻. 然而，极大两侧幻则未必为极大左(右)幻；例如，当取 $\mathfrak{U}=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right\}$ 时，仅有 $\{\theta\}$ 为唯一极大两侧幻，然而，$\mathfrak{U}$ 却有左幻 $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0\end{pmatrix}\right\}$ 及右幻 $\left\{\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

例 1. 本定义上面的例 3，$\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{U}'$ 的极大两侧幻.

例 2. 在 (B)-代数 $C(\Omega)$ 中，$I_{(t_0)}=\{x \mid x\in C(\Omega),\ x(t_0)=0\}$ 是极大幻.

验. $I_{(t_0)}$ 是幻是容易验证的. 下面仅验证它是极大幻. 事实上，$\forall y \notin I_{(t_0)}(y\in C(\Omega))$，因有 $y(t_0)\neq 0$，故 $\forall z\in C(\Omega)$，必有

$$z(t)\equiv\left(z(t)-\frac{z(t_0)}{y(t_0)}y(t)\right)+\frac{z(t_0)}{y(t_0)}y(t),\quad \forall t\in\Omega.$$

由于在上式右边里，第一项是属于 $I(t_0)$ 的，而第二项乃是元 y 的常数倍，从而即知，如果 $I(t_0)$ 中“添加”了 y 后必成为整个 $C(\Omega)$，从而即知 $I(t_0)$ 乃是 $C(\Omega)$ 的极大幻. 验毕.

定理 3. 左(右、两侧)幻的闭包仍是左(右，两侧)幻.

证. 这里，我们仅讨论左幻，设 I 是 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 的左幻，如果有 $x_0, y_0\in\bar{I}$，那么必存在元列 $\{x_n\}, \{y_n\}\subset I$，使得有

$$x_n\to x_0,\quad y_n\to y_0\quad (n\to\infty).$$

因而，$\forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{K}$，$z\in\mathfrak{U}$，便可得

$$\alpha x_n+\beta y_n\to\alpha x_0+\beta y_0,\quad zx_n\to zx_0\quad (n\to\infty).$$

但由于 I 是左幻，故应有 $\{\alpha x_n+\beta y_n\}, \{zx_n\}\subset I$，从而由上式即推得 $\alpha x_0+\beta y_0,\ zx_0\in\bar{I}$.

再由 $e\notin\bar{I}$. 事实上，如果存在元列 $\{x_n\}\subset I$，使 $x_n\to e(n\to\infty)$，则由前面定理 1，可知对于充分大的 n_0，x_{n_0} 有逆元 $x_{n_0}^{-1}$ 存在；而由 I 是左幻，就推出 $e=x_{n_0}^{-1}x_{n_0}\in I$. 此显然与 I 为左幻矛盾. 故知 $\bar{I}\neq\mathfrak{U}$. 综合上面两段的结果，便推得 $\bar{I}$ 亦是左幻. 证毕.

由上面的定理我们可以直接得到下面的推论：

推理. 任何极大左(右、两侧)幻均是闭集.

定理 4. 任何一个左(右、两侧)幻必含在某一极大左(右、两侧)幻之中.

证. 同样地, 这里仅对左幻的情形证明. 设 I 是 (B)–代数 $\mathfrak{U}$ 的一个左幻,按"包含"关系,可知一切含有 I 之左幻集的全体形成一个有序集. 并且,如果设 $\{I_l\}$ 是其内一全序子集时,只要我们令集

$$I_0 = \bigcup_l I_l,$$

则知 I_0 满足

i. $\forall x, y \in I_0, \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}, z \in \mathfrak{U} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in I_0, zx \in I_0$. 事实上,由定义可知,如果 $x, y \in I_0$,则存在 $I_{l_1}, I_{l_2} \in \{I_l\}$,使得 $x \in I_{l_1}$, $y \in I_{l_2}$. 由于 $\{I_l\}$ 是全序的,故不妨设 $I_{l_1} \subset I_{l_2}$, 于是,从上式可知 $x, y \in I_{l_2}$. 而当注意到 I_{l_2} 是幻, 故立刻可推得 $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}, z \in \mathfrak{U}$, 应有

$$\alpha x + \beta y \in I_{l_2} \subset I_0 \quad \text{和} \quad zx \in I_{l_2} \subset I_0.$$

ii. $I_0 \neq \mathfrak{U}$. 由于 $\{I_l\}$ 内每一集均是 $\mathfrak{U}$ 的左幻,因而主单位元 e 不含于那里的每一集 I_l 中,故即 $e \notin \bigcup_l I_l = I_0$. 此即知

$$I_0 \neq \mathfrak{U}.$$

综合上面 i, ii 以及 I_0 的形成,可知 I_0 亦是 $\mathfrak{U}$ 中包含 I_l 的一个左幻,此即 I_0 是 $\{I_l\}$ 的上界, 从而借助于 Zorn 引理,知必存在一个含 I 的极大左幻. 证毕.

推理 1. 为了 (B)–代数 $\mathfrak{U}$ 中一元 x 有左(右)逆,必须且只须 x 不含在任何一个极大左(右)幻中.

证. 下面我们仅对左逆证明.

1) "$\Longrightarrow$" 设 x 有左逆 $z \in \mathfrak{U}$, 那么,如果 x 包含在某一极大左幻 I 中,则有 $zx = e \in I$, 此显然与 I 是极大左幻矛盾.

2) "$\Longleftarrow$" 反之, 如果此时 x 是无左逆的, 那么易见, 集 $I_{(x)} = \{yx \mid y \in \mathfrak{U}\}$ 不含有 e,且还是一个包含元 x 的左幻. 再利用上面定理 3 则知,必有一极大左幻包含着 $I_{(x)}$,从而也包含着 x,此显然与假设矛盾. 证毕.

由上面推理 1 我们可知，凡 $\mathfrak{U}$ 左（右）幻中的元均无左(右)逆存在，并且还直接可得到下面的推论：

推理 2. 如果 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 无非零的极大左幻及极大右幻，那么 $\mathfrak{U}$ 必是体.

定义 4. 设 $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ 是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的两个代数，由 $\mathfrak{U}_1$ 到 $\mathfrak{U}_2$ 上的映象 φ: $x_1 \overset{\varphi}{\longmapsto} x_2$ 称为同态映象 $(x_1 \in \mathfrak{U}_1,\ x_2 \in \mathfrak{U}_2)$，是指，对于一切元 $x_1, y_1 \in \mathfrak{U}_1$ 及数 $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$，均有

$$\alpha x_1 + \beta y_1 \overset{\varphi}{\longmapsto} \alpha x_2 + \beta y_2, \quad x_1 y_1 \overset{\varphi}{\longmapsto} x_2 y_2.$$

如果由 $\mathfrak{U}_1$ 到 $\mathfrak{U}_2$ 上有一同态映象，则称 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{U}_2$ 是代数同态的.

注 5. 如果上面的映象 $\varphi: x_1 \overset{\varphi}{\longmapsto} x_2$ 是一对一时，则 φ 即为"代数同构"，而当 $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ 为两个 Banach 空间，且映象 φ 还"保范"，则 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{U}_2$ 即为以前所称的"Banach 代数同构". 此外，由近世代数知识易知，如果 I 是代数 $\mathfrak{U}$ 的两侧幻，则 $\mathfrak{U}/I$ 也构成代数(一般称为商代数)，且 $\mathfrak{U}$ 必"代数同态"于商空间 $\mathfrak{U}/I$（商空间的定义，基本性质和一些符号可参看 § 1.4).

借助于上面注 5，下面给出关于一个两侧幻为极大两侧幻的命题. 为此，我们先给出下面引理：

引理. 设 I 是 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的一个闭两侧幻，则商空间 $\mathfrak{U}/I$ 在定义范数 $\|[x]\| = \inf\limits_{x \in [x]} \|x\|$，$\forall [x] \in \mathfrak{U}/I$，后，其构成一个含有范数为 1 的主单位元且范数满足乘法不等式的 (B)-代数.

证. 首先，由 § 1.4 的定理 3 可知 $\mathfrak{U}/I$ 亦是一个 Banach 空间. 而由注 3 可知它也是域 $\boldsymbol{K}$ 上的代数. 因而我们如果能证明它满足乘法不等式，那么它当然就是 (B)-代数了. 下面我们就来证明这一事实. 由于在代数 $\mathfrak{U}/I$ 中，元 $[x]\cdot[y] = [xy]$，而由 $\mathfrak{U}$ 满足乘法不等式的约定，因此，我们可得

$$\begin{aligned}\|[x]\cdot[y]\| = \|[xy]\| &= \inf_{x \in [x],\, y \in [y]} \|xy\| \\ &\leqslant \inf_{x \in [x], y \in [y]} \|x\| \cdot \|y\| = \inf_{x \in [x]} \|x\| \cdot \inf_{y \in [y]} \|y\| \\ &= \|[x]\| \cdot \|[y]\|, \quad \forall [x], [y] \in \mathfrak{U}/I.\end{aligned}$$

此即满足前面要求.

其次,仅要说明(B)-代数$\mathfrak{A}/I$具有范数为1的主单位元就行了. 事实上,当设e为$\mathfrak{A}$的主单位元时,由定义易见$[e]\in\mathfrak{A}/I$乃是$\mathfrak{A}/I$的单位元. 由于

$$\|[e]\|=\|[e]\cdot[e]\|\leqslant\|[e]\|^2,$$

故知$\|[e]\|\geqslant 1$; 另外由定义可得

$$\|[e]\|=\inf_{x\in[e]}\|x\|\leqslant\|e\|=1;$$

从而推得$\|[e]\|=1$. 证毕.

定理 5. 设I是(B)-代数$\mathfrak{A}$中一个闭两侧幻. 那么,为了I即是极大左幻且又是极大右幻必须且只须商空间$\mathfrak{A}/I$是体.

证. 1)"$\Longrightarrow$" 首先,由上面的引理可知,商空间$\mathfrak{A}/I$此时构成一个本节一开始所约定的(B)-代数. 根据定理4后的推理2可知,要能证明$\mathfrak{A}/I$中既无非零的极大左幻又无非零的极大右幻,命题的必要性则即得出.

反之,如果设$\mathfrak{A}/I$有某一非零的极大左幻$M=\{[x_\alpha]\}\subset\mathfrak{A}/I$,那么,由于$\varphi:\mathfrak{A}\longmapsto\mathfrak{A}/I$是同态映象,故当令$m=\varphi^{-1}(M)$时,当然可知集$m\subset\mathfrak{A}$,且它满足下面三个性质:

i. $\forall x, y\in m, \forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{K}\Rightarrow\alpha x+\beta y\in m$. 事实上,由于$M$是$\mathfrak{A}/I$中的左幻,而对上面$x, y\in m$,因$[x],[y]\in M$,故有

$$\alpha[x]+\beta[y]\in M\Rightarrow[\alpha x+\beta y]\in M\Rightarrow\alpha x+\beta y\in m.$$

ii. 对任意 $x\in m$, $z\in\mathfrak{A}\Rightarrow zx\in m$. 由$M$是$\mathfrak{A}/I$的左幻及$[x]\in M$, $[z]\in\mathfrak{A}/I$,可知

$$[z]\cdot[x]\in M\Rightarrow[zx]\in M\Rightarrow zx\in m.$$

iii. $e\overline{\in}m$. 因为由$[e]$乃$\mathfrak{A}/I$的主单位元,故知$[e]\overline{\in}M$,从而即知$e\overline{\in}m$.

综合上面 i, ii, iii,即知集m亦是$\mathfrak{A}$的一个左幻,且

$$m=\varphi^{-1}(M)\supset\varphi^{-1}([\theta])=I.$$

但由设I乃是$\mathfrak{A}$的一个极大左幻,因而必须有$m=I$. 再注意到在$\mathfrak{A}/I$中,$I=[\theta]$,从而知$M=\varphi(m)=[\theta]$,而此显然与开始

假设M为非零幻的极大左幻矛盾. 此即证毕 $\mathfrak{U}/I$ 无非零的极大左幻.

完全用上面类似的方法可知 $\mathfrak{U}/I$ 也无非零的极大右幻，从而定理的必要性证得.

2) "$\Longleftarrow$" 反之,如果设有某一左幻 m,使 $I\subsetneqq m$,那么,在上面 $\mathfrak{U}\longmapsto\mathfrak{U}/I$ 的典则同态映象下,必有一元 $[x_1]\neq[\theta]$, 使

$$[x_1]\in\varphi(m)=M\subset\mathfrak{U}/I.$$

但这时与上面必要性证明 1) 类似,可证明上面的集 M 亦是 (B)-代数 $\mathfrak{U}/I$ 中的一个左幻. 故这时由定理 4 后的推理 1 可知，上述商空间的非零元 $[x_1]$ 无左逆，此显然与定理假设 $\mathfrak{U}/I$ 是体相矛盾.

用完全类似的方法,可知，如果上述m是右幻时，同样必导至商空间的某一非零元无右逆，从而与 $\mathfrak{U}/I$ 是体的假设矛盾. 此即推得 I 既是极大左幻又是极大右幻,定理的充分性证得. 证毕.

(三)

下面,我们再引出一个有用的定理，并由此引出 Banach 代数的"根基"和"半单纯代数"的定义和它的几个例子.

定理 6. 设 x_0 是 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的一元. 那么，下面六条性质是等价的:

(i) x_0 属于 $\mathfrak{U}$ 的一切极大左幻;

(ii) 对于任意 $y\in\mathfrak{U}$, $e+yx_0$ 有左逆;

(iii) 对于任意 $y\in\mathfrak{U}$, $e+yx_0$ 有两侧逆;

(iv) 对于任意 $y\in\mathfrak{U}$, $e+x_0y$ 有两侧逆;

(v) 对于任意 $y\in\mathfrak{U}$, $e+x_0y$ 有右逆;

(vi) x_0 属于一切极大右幻.

证. 我们按这样的路线证明它们的等价性: (i)$\Longleftrightarrow$(ii), (ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi) 及类似 (vi)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii). 下面,我们依次证明:

(ii)$\Rightarrow$(i) 反之,如果对任意 $y\in\mathfrak{U}$, $e+yx_0$ 有左逆,但 i) 的

结论不成立，那么，必有某一极大左幻 I，使得 $x_0 \bar{\in} I$. 这样一来，当令

$$I' = \{a - yx_0 | a \in I, y \in \mathfrak{U}\}$$

时，必有 $I' \neq \mathfrak{U}$，否则必有元 $a_0 \in I$ 及 $y_0 \in \mathfrak{U}$，使得 $a_0 - y_0x_0 = e$，即 $a_0 = e + y_0x_0$，故由假设 $e + y_0x_0$ 有左逆，推得 a_0 有左逆，此显然与 I 为极大左幻矛盾. 但另一方面，容易验证 I' 亦是一左幻，故由 $I' \supset I$ 以及 I 是极大左幻的假设；可知应有 $I = I'$. 但这也是不可能的，因为元 $x_0 = \theta - (-e)x_0 \in I'$. 但上面已假设 $x_0 \bar{\in} I$，故矛盾. 证毕.

(i)⇒(ii) 设 x_0 属于一切极大左幻. 那么，对任意极大左幻 I 及任意的 $y \in \mathfrak{U}$，均有 $yx_0 \in I$，但由于 $e \bar{\in} I$，故从 I 是线性集必导出 $e + yx_0 \bar{\in} I$. 即元 $e + yx_0$ 不含于任何极大左幻中，而当利用前面定理 4 后面的推理 1 时，则知 $e + yx_0$ 有左逆.

(ii) ⇒ (iii) 设对于任意 $y \in \mathfrak{U}$，元 $e + yx_0$ 均有左逆，不妨设此逆形为 $e + z$，那么，则有

$$(e + z)(e + yx_0) = e,$$

也即 $e + yx_0$ 乃是 $e + z$ 的右逆，且

$$z = -yx_0 - zyx_0 = (-y - zy)x_0,$$

从而

$$e + z = e + (-y - zy)x_0,$$

而当利用(ii)的假设，则知 $e + z$ 亦有左逆. 综合上述讨论，即知 $e + z$ 是有逆的，且其逆亦等于其右逆 $e + yx_0$. 这也等价于 $e + yx_0$ 是有两侧逆 $e + z$ 的.

(iii) ⇒ (iv) 设对于任意给定的 $y \in \mathfrak{U}$，$e + yx_0$ 有两侧逆 $e + z$，即有

$$(e + z)(e + yx_0) = (e + yx_0)(e + z) = e,$$

也即有

$$e + z + yx_0 + yx_0z = e \Rightarrow z + yx_0 + yx_0z = \theta$$

和

$$e + z + yx_0 + zyx_0 = e \Rightarrow z + yx_0 + zyx_0 = \theta.$$

由上两式可推得

$$(e - x_0y - x_0zy)(e + x_0y)$$
$$= e - x_0(z + yx_0 + zyx_0)y = e$$

和

$$(e + x_0y)(e - x_0y - x_0zy)$$
$$= e - x_0(z + yx_0 + yx_0z)y = e.$$

从而推得 $e + x_0y$ 有两侧逆 $e - x_0y - x_0zy$.

(iv) ⇒ (v) 这是显然的.

(v) ⇒ (vi) 类似前面"(ii) ⇒ (i)"的证明可得.

最后当在上面证明中,将左幻改为右幻时,我们完全用上面类似的方法,就可以推得 (vi) ⇒ (v) ⇒ (iv) ⇒ (iii)⇒(ii). 而与上面结论综合起来,我们即证出上述六个条件是等价的. 证毕.

注 6. 从上面定理中的条件 (i) 与 (vi) 的等价性,我们可以看出:"(B)-代数 $\mathfrak{A}$ 的一切极大左幻的交与一切极大右幻的交是相同的".

定义 5. Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 的一切极大左(右)幻的交称为 $\mathfrak{A}$ 的**根基**. 当根基$=\{\theta\}$时, $\mathfrak{A}$ 称为**零根基的代数或半单纯代数**.

注 7. 由注 3 可知, 根基必含 θ 元; 再由定理 3 后的推理可知, 根基必为 $\mathfrak{A}$ 的一个闭两侧幻. 最后, 由定理 4 后的推理 1, 我们还可得知: 根基的元必是 $\mathfrak{A}$ 中既无左逆又无右逆的特异元.

例 1. (B)-代数 $C(\Omega)$ 是半单纯代数.

验. 由定义只要证明 $C(\Omega)$ 的根基$=\{\theta\}$即可. 因为由定义 3 后面的例 2 可知, $\forall t_0 \in \Omega$, $I_{(t_0)} = \{x \mid x \in C(\Omega),\ x(t_0) = 0\}$ 均是 $C(\Omega)$的极大幻,从而知它们的交必为 $\{\theta\}$. 验毕.

例 2. 设 $P^{(n)}$ 表示一切 n 次复系数多项式 $x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ 的全体. 加法,数乘如常定义,乘法定义为

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k t^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \right) t^k$$

(即去掉了高于 n 次的项),

范数定义为

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|; \qquad \forall x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \in P^{(n)}.$$

这时 $P^{(n)}$ 构成一个 (B)–代数. 可知其根基 $= \left\{x \mid x = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in P^{(n)},\ a_0 = 0\right\}$.

验. $P^{(n)}$ 构成 (B)–代数是容易验证的. 下面我们仅来找出其根基. 由于 $\forall x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in P^{(n)}$,只要 $a_0 \neq 0$,那么 x 在 $P^{(n)}$ 内必有逆$\left(\text{实因由递推公式 } b_k = -\frac{1}{a_0}(b_0 a_k + \cdots + b_{k-1} a_1),\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ b_0 = \frac{1}{a_0} \text{就可得出} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \text{ 的逆元 } \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \text{ 来}\right)$,故由注 6 可知

$$P^{(n)}\text{的根基} \subset \left\{x \mid x = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in P^{(n)},\ a_0 = 0\right\} = I^0;$$

并且,反过来,由前面的递推公式结果还知,$\forall x_0 \in I^0$, $\forall y \in P^{(n)}$, 元 $e + y x_0$ 均在 $P^{(n)}$ 中有逆, 故由前面的定理 6 可以导出 $x_0 \in P^{(n)}$ 的根基. 验毕.

例 3. $\mathfrak{C}(E)$ 是半单纯代数.

验. 反之,如果有一非零"元" T_0 为 $\mathfrak{C}(E)$ 的根基,那么,由定理 6 可知, $\forall T \in \mathfrak{C}(E)$, 均存在(有界逆线性算子) $(C + T_0 T)^{-1}$ (其中 C 表示么算子). 现取一元 $a \in E$, 使 $b = T_0(a) \neq \theta$, 又从 Hahn-Banach 定理,取 $f_0 \in E^*$, 使 $f_0(b) = 1$, 且令算子 U 为

$$U(x) = f_0(x) \cdot a, \quad \forall x \in E.$$

那么,由

$$\|U(x)\| = |f_0(x)| \|a\| \leqslant \|f_0\| \|a\| \|x\|,$$

易见 $U \in \mathfrak{C}(E)$, 且 $\forall x \in E$, 有

$$T_0 U(x) = f_0(x) b, \quad T_0 U(b) = f_0(b) b = b \neq \theta. \tag{2}$$

另一方面，由上面前一式并注意到关于U的取法，我们便可推得

$$
\begin{aligned}
UT_0U(x) &= f_0(x)\cdot U(b) = f_0(x)f_0(b)\cdot a \\
&= f_0(x)\cdot a, \quad \forall x\in E.
\end{aligned}
$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
(T_0U)^2(x) &= T_0[UT_0U(x)] = f_0(x)\cdot T_0(a) \\
&= f_0(x)b = T_0U(x), \quad \forall x\in E,
\end{aligned}
$$

也即有 $(T_0U)^2 = T_0U$.

最后，当我们注意到前面的假设取 $T = -U$ 时，则知有界逆线性算子 $(C + T_0T)^{-1} = (C - T_0U)^{-1}$ 存在，故当把关系式

$$
(C - T_0U)^2 = C - 2T_0U + (T_0U)^2 = I - T_0U
$$

两边各乘以 $(C - T_0U)^{-1}$ 时，可得到

$$
C - T_0U = C,
$$

即 $T_0U = \Theta$（零算子）. 此结果显然与式(2)的后一式 $T_0U(b) \neq 0$ 矛盾. 验毕.

习　题

1. 试证明本节注 1.
2. 试证明本节注 3.
3. 试证明本节注 5.
4. 设 Banach 代数 $\mathfrak{U}$ 正则元的集合为 $G(\mathfrak{U})$，试证明：(i) 如果 $x_n\in G(\mathfrak{U})$，$x\in\mathfrak{U}$，$\|x_n^{-1}\|\leqslant\beta$（常数），则

$$
x_n\to x\quad(n\to\infty)\Rightarrow x\in G(\mathfrak{U}).
$$

(ii) 如果 $x\in G(\mathfrak{U})$，$\|y\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$，则 $x + y\in G(\mathfrak{U})$.

5. 设 $A\in\mathfrak{C}(E)$（E 是 Banach 空间），且存在有界逆算子 A^{-1}. 试证明：对任意有界线性算子 $\Delta A\in\mathfrak{C}(E)$，只要 $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. 则算子 $B=A+\Delta A$ 亦有有界逆算子 B^{-1} 存在；并且有

$$
\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2\cdot\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|},
$$

$$
\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}.
$$

6. 试证明：与(B)-代数$C(\Omega)$类似，在§7.1的例子中，(B)-代数A, W, D_π中"在任一给定点取0值的所有元的全体"所成的集均是它们的极大幻。

7. 试证明：在无穷维的 Banach 空间E上的全连续算子集I，构成$\mathfrak{C}(E)$的一个两侧幻。

§7.4. 豫解元、谱和广义幂零元

(一)

我们先讨论豫解元。首先，我们给出关于谱集和豫解集等概念。

定义1. 复数λ称为属于 Banach 代数$\mathfrak{U}$中元a的谱集$\sigma(a)$，是指$a-\lambda e$是特异元；反之如果$a-\lambda e$是正则元，则称λ是属于a的豫解集$\rho(a)$；且此时其逆$(\lambda e-a)^{-1}$通常表示为$R(\lambda;a)$，称为a的豫解元。

引理. 设$\mathfrak{U}$是(B)-代数，则$\forall a\in\mathfrak{U}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$均存在，且有

$$r=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|a\|.$$

证. 令$r_0=\inf\limits_n\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. 下面证明此$r_0$即为上面所求之$r$. 事实上，由$r_0$的定义可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0$（自然数），使得

$$\|a^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}}<r_0+\varepsilon. \tag{1}$$

而又由范数对于乘法的不等式可知，对任意自然数$n=kn_0+m_0(n)$（其中$0\leqslant m_0(n)<n_0$），有

$$\begin{aligned}r_0\leqslant\|a^n\|^{\frac{1}{n}}&=\|a^{kn_0+m_0(n)}\|^{\frac{1}{kn_0+m_0(n)}}\\&\leqslant\|a^{n_0}\|^{\frac{k}{kn_0+m_0(n)}}\cdot\|a\|^{\frac{m_0(n)}{kn_0+m_0(n)}},\end{aligned}$$

故知

$$\begin{aligned}r_0&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\\&\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|a^{n_0}\|^{\frac{k}{kn_0+m_0(n)}}\varlimsup_{n\to\infty}\|a\|^{\frac{m_0(n)}{kn_0+m_0(n)}}\end{aligned}$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \|a^{n_0}\|^{\frac{k}{kn_0+m_0(n)}} \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \|a\|^{\frac{m_0(n)}{kn_0+m_0(n)}}$$

$$= \|a^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}}.$$

由 (1) 式，可推得

$$r_0 \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < r_0 + \varepsilon,$$

但由 ε 的任意性，上即推得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = r_0 \leqslant \|a\|.$$

证毕.

注 1. 上面的引理可以推广为更一般的结果（而证明方法无需改变），“设 $\{\alpha_n\}$ 是一正数列，满足 $\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m\alpha_n$. 那么，$\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n)^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n} (\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$”.

定理 1. 设 $a \in \mathfrak{A}$（这里和以后 $\mathfrak{A}$ 均表示某一 Banach 代数），那么，当 $|\lambda| > r = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ 时，则有 $\lambda \in \rho(a)$，且豫解元

$$R(\lambda; a) = \frac{e}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

证. 考察级数

$$\left\|\frac{e}{\lambda}\right\| + \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{a^n}{\lambda^{n+1}}\right\| = \frac{\|e\|}{|\lambda|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{|\lambda|^{n+1}},$$

由于

$$\left(\frac{\|a^n\|}{|\lambda|^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{r}{|\lambda|} < 1 \quad (n\to\infty),$$

从而由 Cauchy 判别法可知，上正项级数是收敛的. 再由空间的完备性，可知存在一元 $b \in \mathfrak{A}$，使得

$$b = \frac{e}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

把上式两端各乘以元 $\lambda e - a = \lambda\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)$，由 (B)-代数中积的连续性，可知对级数可以逐项相乘．从而易得

$$b(\lambda e - a) = (\lambda e - a)b = e.$$

此即 $(\lambda e - a)$ 的逆 $R(\lambda, a)$ 存在，且有 $R(\lambda, a) = b$．证毕．

注 2. 从完备空间中元列收敛的相应 Cauchy 准则，我们不难由上面定理中 $R(\lambda, a)$ 的"通项" $\frac{a^n}{\lambda^{n+1}}$ 范数的关系式 $\left(\frac{\|a^n\|}{|\lambda|^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{r}{|\lambda|}$ $(n \to \infty)$ 得出结论："当 $|\lambda| < r$ 时，该相应级数是不存在的"．

定理 2. 设 $a \in \mathfrak{A}$．那么其豫解集 $\rho(a)$ 是复平面中的开集；且对任意复数 $\lambda_0 \in \rho(a)$，只要数 λ 满足

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|[R(\lambda_0; a)]^n\|^{\frac{1}{n}}},$$

则必亦有 $\lambda \in \rho(a)$，且此时相应 λ 的豫解元

$$R(\lambda; a) = R(\lambda_0; a) - [R(\lambda_0; a)]^2(\lambda - \lambda_0) + [R(\lambda_0; a)]^3(\lambda - \lambda_0)^2 \cdots + \cdots.$$

证．易见，为证明本定理只要能证明最后的结论（即上述最后的级数乃是豫解元 $R(\lambda; a)$）就可以了．但这是完全可以按上定理证明步骤来完成的．证毕．

推理 1. 复抽象函数 $x(\lambda) = R(\lambda; a)$ 如果在点 λ_0 处存在，那么，它必在 λ_0 的邻域中是解析的．

证．事实上，直接从定理 2 的最后结论则可得到

$$R'_{\lambda_0}(\lambda; a) = -[R(\lambda_0; a)]^2,$$
$$R''_{\lambda_0}(\lambda; a) = 2![R(\lambda_0; a)]^3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$R^{(n)}_{\lambda_0}(\lambda; a) = (-1)^n n![R(\lambda_0; a)]^{n+1},$$
$$\cdots\cdots$$

从而知该定理最后一式乃是 $R(\lambda; a)$ 的 Taylor 展开式．这样，在

泛函的作用下，借助于数值复变函数中，函数可以 Taylor 展开与函数解析的关系，以及复抽象函数在复区域中强、弱可导的关系，则可验明本结论．证毕．

推理 2. 在上面定理 1 中，关系式

$$R(\lambda;a)=\frac{e}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\lambda^{n+1}},\quad \forall|\lambda|>r=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

的右边级数即为抽象函数 $x(\lambda)=R(\lambda;a)$ 的 Laurent 级数．

证．首先，由定理 1 及推理 1 可以推得：抽象函数 $x(\lambda)=R(\lambda;a)$ 在区域 $\left\{\lambda\,\middle|\,|\lambda|>r=\lim\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\right\}$ 内均是解析的．因而按 § 6.5 的定理 7，$x(\lambda)$ 在该区域内是可以 Laurent 展开的．最后，注意到该展开式的唯一性，即知上式中的级数即为 $x(\lambda)=R(\lambda;a)$ 在该区域的 Laurent 级数．证毕．

（二）

下面，我们讨论谱集，首先，我们从上面结果可以得到下面的定理：

定理 3. 对于 $\mathfrak{U}$ 中任一元 a，其谱集 $\sigma(a)$ 均是非空的有界闭集．

证．首先，由上定理 2 可知，$\sigma(a)$ 作为开集 $\rho(a)$ 的余集，故应是闭集．而由定理 1（及引理）可知

$$\lambda\in\sigma(a)\Rightarrow\lambda\notin\rho(a)\Rightarrow|\lambda|\leqslant r$$
$$=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|a\|<+\infty,$$

故知 $\sigma(a)\subset\bar{S}(0,\|a\|)$（复数域 $\boldsymbol{C}$ 中以 0 为中心，$\|a\|$ 为半径的闭圆）．也即 $\sigma(a)$ 是有界的集．最后，我们证明 $\sigma(a)\neq\phi$．反之，如果 $\sigma(a)=\phi$，则即 $\rho(a)=\boldsymbol{C}$，从而由定理 2 后的推理 1 可知，抽象函数 $x(\lambda)=R(\lambda;a)$ 在整个复平面 $\boldsymbol{C}$ 上均是解析的，故由 §6.5 的定理 4（Cauchy 定理）可知，在 $\boldsymbol{C}$ 中任意以原点为心的圆的圆周 Γ 上，均有 $\int_\Gamma R(\lambda;a)d\lambda=\theta$；另一方面，从定理 2 后的推理 2 可

知（由 Laurent 展开式），（上积分）$= (2\pi i)e$，从而推得 $e = \theta$. 而此显然是不可能的．证毕．

推理 1. 为了(复)$\mathfrak{A}$是体必须且只须$\mathfrak{A}$是 Banach 代数同构于复数域 $\boldsymbol{C}$.

证. 1）"$\Longleftarrow$" 设$\mathfrak{A}$与$\boldsymbol{C}$的 Banach 代数同构映象是 φ，那么，$\forall \theta \neq a \in \mathfrak{A}$，$\exists 0 \neq \lambda \in \boldsymbol{C}$（$\lambda$ 唯一），使 $a \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \lambda$. 又由于 λ^{-1} 存在，故唯一存在$\mathfrak{A}$中一元 $b \neq \theta$，使 $b \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \lambda^{-1}$，因而导出

$$ab \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \lambda \cdot \lambda^{-1} = 1, \quad ba \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \lambda^{-1}\lambda = 1.$$

但由映象 φ 有性质 $e \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} 1$，故从映象的一一对应的性质，即推得 $ab = ba = e$ 也即 b 乃是元 a 的逆．从而推得本推理的充分性．

2）"$\Longrightarrow$" 由上面定理 3 可知，$\forall a \in \mathfrak{A}$，有 $\sigma(a) \neq \phi$，因而，$\exists \lambda \in \boldsymbol{C}$，使 $a - \lambda e$ 在$\mathfrak{A}$中无逆．但又由于设$\mathfrak{A}$是体，故必须有 $a - \lambda e = \theta$，即 $a = \lambda e$. 从而可知$\mathfrak{A}$中的每个元均是 e 的复数倍，因而，从 §7.2 中定义 3 下面的例可知，$\mathfrak{A}$必与$\boldsymbol{C}$同构．证毕．

利用 §7.3 的定理 5 及上面的推理 1 的结果，我们可以直接导出下面的推论：

推理 2. 设 I 是(复)$\mathfrak{A}$中一闭两侧幻，那么，为了 I 既是极大左幻又是极大右幻，必须且只须商空间 $\mathfrak{A}/I$ 是 Banach 代数同构于复数域 $\boldsymbol{C}$ 的．

推理 3. 设任意元 $a \in \mathfrak{A}$，则有 $\max\limits_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = \lim\limits_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

证. 首先由定理 3 的结论及其前面关于 $\sigma(a)$ 的有界性的证明，可知(注意，在复数域中，有界闭集是紧集)，

$$\max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| \leqslant \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}},$$

其次，如果上面没有等式成立，即有

$$\max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| < \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}, \tag{2}$$

那么，由于在环形区域 D: $\max\limits_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| < \lambda$ 内的点

$$\lambda \bar{\in} \sigma(a), \quad 即 \quad \lambda \in \rho(a),$$

故由定理 2 后的推理 1 可知，抽象函数 $x(\lambda) = R(\lambda; a)$ 在 D 内是解析的，从而有 Laurent 展开式

$$R(\lambda; a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \lambda^n; \quad \forall \lambda \in D$$

$\left(其中，x_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(\lambda;\, a)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\right)$；这里，$\Gamma$ 不妨取为以 0 为圆心，r 为半径的圆周，其中，r 满足

$$\max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| < r,$$

因此推得

$$\begin{aligned}
\|x_{-(n+1)}\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda;\, a) \cdot \lambda^n d\lambda \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{\lambda \in \Gamma} \|R(\lambda;\, a)\| \cdot r^n \cdot 2\pi r \\
&= \max_{\lambda \in \Gamma} \|R(\lambda;\, a)\| \cdot r^{n+1}.
\end{aligned}$$

（这里，由于 $R(\lambda; a)$ 在环 R 内解析，故 $\max_{\lambda \in \Gamma} \|R(\lambda; a)\| < +\infty$）；但由于定理 2 后的推理 2，故由 Laurent 展开式的唯一性，可知应有 $x_{-(n+1)} = a^n$；即得出

$$\|a^n\| \leqslant \max_{\lambda \in \Gamma} \|R(\lambda;\, a)\| \cdot r^{n+1}.$$

也即推得

$$\lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r.$$

最后，令 $r \to \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$，我们就可导出

$$\lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

此显然与前式(2)矛盾．证毕．

定理 4. 设任意 $x \in \mathfrak{U}$，而元 $p(x)$ 是 x 的多项式 $\left(即形如 \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k 的元，其中，\alpha_k \in k,\ x^0 = e\right)$，那么，

$$\sigma(p(x)) = \{p(\lambda) \,|\, \lambda \in \sigma(x)\}$$

("x 多项式"的谱集即为"x 谱的多项式"所成的集).

证. 按通常证明两集合相等的方法，我们分别来验证下两结论:

1) $\{p(\lambda)|\lambda\in\sigma(x)\}\subset\sigma(p(x))$. 事实上,如 $\lambda\in\sigma(x)$，不妨设 $x-\lambda e$ 无左逆，故由 § 7.3 中定理 4 后的推理 1 可知,存在一个左幻 I,使 $x-\lambda e\in I$. 又因多项式 $p(x)-p(\lambda)e$ 是含有 $x-\lambda e$ 因子的,故由 I 左幻的定义推得 $p(x)-p(\lambda)e\in I$. 最后，再由上面引用过的推理,即知元 $p(x)-p(x)e$ 也是无逆的,也即得出

$$p(\lambda)\in\sigma(p(x)).$$

2) $\sigma(p(x))\subset\{p(\lambda)|\lambda\in\sigma(x)\}$. 如果设 $\Lambda\in\sigma(p(x))$，那么，与 1) 类似,可知,存在一左幻 I 使得 $p(x)-\Lambda e\in I$. 又由于多项式 $p(x)-\Lambda e$ 可以分解成有限个复系数的一次因子的乘积，并且元 $p(x)-\Lambda e$ 是无逆的，故知在这些一次因子中至少有一个也是无逆的，不妨设 $x-\lambda e$ 是 $p(x)-\Lambda e$ 的一个无逆的因子. 那么，由上面用过的推理可知必又存在幻 I'，使得 $x-\lambda e\in I'$. 由于 $\lambda\in\sigma(x)$,故由 1) 的证明中可知，$p(x)-p(x)e\in I'$.但另一方面，由于 $p(x)-\Lambda e$ 可以把 $x-\lambda e$ 作为其因式乘积中最右边的因子，因而由左幻的性质可知元 $p(x)-\Lambda e\in I'$. 当与上面元 $p(x)-p(x)e$ 相减时,可推得 $[\Lambda-p(\lambda)]e\in I'$，由于 $e\notin I'$，故必有

$$\Lambda-(p\lambda)=0,\quad 即\quad \Lambda=p(\lambda).$$

证毕.

定理 5. 对任意元 $a\in\mathfrak{U}$ 及零点之邻域 V,必存在正数 δ,使得对任意的元 $b\in\mathfrak{U}$，只要 $\|b-a\|<\delta$，就必有 $\sigma(b)\subset\sigma(a)+V$

证. 反之，如对某元 a_0 及某零点之邻域 V_0，存在数列 $\{\delta_n\}:\delta_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$，及元列 $\{b_n\}\subset\mathfrak{U}$，使有

$$\|b_n-a_0\|<\delta_n,\qquad \sigma(b_n)\not\subset\sigma(a_0)+V_0; \tag{1}$$

从而有 $\lambda_n\in\sigma(b_n)$，使 $\lambda_n\notin\sigma(a_0)+V_0$ $(n=1,2,\cdots)$. 故由上定理 3 知存在 $\{\lambda_{n_k}\}\subset\{\lambda_n\}$，使 $\lambda_{n_k}\to\lambda_0(k\to\infty)$. 并从 (1) 知 $\lambda_0\in\rho(a_0)$. 再由

$$\|(\lambda_{n_k}e-b_{n_k})-(\lambda_0e-a_0)\|\leqslant|\lambda_{n_k}-\lambda_0|\,\|e\|+\|b_{n_k}-a_0\|\to 0\ (k\to\infty),$$

故由 § 7.3 中定理 2 可知：$\exists k_0$，使 $k \geqslant k_0$ 时有 $\lambda_{n_k} \in \rho(b_{n_k})$. 矛盾. 证毕.

注 3. 上面定理 5 是非常有趣的，如果谱集 $\sigma(x)$ 视为 x 的函数（集值函数）时，上面定理即说：在空间 $\mathfrak{U}$ 中任一点 x，$\sigma(x)$ 均是"上半连续"的.

（三）

本节的最后一段，我们讨论广义幂零元. 首先，我们给出下面一个定义：

定义 2. Banach 代数中的元 a 称为**广义幂零元**，是指它满足

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

注 4. 广义幂零元一定是特异元. 事实上，如果 a 是广义幂零元，那么，由 $r = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ 及上面定理 3 的推理 3，即知 $\max\limits_{\in\sigma(a)} |\lambda| = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$，也即 $\sigma(a) = \{0\}$.

注 5. a 是广义幂零元也可用 $\sigma(a) = \{0\}$ 来定义. 因为同样可由上面所用的推理结论来说明上式与原定义等价.

注 6. 幂零元显然是广义幂零元，反之不成立.

反例. 设 $E = L^1[0, 1]$，$\mathfrak{U} = \mathfrak{E}(E)$，而 T 表示 Volterra型算子

$$\mathrm{T}(x) = \int_0^s H(s, t)x(t)dt, \quad \forall x \in L^1[0, 1],\ 0 \leqslant s \leqslant 1;$$

这里，$H(s, t)$ 是在三角形区域 $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$ 中的二元连续函数（参看图 7.1），那么，T 是 Banach 代数 $\mathfrak{U}$ 的广义幂零元，但未必是幂零元.

验. 下面，我们分别来验证：

1) T 是广义幂零元. 首先，容易验证 $\mathrm{T} \in \mathfrak{U}$，且当令

$$M = \max_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1} |H(s, t)|$$

时，$\forall x \in L^1[0, 1]$，$0 \leqslant s \leqslant 1$，可得

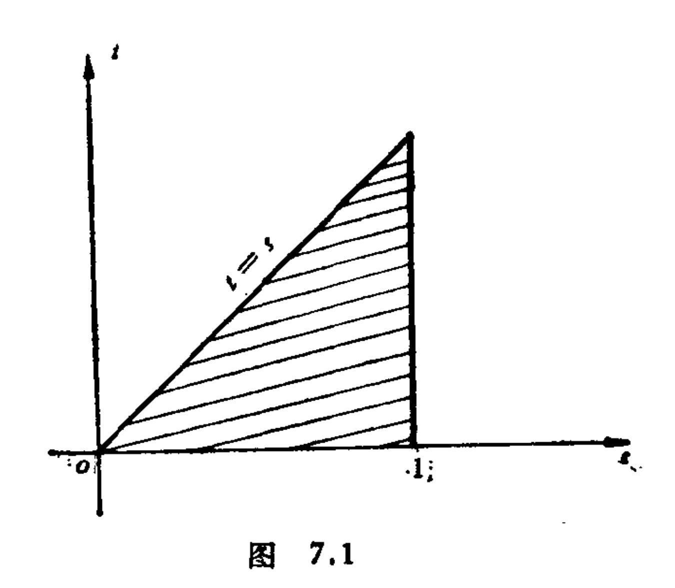


图 7.1

$$|[\mathrm{T}(x)](s)| = \left|\int_0^s H(s,\ t)x(t)\,dt\right| \leqslant M\|x\|,$$

$$|[\mathrm{T}^2(x)](s)| = \left|\int_0^s H(s,t)(\mathrm{T}\,x)(t)\,dt\right| \leqslant M^2\|x\| \cdot s,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

类似地，一般可以得到

$$|[\mathrm{T}^n(x)](s)| \leqslant \|x\| \frac{M^n s^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots).$$

因此，$\forall \lambda \in \boldsymbol{C}$, $\forall x \in L^1[0,\ 1]$，对在 $L^1[0,\ 1]$ 中的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot \mathrm{T}^n(x),$$

可知

$$\|\lambda^n \mathrm{T}^n(x)\| \leqslant |\lambda|^n \|\mathrm{T}^n(x)\| \leqslant |\lambda|^n \frac{M^n}{n!}\|x\|$$
$$(n = 1,\ 2,\ \cdots).$$

故由级数

$$\|x\| + \|x\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n M^n}{n!}$$

的收敛性可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|\lambda^n \mathrm{T}^n(x)\|$ 亦收敛(这里，我们定义 T^0 为幺算子 C). 于是，由空间 $E = L^1[0,\ 1]$ 的完备性可知，唯一存在

一元 $y \in E$，使得 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot T^n(x)$，因而有

$$\lambda \cdot T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T^n(x) = y - x,$$

此即方程

$$(e - \lambda T) y = x$$

对于一切的 x 均存在唯一解，也即有界线性算子 $(e - \lambda T)$ 在 $\mathfrak{U} = \mathfrak{C}(E)$ 中有逆存在. 根据 λ 的任意性，对于一切复数 $\lambda \neq 0$，在 $\mathfrak{U}$ 中均有逆元 $(\lambda e - T)^{-1}$，从而推出 $\sigma(T) = \{0\}$，也即 T 是广义幂零元.

2）T 未必是幂零元. 例如，当我们取 $H(s, t) = s - t$，并用 $H^{(n)}(s, t)$ 表示算子 T^n 的核时，由定义可知 $\forall x \in L^1[0, 1]$，$0 \leqslant s \leqslant 1$，可以得到

$$\begin{aligned}[T^2(x)](s) &= \int_0^s H^{(2)}(s, t) x(t) dt = [T(T(x))](s) \\ &= \int_0^s H(s, \tau)[T(x)](\tau) d\tau \\ &= \int_0^s H(s, \tau) d\tau \int_0^\tau H(\tau, t) x(t) dt,\end{aligned}$$

由交换积分次序，可得

$$(\text{上式}) = \int_0^s x(t) dt \int_t^s H(s, \tau) H(\tau, t) d\tau;$$

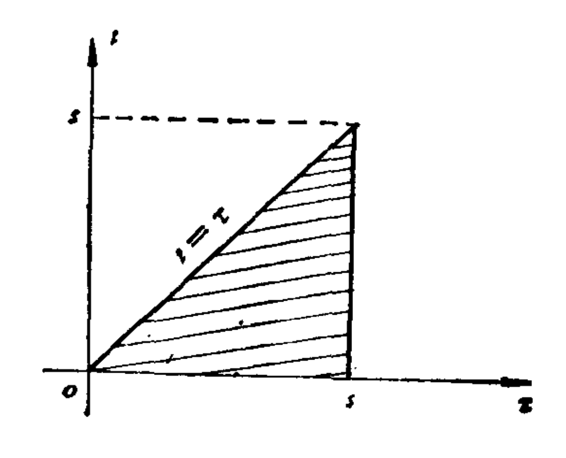


图 7.2

故

$$
\begin{aligned}
H^{(2)}(s, t) &= \int_t^s H(s, \tau)H(\tau, t)d\tau = \int_t^s (s-\tau)(\tau-t)d\tau \\
&= -\int_t^s [(\tau - t) + (t - s)](\tau - t)d\tau \\
&= \int_s^t [(\tau - t)^2 + (t - s)(\tau - t)]d\tau \\
&= \left[\frac{(\tau - t)^3}{3} + (t - s)\frac{(\tau - t)^2}{2}\right]_{(\tau)}\Bigg|_s^t \\
&= \frac{(s-t)^3}{2} - \frac{(s-t)^3}{3} = \frac{(s-t)^3}{3!}.
\end{aligned}
$$

类似地，一般可以验证，算子 T^n 的核 $H^{(n)}(s, t)$ 有

$$
H^{(n)}(s, t) = \frac{1}{(2n-1)!}(s-t)^{2n-1};
$$

从而有

$$
[T^n(x)](s) = \int_0^s \frac{1}{(2n-1)!}(s-t)^{2n-1}x(t)dt.
$$

故对于一切自然数 n，$T^n \neq \Theta$（零算子）. 验毕.

下面，我们给出关于广义幂零元的两个命题：

定理 6. 对于元 $a \in \mathfrak{A}$，下列三条件是等价的：

(i) a 是 $\mathfrak{A}$ 的广义幂零元；

(ii) $\sigma(a) = \{0\}$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^n a^n = \theta$ 对一切复数 μ 均成立.

证. 在本节注 4、注 5 中我们已经指出，这里的条件 (i) 与 (ii) 是等价的. 因此，下面我们只要证明 (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i) 就可以了. 下面我们就来分别证明：

(ii) ⇒ (iii) 由设 $\sigma(a) = \{0\}$，故对于一切复数 $\lambda \neq 0$，元 $(\lambda e - a)$ 均在 $\mathfrak{A}$ 中有逆，此即对于一切复数 μ，$(e - \mu a)^{-1}$ 均存在. 但由定理3的推理 3 可知

$$
\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \max_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| = 0.
$$

因此，由前面定理 1 可知对一切 $\mu \neq 0$，均有

$$(e-\mu a)^{-1}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu}e-a\right)^{-1}=\frac{1}{\mu}\left[e\mu+\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}\mu^{n+1}\right]$$

$$=e+\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{n}a^{n},$$

既然上面的级数对于一切 μ ($\mu=0$ 亦对) 均收敛，故知必有

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu^{n}a^{n}\|=0,$$

此即推得条件 (iii).

(iii) ⇒ (i)　由设对任意复数 μ，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^{n}a^{n}=\theta$，即

$$\lim_{n\to\infty}|\mu|^{n}\|a^{n}\|=0$$

成立．故当设任意复数 $\mu\neq 0$ 时，由上式知，对于正数 1，$\exists N$（自然数），只要 $n>N$，就有

$$|\mu|^{n}\|a^{n}\|<1,\quad \text{即 } \|a^{n}\|<\frac{1}{|\mu|^{n}},$$

因此，可导出

$$\lim_{n\to\infty}\|a^{n}\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{|\mu|}.$$

最后，由于 μ 的任意性，当令 $|\mu|\to\infty$，从上述可推得

$$\lim_{n\to\infty}\|a^{n}\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

此即推出条件 (i)．证毕.

推理.　Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 的根基中的元均是广义幂零元.

证．设 a 属于 $\mathfrak{A}$ 的根基，那么，由 §7.3 的定理 6 可知，对一切 $y\in\mathfrak{A}$，$e+ya$ 均在 $\mathfrak{A}$ 中有逆．特别当我们取 $y=-\mu e$ (μ 表示任意的复数)时，可知对于一切复数 μ，$(e-\mu a)^{-1}$ 均存在，且 $\sigma(a)=\{0\}$．因此，从上面定理 6 可知 a 是广义幂零元．证毕.

注 7.　上面的推理的逆命题是不成立的．即广义幂零元未必均是根基的元．例如，由上面注 6 的反例，我们已知，那里的 Volterra 型算子 T 乃是 $\mathfrak{C}(E)$ ($E=L^{1}[0,1]$) 中的广义幂零元，然

而由 § 7.3 定义 5 后的例 3，我们已知 $\mathfrak{C}(E)$ 是半单纯代数，从而 T 是不会含在 $\mathfrak{C}(E)$ 的根基中的.

习　　题

1. 试验证：在本节定理 2 后的推理 1 的证明中，$R(\lambda;a)$ 关于 λ 的各阶导数的关系式.

2. 试由本节定理 3 后的推理 3 "独立"得出的结果直接证明定理 3.

3. $\mathfrak{U}$ 如 § 7.3 所约定，试证明：如果 $\lambda \in \rho(x) \cap \rho(y)$，则有

$$R(\lambda;x) - R(\lambda;y) = R(\lambda;x)(x-y)R(\lambda;y).$$

4. 试证明广义幂零元的任何次正整次幂仍是广义幂零元.

5. 在 $L^1[0,1]$ 中定义乘法

$$(x*y)(t) = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad (x, y \in L^1[0,1]),$$

可证其仍构成 (B)-代数，现设 $L_e^1[0,1]$ 乃是由 $L^1[0,1]$ 添加了主单位元后所成的 (B)-代数，试证明：元列 $\left\{\frac{t^n}{n!}\bigg|_{n=0,1,2,\cdots}\right\} \subset L_e^1[0,1]$ 中的每一元均是 $L_e^1[0,1]$ 的广义幂零元.

6. 设 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的范数满足：对于一切正则元 x，均有

$$\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1},$$

试证明：此时 $\mathfrak{U}$ 必同构于复数域 $\boldsymbol{C}$.

§ 7.5. 在可易 Banach 代数中的极大幻

本节，我们论述"可易"的复 Banach 代数中关于极大幻的一些命题.

定义 1. 一个代数 $\mathfrak{U}$ 如果其内的乘法运算是满足交换律的，即有 $xy=yx$, $\forall x, y \in \mathfrak{U}$，那么，$\mathfrak{U}$ 称为可易代数. (或可交换代数，Abel 代数). 如果 $\mathfrak{U}$ 是 Banach 代数，则相应地称为可易 Banach 代数(简记为可易 (B)-代数).

例. 在 §7.1 中的复数域 $\boldsymbol{C}$，空间 $C(\Omega)$, A, Wiener 环 W, $\cdots$ 等都是可易 (B)-代数.

反例. 在 § 7.1 中的空间 $\mathfrak{C}(E)$(E 为 Banach 空间)不是可易

的 (B)-代数.

(一)

由于在可易 (B)-代数中乘法是交换的，因而在 Banach 代数一般理论中的许多结果都可以得到更深刻的了解和一些简化. 尤其是关于“极大幻”(这时无“左”，“右”之分)的作用在此时才更加显现出来. 我们由 § 7.4 定理 3 后的推理 2 可直接得到下面的定理:

定理 1. 设 I 是可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的闭幻. 那么，为了 I 是极大幻必须且只须商空间 $\mathfrak{U}/I$ 是 Banach 代数同构于复数域 $\boldsymbol{C}$.

定义 2. 可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 上的分配泛函 f 称为乘法的，是指它满足

$$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2),\quad \forall x_1,\ x_2\in\mathfrak{U}.$$

注 1. 有界的线性乘法泛函，实即为 $\mathfrak{U}$ 到复数域 $\boldsymbol{C}$ 内连续的代数同态映象.

下面我们讨论由极大幻 I 所确定的一类特殊的泛函. 当设 I 是 $\mathfrak{U}$ 中一个极大幻(当然是闭集)时，由上面定理 1 则知 $\mathfrak{U}/I$ 中的元可以与复数域 $\boldsymbol{C}$ 等同. 故当设 $\mathfrak{U}$ 到 $\mathfrak{U}/I$ 的典则同态映象为 φ: $x\overset{\varphi}{\longmapsto}[x]$, $\forall x\in\mathfrak{U}$. 由已知，这时 $[x]$ 可唯一地与一复数 $\lambda_{[x]}$ 对应，这样一来，对每一个 I 在 $\mathfrak{U}$ 上就可确定一个泛函 f_I，使得

$$x\overset{f_I}{\longmapsto}f_I(x)=\lambda_{[x]},\quad \forall x\in\mathfrak{U}.$$

而依同态关系可得 $\forall x_1,\ x_2\in\mathfrak{U}$, $\forall\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{C}$, 有

$$f_I(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha f_I(x_1)+\beta f_I(x_2).$$
$$f_I(x_1x_2)=f_I(x_1)\cdot f_I(x_2),$$
$$f_I(\theta)=0,\quad f_I(e)=1,$$

且由上面泛函的形成及 § 7.4 定理 3 后推理 1 中的必要性证明，我们可知

$$[x]-\lambda_{[x]}[e]=[\theta],\quad 即\ [x]=\lambda_{[x]}[e].$$

还有

$$|f_I(x)| = |\lambda_{[x]}| = \|\lambda_{[x]}[e]\| = \|[x]\| \leqslant \|x\|, \quad \forall x \in \mathfrak{U};$$

$$|f_I(e)| = 1, \quad \|e\| = 1, \text{故知 } \|f_I\| = 1.$$

因而上面对于 $\mathfrak{U}$ 中的每一极大幻 I，一意确定了 $\mathfrak{U}$ 上的一个范数为 1 的有界线性乘法泛函 f_I. 并且，如果设 $\mathfrak{U}$ 中有两个不同的极大幻 I_1，I_2 且它们按上面的方法所确定的泛函分别为 f_{I_1} 和 f_{I_2}，那么，由于 $I_1 \neq I_2$，故必存在 $\mathfrak{U}$ 中一元 x_1，使 $x_1 \in I_1$ 但 $x_1 \notin I_2$. 这时，由泛函 f_{I_1} 和 f_{I_2} 的定义，可知必有

$$f_{I_1}(x_1) = 0, \quad f_{I_2}(x_1) \neq 0, \quad \text{即 } f_{I_1} \neq f_{I_2}.$$

从而知，对于 $\mathfrak{U}$ 中的所有极大幻，其 1-1 对应地确定了 $\mathfrak{U}$ 上的有界线性乘法泛函. 再由其取法及 $f_I(x) = \lambda_{[x]}$，且已知 $\lambda_{[x]}$ 即为使

$$x - \lambda e \equiv 0 \pmod{I}$$

的数 λ，故有时把 $f_I(x)$ 记为 $x(I)$. 当记 $\mathfrak{U}$ 中一切极大幻的集为 $\mathscr{T}(\mathfrak{U})$ 时，则 $x(I)$ 乃是定义在 $\mathscr{T}(\mathfrak{U})$ 上的泛函数. 综上所述，可归结为下面的引理:

引理. 设 I 是可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的一个极大幻，则由

$$x \equiv x(I)e \pmod{I}$$

所定义在 $\mathscr{T}(\mathfrak{U})$（$\mathfrak{U}$ 的一切极大幻之集类）上的泛函满足关系

(i) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(I) = \alpha_1 x_1(I) + \alpha_2 x_2(I)$;

(ii) $(x_1 x_2)(I) = x_1(I) \cdot x_2(I)$, $\quad \forall x_1, x_2 \in \mathfrak{U}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{C}$;

(iii) $|x(I)| \leqslant \|x\|$, $e(I) = 1$;

(iv) 为了 $x(I) = 0$ 必须且只须有 $x \in I$ 成立，$\forall x \in \mathfrak{U}$.

有了上面的引理，我们就可导出下面的定理:

定理 2. 设 x 是可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的任一元. 那么，为了 x 在 $\mathfrak{U}$ 中有逆，必须且只须 $x(I) \neq 0$, $\forall I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U})$.

证. 由上面的引理我们知道，当 $x(I)(= f_I(x)) \neq 0$ 时，元 $x \notin I$. 而当 $x(I) \neq 0$ 对于任意 $I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U})$ 均成立时，此即元 x 不属于 $\mathfrak{U}$ 中的任何极大幻. 因此本定理乃是 § 7.3 定理 4 的推理 1 在可易 (B)-代数中的直接结果. 证毕.

定理 3. 设 x 是可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中的元，而 $\lambda \in \boldsymbol{C}$，那么，为了存在一个极大幻 I，使得 $x(I) = \lambda$ 必须且只须有 $\lambda \in \sigma(x)$ 成

立.

证. 由上面引理中的定义可知

$$x(I)=\lambda\Longleftrightarrow x-\lambda e\in I\Longleftrightarrow(x-\lambda e)(I)=0,$$

而由定理 2 的等价命题,可知存在一极大幻 I, 使 $(x-\lambda e)(I)=0\Longleftrightarrow x-\lambda e$ 在 $\mathfrak{U}$ 中无逆. 由于 $x-\lambda e$ 在 $\mathfrak{U}$ 中无逆 $\Longleftrightarrow\lambda\in\sigma(x)$, 故当把上两关系式结合起来,即得本定理结论. 证毕.

推理 1. 对可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中每个元 x,均有

$$\sup_{I\in\mathscr{T}(\mathfrak{U})}|x(I)|=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

证. 由定理 3 可知

$$\sigma(x)=\{x(I)\mid I\in\mathscr{T}(\mathfrak{U})\},$$

因而,由 § 7.4 定理 3 的推理 3 直接可以推得本推理结论. 证毕.

推理 2. 对于可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 来说,根基即为广义幂零元所组成的集.

证. 事实上, 由定义知, x 属于根基 $\Longleftrightarrow$ x 含在一切极大幻中 $\Longleftrightarrow x(I)=0$ $(I\in\mathscr{T}(\mathfrak{U}))$. 但由上面推理 1, 即知 x 属于根基 $\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}=0$. 证毕.

定理 4. 设 f 是可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 上的非零分配泛函. 那么, 为了 f 是乘法的必须且只须存在一个极大幻 I,使得 $f(x)=x(I)$, $\forall x\in\mathfrak{U}$ (且易知,这时必有 $I=\{x\mid f(x)=0\}$, $\|f\|=1$).

证. 1) "$\Longleftarrow$" 显然可由上面的引理得出,且由上面括号内的结论也同样可得到.

2) "$\Longrightarrow$" 设 $f(x)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上非零的乘法分配泛函,我们令

$$I=\{x\mid f(x)=0\}.$$

由于 $\forall x,y\in I$, $\forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$, $\forall z\in\mathfrak{U}$,有

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=0,$$

$$f(zx)=f(z)\cdot f(x)=0;$$

由 $f\neq 0$ (零泛函) 且

$$f(x)=f(ex)=f(e)f(x),\quad\forall x\in\mathfrak{U},$$

可知 $f(e)=1$，即 $e\overline{\in} I$. 从而知 I 乃是 $\mathfrak{U}$ 的一个幻. 下面我们来证明 I 是一个极大幻. 反之，如果有 $\mathfrak{U}$ 的另一极大幻 I'，使得 $I\subsetneqq I'$，则必有一元 $x_0\in I'\backslash I$. 这样一来，便有 $f(x_0)\neq 0$. 从而得到

$$f[x_0-f(x_0)e]=f(x_0)-f(x_0)=0,$$

即 $x_0-f(x_0)e\in I\subset I'$. 由此可导出

$$e=\frac{x_0}{f(x_0)}-\frac{x_0-f(x_0)e}{f(x_0)}\in I',$$

此显然与 I' 是幻的假设矛盾.

最后，由 I 是 $\mathfrak{U}$ 的极大幻及上面引理可知，存在 $\mathfrak{U}$ 上的有界线性乘法泛函 $x(I)(=f_I(x))$. 其满足

$$x\equiv x(I)e \quad (\mathrm{mod}\, I),$$

即 $x-x(I)e\in I$；因而，由上面 I 的做法可得

$$f[x-x(I)e]=0,$$

即 $f(x)=x(I)$ 对任何 $x\in\mathfrak{U}$ 成立. 证毕.

注 2. 定理 4 是非常有趣的，它告诉我们，在一个可易 (B)-代数上定义的泛函 f，只要它是线性可乘的，则它必定是有界的，并且 $\|f\|=1$.

注 3. 定理 4 也是非常有用的. 因为它揭示了在可易 (B)-代数上其线性乘法泛函与其极大幻之间的一一对应关系. 由此，我们可以用决定该代数上的线性可乘泛函的办法(分析方法)把极大幻(理想)(代数问题)找出来.

定理 5. 设 x 是可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}$ 中一个元，又设 $F(\lambda)$ 是定义在区域 G 中的复解析函数，这里 $G\supset\sigma(x)$，那么，必存在一元 $y\in\mathfrak{U}$，使得

$$y(I)=F(x(I)),\quad \forall I\in\mathscr{T}(\mathfrak{U}).$$

证. 由 § 7.4 定理 3 知 $\sigma(x)$ 乃是一有界闭集，因此在 G 中存在着一条环绕 $\sigma(x)$ 于其内的闭可度长曲线 Γ. 且由于 Γ 位于 $\rho(x)$ 中，故从 § 7.4 定理 2 可知，对于一切 $\lambda\in\Gamma$，抽象函数 $(\lambda e-x)^{-1}$ 均是 λ 的连续函数(强连续). 从而由 § 6.5 定理 3 知，强连续函

数 $F(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}$ 在 Γ 上可积，因此存在元 $y \in \mathfrak{U}$，使得

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

而由于每个泛函 $f_I(x) = x(I)$ 乃是连续的线性乘法泛函，故对上元作用可得

$$f_I(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\lambda)[\lambda f_I(e) - f_I(x)]^{-1} d\lambda,$$

注意到 $f_I(e) = 1$，由上即有

$$y(I) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\lambda)}{\lambda - x(I)} d\lambda, \quad \forall I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}).$$

另一方面，由上面定理 3 可知，对每个 $I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U})$，均有 $x(I) \in \sigma(x)$，从而 $x(I)$ 均含在曲线 Γ 之内，故由假设 $F(\lambda)$ 是 G 内的解析函数及通常数值函数的 Caùchy 公式便可得到

$$F(x(I)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\lambda)}{\lambda - x(I)} d\lambda, \quad \forall I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}).$$

最后，将上面两关系式结合起来，便可推出

$$y(I) = F(x(I)), \quad \forall I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}).$$

证毕.

(二)

下面，我们再对几个常用的可易 (B)-代数把一切极大幻找出来.

定理 6. 为了 I_0 是 $C(\Omega)$ 中的极大幻必须且只须 $I_0 = \{x \mid x \in C(\Omega),\ x(t_0) = 0\}$，其中，$t_0$ 是 Ω 上的某一给定点.

证. "$\Longleftarrow$" 在 § 7.3 定义 3 后的例 2 中已经给出.

"$\Longrightarrow$" 设 I_0 是 $C(\Omega)$ 的极大幻. 反之，$\forall t \in \Omega$，$\exists x_t \in I_0$，使 $x_t(t) \neq 0$. 那么由于 $x_t(s)$ 是 s 的连续函数，故知必存在 t 的一个邻域 $U(t)$，使得 $\forall s \in U(t)$，一致地有

$$|x_t(s)| > \left|\frac{x_t(t)}{2}\right| > 0. \tag{1}$$

由于上述 $\{U(t)|t\in\Omega\}$ 乃是 Ω 的一组开复盖，故由 Ω 是紧的"(T_2)型"空间及 Borel-Lebesgue 定理可知，在 Ω 上存在有穷多个点 t_1，$t_2,\cdots,t_N$，使得 $\Omega=\bigcup_{k=1}^{N}U(t_k)$. 今做函数

$$x_0(t)=\sum_{k=1}^{N}x_{t_k}(t)\cdot\overline{x_{t_k}(t)}=\sum_{k=1}^{N}|x_{t_k}(t)|^2,\quad \forall t\in\Omega. \qquad (2)$$

由于 $x_{t_k}\in I_0$，$\bar{x}_{t_k}\in C(\Omega)(k=1,2,\cdots,N)$；故由 I_0 是幻，可知 $x_0\in I_0$. 另一方面，由上面 (1)，(2) 式还知

$$x_0(t)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant N}\left|\frac{x_{tk}(t_k)}{2}\right|^2>0;\quad \forall t\in\Omega.$$

故知 x_0 在 $C(\Omega)$ 中有逆

$$x_0^{-1}(t)=\frac{1}{x_0(t)},\quad \forall t\in\Omega$$

存在，而由前面定理 2 及其引理可知，此显然与 x_0 是极大幻 I_0 的元矛盾. 证毕.

下面我们用另一种方法求出 A 的极大幻:

定理 7. 为了 I_0 是 A 的极大幻必须且只须

$$I_0=\{x|x\in A,x(\lambda_0)=0\},$$

其中 λ_0 是某一满足 $|\lambda_0|\leqslant 1$ 的复数.

证. 定理的充分性命题是明显的，它完全与 §7.3 定义 3 的例 2 类似. 下面我们仅证明它的必要性. 设 I_0 是 A 的某一极大幻，f_I 是如同前面导出引理时所确定的有界线性乘法泛函. 由于元 $\lambda\in A$ (复平面单位圆上恒取 λ 的函数)，故可令

$$f_{I_0}(\lambda)=\lambda_0$$

而且由于 $|f_{I_0}(\lambda)|\leqslant\|\lambda\|=\sup_{|\lambda|\leqslant 1}|\lambda|=1$，故知 $|\lambda_0|\leqslant 1$；又由于 f_{I_0} 的乘法性，故有

$$f_{I_0}(\lambda^n)=[f_{I_0}(\lambda)]^n=\lambda_0^n.$$

另外由 f_{I_0} 的分配性，知对一切复多项式 $p_n(\lambda)$，均亦有

$$f_{I_0}(p_n(\lambda))=p_n(f_{I_0}(\lambda))=p_n(\lambda_0).$$

最后注意到多项式在 A 中是稠的，从而由 f_{I_0} 的连续性可得 $\forall x\in A$，

均有

$$f_{I_0}(x(\lambda)) = x(f_{I_0}(\lambda)) = x(\lambda_0),$$

也即

$$x(I_0) = x(\lambda_0), \quad \forall x \in A.$$

而由泛函 f_{I_0} 的定义及定理 4 可推得

$$x \in I_0 \Longleftrightarrow x(I_0) = 0 \Longleftrightarrow x(\lambda_0) = 0,$$

也即

$$I_0 = \{x \mid x \in A, x(\lambda_0) = 0\},$$

其中 λ_0 是某一满足 $|\lambda_0| \leqslant 1$ 的复数．证毕．

定理 8. 为了 I_0 是W的极大幻必须且只须

$$I_0 = \{x \mid x \in W, x(t_0) = 0\},$$

其中 $t_0 \in [-\pi, \pi]$ 是某一实数．

证. 1) "$\Longleftarrow$" 设已知有某一实数 $t_0 \in [-\pi, \pi]$ 和集

$$I_0 = \{x \mid x \in W, x(t_0) = 0\}.$$

现做 W 上一泛函 f,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int_0}, \quad \forall x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int} \in W.$$

显然，f 是W上的非零的有界线性泛函，且范数 $\leqslant 1$，又由

$$\sum_n \xi_n e^{int_0} \cdot \sum_n \eta_n e^{int_0} = \sum_n \left(\sum_k \xi_{n-k}\eta_k \right) e^{int_0},$$

还知 f 是乘法泛函．因此由上面定理 4 可知，必存在一极大幻 I，使得

$$f(x) = x(I), \quad \forall x \in W.$$

但这时，由

$$x \in I \Longleftrightarrow f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int_0} = 0 \Longleftrightarrow x(t_0) = 0,$$

故可得出 I_0 是 W 的极大幻．

2) "$\Longrightarrow$" 设 I_0 是 W 的某一极大幻，设

$$f_{I_0}(x) = I_0(x)(= x(I_0))$$

乃是由极大幻 I_0 所确定的W上范数为 1 的有界线性乘法泛函．令

$$f_{I_0}(e^{it}) = a_0.$$

由于 f_{I_0} 范数为 1，故有 $|f_{I_0}(e^{it})| \leqslant \|e^{it}\| = 1$，即知 $|a_0| \leqslant 1$. 但由 f_{I_0} 的乘法性，又有 $f_{I_0}(e^{-it}) = f_{I_0}\left(\frac{1}{e^{it}}\right) = \frac{1}{a_0}$，便推得

$$\left|\frac{1}{a_0}\right| \leqslant \|f_{I_0}\|\|e^{-it}\| = 1,$$

即 $|a_0| \geqslant 1$. 与上面的结果结合起来，即得到 $|a_0| = 1$，因而存在一数 $t_0 \in [-\pi, \pi]$，使得 $a_0 = e^{it_0}$. 当再利用到 f_{I_0} 的分配性、乘法性时，对任意自然数 m，有

$$f_{I_0}\left(\sum_{n=-m}^{m} \xi_n e^{int}\right) = \sum_{n=-m}^{m} \xi_n f_{I_0}(e^{int})$$

$$= \sum_{n=-m}^{m} \xi_n [f_{I_0}(e^{it})]^n = \sum_{n=-m}^{m} \xi_n e^{int_0}.$$

最后，利用 f_{I_0} 的连续性，对任意 $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int}$，可推得

$$f_{I_0}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n [f_{I_0}(e^{it})]^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int_0},$$

即

$$x(I_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int_0}, \quad \forall x \in W.$$

而当注意到泛函 $f_{I_0}(x) = x(I_0)$ 的性质时，则有下面等价的关系

$$x \in I_0 \Longleftrightarrow x(I_0) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int_0} = 0 \Longleftrightarrow x(t_0) = 0,$$

也即导出 $I_0 = \{x \mid x \in W, x(t_0) = 0\}$，其中 t_0 是 $[-\pi, \pi]$ 上的某一实数. 证毕.

利用上面定理 8 我们就可直接导出关于绝对收敛的 Fourier 级数的两个推理:

推理 1 (Wiener 定理). 为了对于级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int}$ (其中，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n| < +\infty$)，可以找到另一个级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n e^{int}$ 使

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta_n| < +\infty,$$

且

$$\sum_n \eta_n e^{int} \cdot \sum_n \xi_n e^{int} = 1, \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

必须且只须函数 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 中均不为零.

注 4. 上面的推理 1 即说如果定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $x(t)$ 具有绝对收敛的 Fourier 级数，并且在区间上均有 $x(t) \neq 0$，那么，$\frac{1}{x(t)}$ 也必具有绝对收敛的 Fourier 级数.

推理 2. 设函数 $x(\lambda)$ 的 Fourier 级数绝对收敛，且 $x(t)$ 的值位于复平面中圆 $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ 中，又设 $f(\lambda)$ 乃是在这个圆内正则的复变函数，那么，函数 $f(x(t))$ 的 Fourier 级数也绝对收敛.

(三)

注 5. 函数空间 $C(\Omega)$，A 或者 W（类似可知 D_n，$V^{(p)}$ 亦是）所组成的可易 (B)-代数，其所有的极大幻的全体 $\mathscr{T}(\mathfrak{U})$ 与函数空间 $\mathfrak{U}$ 中元素的定义域一一对应:

$$t \leftrightarrow I_t, \quad \forall t \in \mathfrak{U} \text{ 元的定义域}.$$

从而推知:

1°. 对于上述函数空间所组成的可易 (B)-代数恒有

$$x(t) = I_t(x), \quad \forall x \in \mathfrak{U}(I_t \in \mathscr{T}(\mathfrak{U})).$$

2°. 上述的函数空间均是“半单纯”可易 (B)-代数(零根基的可易 (B)-代数).

习　　题

1. 试证明：在可易 (B)-代数中，广义幂零元的线性组合及其极限元亦是广义幂零元.

2. 试证明在 §7.4 习题 5 的 (B)-代数 $L^1[0,1]$ 中的元均为 (B)-代数 $L^1_*[0,1]$ 的广义幂零元（这种代数称为“根环”）.

3．如果 $L^1[0, 1]$ 是如上定义乘法的 (B)-代数，试证明方程

$$x(t) = a(t) + a\int_0^t a(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

其中，复数 $\lambda \neq 0$，函数 $a(t) \in L^1[0, 1]$，在 $L^1[0, 1]$ 均有唯一解．

4．直接由本节定理 4 证明定理 6．

5．试证明本节定理 8 后面的推理 1 和推理 2．

6．试证明，为了泛函 $f_0 \in (C(\Omega))^*$，是由 $C(\Omega)$ 的某一极大幻 I_0 决定的：$f_0 = f_{I_0}$，必须且只须存在一点 $t_0 \in \Omega$，使得

$$f_0(x) = x(t_0), \quad \forall x \in C(\Omega).$$

7．找出可易 (B)-代数 D_n 的所有极大幻．

8．找出可易 (B)-代数 $V^{(p)}$ 的所有极大幻．

§7.6. 半单纯可易 (B)-代数中代数结构与拓扑结构的关系

（一）

本节，我们要对半单纯的可易 (B)-代数得到一个非常有趣的命题，即从它们的“代数同构”关系（没有牵涉到“范”的性质，且也没牵涉到其“拓扑”的性质）可以导得它们是“拓扑同胚”的．

首先，我们先给出一个引理：

引理 1. 如果 $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ 均是可易代数，而 $\mathfrak{U}_1$ 又代数同构于 $\mathfrak{U}_2$ 内的某一子集 $\mathfrak{U}_2^0$. 那么，$\mathfrak{U}_2^0$ 亦是代数，且对于任意的 $I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2)$，均有 $I \cap \mathfrak{U}_2^0 \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2^0)$. 此外，如果 $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ 均是可易 (B)-代数时，则必有

$$I(x^0) = (I \cap \mathfrak{U}_2^0)(x^0), \quad \forall x^0 \in \mathfrak{U}_2^0.$$

证．下面我们分别证明定理的结论：

1) $\mathfrak{U}_2^0$ 亦是代数．（留作习题请读者自己证明．）

2) 对任意 $I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2)$，有 $I \cap \mathfrak{U}_2^0 \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2^0)$. 事实上，这是容易验证的，因为 $\mathfrak{U}_2^0$ 中的集 $I \cap \mathfrak{U}_2^0$ 满足下面极大幻的定义条件

i. $\forall x, y \in I \cap \mathfrak{U}_2^0$, $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$, $\forall z \in \mathfrak{U}_2^0$，由于 $\mathfrak{U}_2^0$ 是代数，故有 $\alpha x + \beta y, xz \in \mathfrak{U}_2^0$；又由于 I 是幻，故还有 $\alpha x + \beta y, xz \in I$，从而推出

$$\alpha x + \beta y \in I \cap \mathfrak{U}_2^0, \quad xz \in I \cap \mathfrak{U}_2^0.$$

ii. 由于 $e \bar{\in} I$，故 $e \bar{\in} I \cap \mathfrak{U}_2^0$，从而即 $I \cap \mathfrak{U}_2^0 \neq \mathfrak{U}_2^0$.

iii. 反之，如 $I \cap \mathfrak{U}_2^0 \bar{\in} \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2^0)$，则有 $\mathfrak{U}_2^0$ 一极大幻 I^0，使 $I \cap \mathfrak{U}_2^0 \subsetneqq I^0$. 今取元 $x^0 \in I^0 \backslash I$，由 $I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2)$，从 § 7.5 引理知：$x^0\text{-}(I) \neq 0$，$x^0(I)e - x^0 \in I$，故由设可知 $x^0(I)e - x^0 \in I \cap \mathfrak{U}_2^0 \subset I^0$，从而导出 $e = \dfrac{x^0(I)e - x^0}{x^0(I)} + \dfrac{x^0}{x^0(I)} \in I^0$. 而此显然与 I^0，是(极大)幻的假设矛盾.

3) 对任意 $I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2)$，恒有 $I(x^0) = (I \cap \mathfrak{U}_2^0)(x^0)$，$\forall x^0 \in \mathfrak{U}_2^0$. 这也是明显的，由于按 § 7.5 中上述泛函的定义：

$$I(x) = f_I(x), \quad \forall x \in \mathfrak{U}_2;$$

$$(I \cap \mathfrak{U}_2^0)(x^0) = f_{I \supset \mathfrak{U}_2^0}(x^0), \quad \forall x^0 \in \mathfrak{U}_2^0.$$

由此可知，$\forall x^0 \in \mathfrak{U}_2^0 \subset \mathfrak{U}_2$，分别有

$$x^0 - f_I(x^0)e \in I, \quad x^0 - f_{I \cap \mathfrak{U}_2^0}(x^0)e \in I \cap \mathfrak{U}_2^0 \subset I.$$

因而由 I 是幻，把上两元相减，有

$$[f_I(x^0) - f_{I \cap \mathfrak{U}_2^0}(x^0)]e \in I,$$

从而有

$$f_I(x^0) - f_{I \cap \mathfrak{U}_2^0}(x^0) = 0,$$

也即导出

$$f_I(x^0) = f_{I \cap \mathfrak{U}_2^0}(x^0), \quad \forall x^0 \in \mathfrak{U}_2^0.$$

证毕.

定理 1. 假设 $\mathfrak{U}_2$ 是一个半单纯可易代数，而 $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$ 为其内一子代数；又设 $\mathfrak{U}_2$ 对于范 $\|\cdot\|_2$，$\mathfrak{U}_1$ 对于范 $\|\cdot\|_1$ 分别均构成可易 (B)-代数，那么，对于任意 $\{x_n\} \subset \mathfrak{U}_1$，只要 $\{x_n\}$ 按 $\mathfrak{U}_1$ 中的范数收敛，则其必也按 $\mathfrak{U}_2$ 中的范数收敛.

证. 在 $\mathfrak{U}_1$ 中重新引入范数

$$\|x\| = \max(\|x\|_1, \|x\|_2), \quad \forall x \in \mathfrak{U}_1.$$

容易验证 $\|x\|$ 确是 $\mathfrak{U}_1$ 上的范数，下面证明 $\mathfrak{U}_1$ 对于上面范数 $\|x\|$ 亦是完备的. 事实上，如果设元列 $\{x_n\} \subset \mathfrak{U}_1$，满足

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

那么，由定义有

$$\|x_n - x_m\|_1 \to 0, \quad \|x_n - x_m\|_2 \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

从而由可易 (B)-代数 $\mathfrak{U}_1$，$\mathfrak{U}_2$ 的完备性可知，必存在元 $x' \in \mathfrak{U}_1$，$x'' \in \mathfrak{U}_2$，使得

$$\|x_n - x'\|_1 \to 0, \quad \|x_n - x''\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

但这时，对于任意 $\mathfrak{U}_2$ 中的极大幻 $I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2)$，由 § 7.5 中所定义的泛函 $f_I(x) = I(x)(\forall x \in \mathfrak{U}_2)$，必有

$$|f_I(x_n) - f_I(x'')| = |f_I(x_n - x'')| \leqslant \|x_n - x''\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

另一方面，由上面引理知，此时必有 $I \cap \mathfrak{U}_1 \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_1)$，故类似亦有

$$|f_{I\cap \mathfrak{U}_1}(x_n) - f_{I\cap \mathfrak{U}_1}(x^1)| = |f_{I\cap \mathfrak{U}_1}(x_n - x')| \leqslant \|x_n - x'\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

但由上面 $\{x_n\} \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$ 及引理还可得到

$$f_I(x_n) = f_{I\cap \mathfrak{U}_1}(x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是，注意到上面两关系式，由极限的唯一性可推得

$$f_I(x'') = f_{I\cap \mathfrak{U}_1}(x').$$

而当把 $x' \in \mathfrak{U}_1$ 视为 $\mathfrak{U}_2$ 的元时，由于 $f_{I\cap \mathfrak{U}_1}(x') = f_I(x')$，因此，以上等价于 $\forall I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2)$，均有 $f_I(x'') = f_I(x')$，即 $f_I(x'' - x') = 0$，$\forall I \in \mathscr{T}(\mathfrak{U}_2)$. 最后注意到上式表示 $\mathfrak{U}_2$ 中的元 $x'' - x'$ 是属于 $\mathfrak{U}_2$ 的所有极大幻，即属于 $\mathfrak{U}_2$ 的根基. 然而由假设 $\mathfrak{U}_2$ 的根基 $= \{\theta\}$，推得 $x'' = x' \in \mathfrak{U}_1$，从而导出

$$\|x_n - x\| = \max(\|x_n - x\|_1, \|x_n - x\|_2) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

即 $\mathfrak{U}_1$ 按范 $\|x\|$ 亦是完备的.

由上面的结论及假设可知，$\mathfrak{U}_1$ 按范数 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|$ 均构成 Banach 空间，且这两个范数满足条件

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|, \quad \forall x \in \mathfrak{U}_1.$$

从而由 § 5.2 推理 4 知，必亦存在一正常数 β，使得有

$$\|x\| \leqslant \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathfrak{U}_1.$$

而由 $\|x\|$ 的定义当然有

$$\|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathfrak{U}_1.$$

此即可推得本定理结论. 证毕.

注 1. 如果上述 $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_2$ 中 $\mathfrak{A}_1$ 按范 $\|\cdot\|_2$ 亦成可易 (B)-代数，那么，在 $\mathfrak{A}_1$ 中范 $\|\cdot\|_1$ 与范 $\|\cdot\|_2$ 是拓扑等价的.

注 2. 可证明在上面定理 1 中，$\mathfrak{A}_1$ 按新范数"$\|\cdot\|$"亦构成一个满足乘法不等式的可易 (B)-代数.

由上面的定理，我们可以得到下面几个推论:

推理 1. 如果在上面定理 1 中，仅在"代数同构"的意义下有 $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_2$，那么定理亦真.

推理 2. 任意两个半单纯的可易 (B)-代数均可由它们代数同构导出它们是拓扑同胚的.

推理 3. 对于任意的半单纯可易 (B)-代数，凡使其仍保持为可易 (B)-代数的任意"改范"变换均是连续变换.

(二)

在本节最后，作为上面定理 1 的应用，我们再给出一个关于函数代数"不可赋范"的有趣的定理，为此，我们先引出下面的引理.

引理 2. 设 $\mathfrak{A}$ 是由 $[0.1]$ 上的"某些"无穷次可微的函数按通常的运算及某一范数所组成的可易 (B)-代数，那么，在 $\mathfrak{A}$ 上定义的任意阶微分算子 A_n，

$$\mathrm{A}_n(x)=x^{(n)}(t),\quad \forall x\in\mathfrak{A};$$

均有 $\mathrm{A}_n\in\mathfrak{E}(\mathfrak{A})\ (n=1,2,\cdots)$.

证. 首先，对于任意的自然数 n，由 §7.1 节中所设的 Banach 代数 D_n 的定义我们可知，均有 $\mathfrak{A}\subset D_n$.

其次，在 § 7.5 节的(三)中已经指出，D_n 均是半单纯可易的 Banach 代数 $(\forall n=1,2,\cdots)$，故利用本节定理 1 中的证明结果，我们可知，对任意自然数 n，均存在正数 β_n，使得 $\mathfrak{A}$ 与 D_n 间的范数有下面的关系式

$$\|x\|_{D_n}\leqslant\beta_n\|x\|,\quad \forall x\in\mathfrak{A}.$$

此外，当我们注意到 §7.1 节中 D_n 的范数定义时，从上式我们则可导出: $\mathfrak{A}$ 中元列的按范 $\|\cdot\|$ 收敛必定蕴涵着该元列的各 k 阶 $(0\leqslant k\leqslant n)$ 导数的一致收敛. 于是，我们用类似于前面§ 5.1 节

方法，不难验证$\mathfrak{U}$中的任意 n 阶微分算子 A_n 均为闭线性算子.

最后，直接由闭图象定理可导出，对任意 n，A_n 均为有界线性算子．也即有 $A_n \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U})(n = 1,2,\cdots)$．证毕．

利用上面引理 2，我们就可得到下面关于一个代数“不可赋范”成为 (B)-代数的命题:

定理 2. 设 D_∞ 是 $[0,1]$ 上“所有”无穷次可微的函数按通常运算所组成的代数，那么 D_∞ 不能赋以某个范数使其成为 Banach 代数.

证. 反之，如果可以赋予某个范数使得 D_∞ 成为 Banach 代数，那么，由函数通常的乘法运算可知 D_∞ 构成了一个可易 (B)-代数．从而由上面引理 2 可知，任意 n 阶微分算子 A_n，均有 $A_n \in \mathfrak{C}(D_\infty)$． 并且，由前面定理 1 及引理 2 我们还知， 存在正数列 $\{\beta_n\}$，使得

$$\|A_n(x)\|_{D_n} \leqslant \beta_n \|A_n(x)\| \quad (n = 1,2,\cdots).$$

从而有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(n)}(t)| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |A_n^{(0)}(x)| \leqslant \|A_n(x)\|_{D_n} \leqslant \beta_n \|A_n\| \|x\| \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{1}$$

现作一自然数子列 $\{k_n\}$，使其满足

$$k_1 = 1,$$
$$k_{n+1} - k_n > n\beta_n \|A_n\| \ (n = 1,2,\cdots);$$

并在 $[0,1]$ 上作一函数 $y_0(t)$，使

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i2\pi kt} \quad \forall t \in [0,1],$$

其中，$a_k = \dfrac{1}{(2\pi k)^n}$，当 $k_n \leqslant k < k_{n+1}$ 时 $(n = 1, 2, \cdots)$． 容易验证，对 $y_0(t)$ 的逐项任意阶导数后所成的级数在 $[0, 1]$ 上乃是绝对一致收敛的$\left(\text{可以由与 Dirichlet 级数} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{比较得知}\right)$，故知 $y_0(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是无穷次可微的函数，从而即知 $y_0 \in D_\infty$，故其仍满足 (1) 式，特别有

$$|y_0^{(n)}(0)| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |y_0^{(n)}(t)| \leqslant \beta_n \|A_n\| \|y_0\| \quad (n = 1, 2, \cdots). \qquad (2)$$

但另一方面由直接计算,注意到 a_k 和 k_n 的假设可推得

$$|y_0^{(n)}(0)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k(2\pi k i)^n\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k(2\pi k)^n\right|$$

$$\geqslant \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} a_k(2\pi k)^n = \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} \frac{1}{(2\pi k)^n}(2\pi k)^n$$

$$= k_{n+1} - k_n > n\beta_n \|A_n\| \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

此式显然与上面(2)式矛盾. 证毕.

习　　题

1. 试证明与一个"代数同构"的集仍构成代数.
2. 试证明与一个 Banach "代数同构"的集仍是 Banach 代数.
3. 试证明本节注 1,注 2.
4. 试证明本节定理 1 后面的三个推理.

附录 关于拓扑线性空间的一些基本性质

为了寻求一个线性空间构成“赋准范”线性空间及“赋范”线性空间的等价条件，这里，我们介绍关于拓扑线性空间的一些基本性质.

定义 1. 我们称一个线性空间 E 为拓扑线性空间，是指 E 中存在一组子集 $\mathfrak{U}=\{U\}$，称为 θ 的邻域族，使其满足

(i) $\theta\in U$, $\forall U\in\mathfrak{U}$;

(ii) $\forall x_1\neq\theta$, $x_1\in E$, $\exists U_1\in\mathfrak{U}$，使得 $x_1\notin U_1$;

(iii) $\forall U_1$, $U_2\in\mathfrak{U}$, $\exists U_3\in\mathfrak{U}$，使得 $U_3\subset U_1\cap U_2$;

(iv) $\forall U_1\in\mathfrak{U}$, $\exists U_2\in\mathfrak{U}$，使得 $U_2+U_2\subset U_1$;

(v) $\forall U_1\in\mathfrak{U}$, $\exists U_3\in\mathfrak{U}$，使得 $-U_3\subset U_1$. 此外，$\forall x\neq\theta$, $x\in E$，我们称 $\mathfrak{U}_x=\{x+U\,|\,U\in\mathfrak{U}\}$ 为点 x 的邻域族.

注 1. 这里我们必须指出，从上面定义 1 中的 (iv) 我们可以得到一个更一般的结果：对任意邻域 $U\subset\mathfrak{U}$ 及自然数 n，均可找到一个邻域 $V\in\mathfrak{U}$，使得

$$\underbrace{V+V+\cdots+V}_{n\text{个}}\subset U.$$

事实上，直接从定义 1 中的 (iv)，我们由归纳法容易证明此结论对于 $n=2^k(k=1,2,\cdots)$ 必是正确的. 而当再注意到邻域性质：$V+\theta\subset V+V$ 时，我们则知，如果上式对 n 成立，必也对 $(n-1)$ 成立. 从而立即导出上面所需结论.

定义 2. 设 E, E_1, E_2 均为拓扑线性空间，φ 为从“积空间” $E_1\times E_2$ 到 E 内的一个映象，我们称 φ 在点 $(x_0, y_0)\in E_1\times E_2$ 是连续的，是指对于 $\varphi[(x_0, y_0)]=z_0$ 的任何一个邻域 U_{z_0} 而言，必存在 x_0 的一个邻域 U_{x_0} 和 y_0 的一个邻域 U_{y_0}，使得只要 $x\in U_{x_0}$, $y\in U_{y_0}$，则就有 $\varphi[(x,y)]\in U_{z_0}$.

有了上面的定义，我们就可得到关于拓扑线性空间的下面基本性质：

定理 1. 在拓扑线性空间 E 中，$\forall x, y\in E$, $x+y$ 是 (x, y) 的二元连续映象.

证. 取含 $x+y$ 的任一邻域：$U^{(1)}_{x+y}=x+y+U_1(U_1\in\mathfrak{U})$. 那么，由上面定义 1 的 (iv)，可知：必存在一邻域 $U_2\in\mathfrak{U}$，使得 $U_2+U_2\subset U_1$. 从而

可导出

$$(x+U_2)+(y+U_2)=x+y+U_2+U_2\subset x+y+U_1,$$

注意到 $x+U_2$ 为 x 的一个邻域 $U_x^{(2)}$, $y+U_2$ 为 y 的一个邻域 $U_y^{(2)}$,因而我们则可得到

$$U_x^{(2)}+U_y^{(2)}\subset U_{x+y}^{(1)}$$

也即 $x+y$ 是 (x,y) 的二元连续函数. 证毕.

定理 2. 在拓扑线性空间 E 中, $\forall x\in E$, $\forall \alpha\in \boldsymbol{K}$,为了 αx 是 (α,x) 的二元连续映象,必须且只须 E 满足

(i) $\forall x\in E$, $\forall$ (邻域) $U\in \mathfrak{U}$, $\exists \alpha\in \boldsymbol{K}$,使得 $x\in \alpha U$;

(ii) $\forall$ (邻域) $U_1\in \mathfrak{U}$, $\exists U_2\in \mathfrak{U}$, 使得当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时,就有 $\alpha U_2\subset U_1$.

证. 必要性. 首先,我们有 $\theta=0\cdot x\in U$, 而当 $x\neq\theta$ 时, 由设 αx 在 $(0,x)$ 的连续性,还知 $\forall$ (邻域) U, $\exists \varepsilon>0$, 使得当 $0<|\beta|<\varepsilon$ 时,有 $\beta x\in U$; 从而有 $x\in \dfrac{1}{\beta}U$. 也即导出了所需条件 (i).

其次,同样由在 αx 为二元连续映象的假设, 我们对邻域 U_1, 必可定出正数 ε 及邻域 U_2', 使得当 $|\beta|\leqslant\varepsilon$ 时,就有 $\beta U_2'\subset U_1$.

最后,我们由定理的假设可知当 $\alpha\neq 0$ 时, $x\mapsto \alpha x$ 与 $x\mapsto \dfrac{1}{\alpha}x$ 两互逆映象都是连续的; 也即 $x\mapsto\alpha x$ 是一个“同胚”映象, 从而不难看出其拓扑性质不变. 由此则知当 $U_2'\in\mathfrak{U}$ 时,必有 $\varepsilon U_2'\in\mathfrak{U}$. 令 $U_2=\varepsilon U_2'$, 那么, 当 $|\alpha|\leqslant 1$, $x\in\alpha U_2$ 时, 则有 $x\in\alpha\varepsilon U_2'$, 而由 $|\alpha\varepsilon|\leqslant\varepsilon$, 及上段结果,可知必有 $x\in U_1$. 也即证得定理的条件 (ii).

充分性. 首先,由上面定理 1 我们已知 $x+y$ 是一个连续映象,因此,为证 αx 是一个连续映象,注意到

$$\alpha x-\alpha_0x_0=(\alpha-\alpha_0)x+\alpha_0(x-x_0)$$

我们只要证明 $\alpha_0 x$ 在 $x=\theta$ 的连续性,以及 αx 在 $(0,x_0)$ 的(二元)连续性就可以了.

下面, 我们先证明 $\alpha_0 x$ 在 $x=\theta$ 的连续性. 事实上, 由定理 2 的条件 (ii),我们不妨设 $\alpha_0>0$($\alpha_0=0$ 命题是显然的).这时,由于 $\alpha_0=[\alpha_0]+(\alpha_0)$ ($[\alpha_0]$,(α_0)分别为 α_0 的整数部分与小数部分),因此,由注 1 可知, $\forall$(邻域)$U\in\mathfrak{U}$, $\exists$ (邻域) $V\in\mathfrak{U}$,使得

$$\underbrace{V+V+\cdots+V}_{[\alpha_0]+1\text{个}}\subset U.$$

再由本定理的假设条件 (ii), 我们又知 $\exists$ (邻域) $W\in\mathfrak{U}$, 使得当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时,

有 $\alpha W\subset U$. 这样一来，我们可导出

$$\alpha_0 W=\{[\alpha_0]+(\alpha_0)\}W\subset[\alpha_0]W+(\alpha_0)W\subset[\alpha_0]V+V$$
$$\subset\underbrace{V+\cdots+V}_{[\alpha_0]+1\text{个}}\subset U.$$

下面，证明 αx 在 $(0, x_0)$ 的(二元)连续性. 事实上，$\forall U_1\in\mathfrak{U}$, 由定义 1 性质 (iv) 可知，$\exists U_2'\in\mathfrak{U}$, 使得 $U_2'+U_2'\subset U_1$. 而对于这个邻域 U_2' 而言，由定理条件 (ii), 可知，$\exists U_2\in\mathfrak{U}$, 使得当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，有 $\alpha U_2\subset U_2'$. 于是，对此邻域 U_2, 由定理条件 (i) 还知 $\exists\beta\in \boldsymbol{K}$, 使得 $x_0\in\beta U_2$. 于是，$\forall\alpha\in\boldsymbol{K}$, 只要

$$|\alpha|<\frac{1}{\max(1,|\beta|)},$$

由于 $|\alpha\beta|<1$, $|\alpha|\leqslant 1$, 故由上面 U_2 的取法，我们可导出

$$\alpha(x_0+U_2)\subset\alpha\beta U_2+\alpha U_2\subset U_2'+U_2'\subset U_1.$$

也即 αx 在 $(0, x_0)$ 点是连续的. 证毕.

下面，我们给出拓扑线性空间构成"赋准范"线性空间的等价条件. 为此，我们先给出一个定义:

定义 3. 如果拓扑(线性)空间中点 x 的"基本"邻域组(即 x 的其它邻域均可由其一些集的"并"所组成) $\mathfrak{U}_x$ 是由可数个邻域 $\{x+U_n\}$ 所组成，则我们称它是满足 Hausdorff 第一可数公理的.

有了上面的定义，我们就可给出下面的定理.

定理 3. 为了拓扑线性空间 E 成为一个"赋准范"线性空间，必须且只须其满足定理 2 中两条件，以及 Hausdorff 第一可数公理.

证. 定理的必要性是显然的. 下面仅证明其充分性. 首先，我们假设 E 中满足 Hausdorff 第一可数公理的 (θ 点的) 邻域为 $\mathfrak{U}=\{V_n|n=0, 1, 2,\cdots\}$, 且不妨设其均为开集(我们不准备从拓扑的定义来详细叙说. 因此，对于没学过拓扑空间一般知识的读者来说，完全可以把此"开集"类作为实变函数论中满足条件: 对有穷个"交"及无穷个"并"的运算均封闭的一些集合(包括空集 Φ 与全空间 E) 的全体来对待就可以了).

其次，我们令

$$U_1=V_0.$$

然后，由定义 1 的 (iv), 则知，必存在 $V\in\mathfrak{U}$, 使得 $V+V\subset U_1$; 而又由那里的 (iii), 我们又知，存在一 $\mathfrak{W}\in\mathfrak{U}$, 使得 $\mathfrak{W}\subset V\cap V_1$. 注意到定理 2 必要性证明中所用知识，此时必亦有 $-\mathfrak{W}\in\mathfrak{U}$. 因而，由定义 1 的 (iii) 可知，对于 $\mathfrak{W}\cap(-\mathfrak{W})$ 而言，必有一邻域 $U_{1/2}\in\mathfrak{U}$, 使其满足 $U_{1/2}\subset\mathfrak{W}\cap(-\mathfrak{W})$, 从而

有

$$U_{1/2}+U_{1/2}\subset\mathfrak{W}+\mathfrak{W}\subset V+V\subset U_1,$$

$$U_{1/2}\subset\mathfrak{W}\subset V_1,$$

$$-U_{1/2}=U_{1/2}.$$

类似地，用归纳法可得到一列邻域 $\{U_{1/2^n}\}$，使其满足

$$U_{1/2^n}+U_{1/2^n}\subset U_{1/2^{n-1}},\quad U_{1/2^n}\subset V_n,\quad -U_{1/2^n}=U_{1/2^n}.$$

然后，我们再(如二进位小数定义有理数的方法定义下标从而)定义出所有以有理数为下标的邻域，

$$U_{2m+1/2^n}=U_{m/2^{n-1}}+U_{1/2^n}=\cdots$$

$$(U_r=E,\text{ 当有理数 } r>1 \text{ 时}).$$

此时，用归纳法，我们不难证明当 $1\leqslant k$, $k'<2^n$ 时，有

$$U_{k/2^n}+U_{k'/2^n}\subset U_{k+k'/2^n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

最后，定义

$$\|x\|=\begin{cases}\sup\{r\,|\,x\notin U_r,\ x\in E\}, & \text{当 } x\neq\theta \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } x=\theta \text{ 时}\end{cases}$$

(其中，r 为 $[0,1]$ 间的有理数)．那么，由上面所设 $U_{1/2^n}\subset V_n(n=1,2,\cdots)$，我们不难得到准范定义中的性质 (i) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$．由 $U_r+U_{r'}\subset U_{r+r'}$ (r, r' 均正有理数)我们不难得到准范定义中的性质 (ii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$．由 $-U_{1/2^n}=U_{1/2^n}$ 我们又可得到 $\|x\|=\|-x\|$，注意到前面定理 2 的结果，我们也不难导出 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0$ 和 $\lim\limits_{x_n\to\theta}\|\alpha x_n\|=0$. 从而也即导出了上面的"$\|\cdot\|$"的确为一准范数．(并且，我们由

$$\|x\|<r\Longrightarrow x\in U_r;\quad x\in U_r\Longrightarrow\|x\|\leqslant r'<r,$$

显然可知由此准范数所定义的拓扑结构与原拓扑结构是等价的)．证毕．

为了导出拓扑线性空间构成赋范线性空间的等价条件，我们先给出一个关于有界集的定义：

定义 4. 我们称拓扑线性空间 E 中的集 B 是有界的，是指，$\forall$ (邻域) $U\in\mathfrak{U}$, $\exists n$ (自然数)，使得 $\forall\alpha\in\boldsymbol{C}$ 只要 $|\alpha|<\dfrac{1}{n}$，就有 $\alpha B\subset U$.

定理4. 为了拓扑线性空间 E 成为一个"赋范"线性空间，必须且只须存在一个邻域 $U_0\in\mathfrak{U}$，使其满足

(i) 当 $|\lambda|=1$ 时，$\lambda U_0=U_0$; ("对称")

(ii) U_0 是有界(开)集;

(iii) U_0 是凸集.

证． 定理的必要性是明显的，且当 E 为赋范线性空间时，我们只要令 $U_0=\{x\,|\,\|x\|<1, x\in E\}$ 则为所求．下面证明其充分性．

首先，我们做 $\{\alpha U_0\,|\,\alpha>0\}$；然后，证明 $\{\alpha U_0\,|\,\alpha>0\}$ 与 $\mathfrak{U}$ 是等价的．事实上，当设 $0<\alpha<1$ 时，如果 $x\in\alpha U_0$，则有元 $y_0\in U_0$，使得 $x=\alpha y_0$．于是，由 $x=\alpha y_0+(1-\alpha)\theta$，故由定理假设条件 (iii) 可知 $x\in U_0$，从而还可知 $\alpha U_0\subset U_0$（比上面定理 2 中条件 (ii) 特殊）．这样一来，$\forall\beta>0$，当我们取一自然数 n，使得 $\beta>1/2^n$ 时，反复用前面定义 1 的 (iv)，可得到一邻域 $V_1\in\mathfrak{U}$，使得

$$2^nV_1\subset\underbrace{V_1+\cdots+V_1}_{2^n个}\subset U_0.$$

因而利用上面的结果 $\left(注意\left(\frac{1}{2^n}\Big/\beta\right)U_0\subset U_0\right)$ 我们可得

$$V_1\subset\frac{1}{2^n}U_0\subset\beta U_0.$$

另一方面，从 U_0 的有界性假设可知 $\forall$（邻域）$V\in\mathfrak{U}$，$\exists\alpha\in\boldsymbol{C}$，使得 $\alpha U_0\subset V$．此即得出所需结论．

其次，我们定义

$$\|x\|=\sup\{\beta\,|\,x\notin\beta U_0\},\quad\forall x\in E.$$

那么，我们显然有

$$\|x\|<\alpha\Longrightarrow x\in\alpha U_0,\quad x\in\alpha U_0\Longrightarrow\|x\|\leqslant\alpha'(<\alpha).$$

从而知此定义的拓扑结构与原拓扑结构是等价的．

最后，由上段所得结果及定理假设条件 (iii)，(i) 不难验证上面定义的"$\|\cdot\|$"的确满足范数定义的三条性质．证毕．

推理． 空间 $L^p[0,1]$ 当 $0<p<1$ 时是不可赋范的．

证．（虽然 $L^p[0,1]$ 当 $0<p<1$ 时，在准范

$$\|x\|_*=\int_0^1|x(t)|^pdt,\quad\forall x\in L^p$$

下为一 Fréchet 空间，然而下面我们将证明，其却是不可赋范的．）借助于上面的定理 4，下面我们只要证明：除了空集 $\varnothing$ 外，$L^p(0<p<1)$ 内将不存在任何有界开凸集．

反之，如果 L^p 此时存在一有界开凸集 $U_0\neq\varnothing$，那么，首先由于球族

$$B_r=\{x\,|\,\|x\|_*<r, x\in L^p(0<p<1)\},\quad 0<r<\infty$$

系 L^p 拓扑下的一个"邻域族"，故知存在其中一球 B_{r_0} 使得 $B_{r_0}\subset U_0$．

这样一来，$\forall x\in L^p$（由于 $0<p<1$）$\exists n$（自然数），使得 $\frac{\|x\|_*}{n^{1-p}}<r_0$。注意到 $|x(t)|^p$ 积分的"绝对连续"性，我们可找到 n 个分点

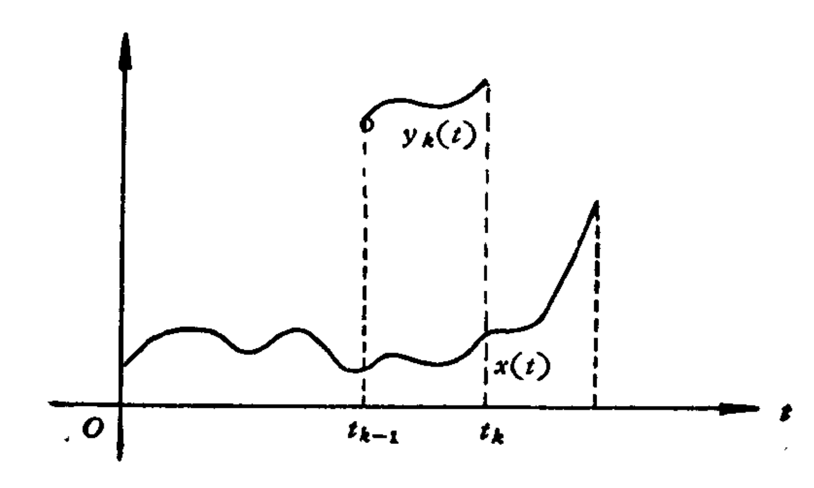
$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k<\cdots<t_n=1,$$

使得均有

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}|x(t)|^p dt=\frac{\|x\|_*}{n},\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

然后，我们令

$$y_k(t)=\begin{cases}nx(t), & \text{如果 } t_{k-1}<t\leqslant t_k;\\ 0, & \text{其它情形;}\end{cases}\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$



那么，由前所得诸关系可知

$$\|y_k\|_*=\int_{t_{k-1}}^{t_k}|nx(t)|^p dt=n^p\frac{\|x\|_*}{n}=\frac{\|x\|_*}{n^{1-p}}<r_0,$$

因此均有 $y_k\in B_{r_0}\subset U_0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$。

最后，由 U_0 是凸集的假设，我们则可导出 $\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{n}\in U_0$，也即有 $x\in U_0$。从而由 x 的任意性，此即导出 $U_0=L^p$，故与 U_0 的有界性矛盾。证毕。

注 2. 关于赋范线性空间的更深入的讨论，必然就要涉及到拓扑线性空间。拓扑线性空间的内容，十分丰富，尤其近几十年来，随着生产、科学的飞跃发展，人们发现，原来以为是很"抽象"的这一数学领域，却原来是具有很大应用价值的，已成为许多学科的有力工具，因而引起了人们的高度重视。这里，我们不可能详细讨论它。对此有兴趣的读者，完全可以容易地找到这一方面的著作进行学习（六十年代以前的有关书籍可参看文献 [2]，[33]，[89] 等）。

习 题 提 示

§1.1

1. (i) 由 V 的凸性，有 $\frac{x_n + x_m}{2} \in V$，从而由

$$d \leqslant \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \leqslant \frac{\|x_n\|}{2} + \frac{\|x_m\|}{2}$$

可以导出结论. (ii) 注意

$$\left\| \frac{\bar{x}_n + \bar{x}_m}{2} \right\| = \left\| \frac{\|x_n\| x_m + \|x_m\| x_n}{\|x_n\| + \|x_m\|} \right\| \cdot \frac{\|x_n\| + \|x_m\|}{2\|x_n\| \cdot \|x_m\|}$$

$$\geqslant d \frac{\|x_n\| + \|x_m\|}{2\|x_n\|\|x_m\|} \to 1 \quad (n, m \to \infty).$$

(iii) 当 $d = 0$ 时，结论成立的例：在 $\boldsymbol{R}_1$ 中设 $V_1 = (0, 1)$. 结论不成立的例：在 $\boldsymbol{R}_1$ 中取 $V_2 = (-1, 2)$，则由 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 可得结论.

2. 注意 Cauchy 不等式：$\forall n$，均有

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2}.$$

4. 例如，可取有限个值不为 0 的复数列 $\{\xi_k\}$ 的全体.

5. 从 Riesz 引理的证明中可见：$\exists \{x_n^0\}$，使得

$$1 \geqslant \|x_n^0\| = \|x_n^0 - \theta\| \geqslant \inf_{y \in E_0} \|x_n^0 - y\| \geqslant \varepsilon_n \to 1 \quad (n \to \infty).$$

由定理 1 及 $\{x_n^0\}$ 的列紧性可导出结论.

6. 为证明注 1. 只要注意到引理 2 的结果，由其各坐标收敛的关系来"过渡"即可. 为证明注 2,同样可由引理 2 的证明方法及数列的列紧性导出，或者直接利用定理 1 的结果.

7. 首先注意在"线性同构"下，基底仍对应于基底，由此不难从引理 2 通过坐标收敛的关系导出结论.

9. 如果 F 是列紧集，则由归谬法可以证得：$\forall \frac{1}{n} > 0 (n = 1, 2, \cdots)$，$F$ 必存在有限元组成的"$\frac{1}{n}$ — 网" M_n. 于是可列集 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 稠于 F. 这样一来，对于 F 的任意开复盖 $\{G_l | l \in I\}$ 必存在以 M 中元为心，以某有理数为半径的一列开球仍复盖 F，由此可得可数个开球 $\{G_n\} \subset \{G_l | l \in I\}$ 使仍为 F 的复盖. 反之，如果从中选不出有穷复盖，则可取点 $x_n \in F \setminus \bigcup_{k=1}^{n} G_k (n = 1, 2, \cdots)$. 而由自列紧性知，$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，

使 $x_{n_k} \to x_0 \in F(k \to \infty)$．于是，再由 x_0 必属于某一 G_{n_0}，可导出矛盾．反过来，如果 F 是紧集．当设无穷点列 $\{x_n\} \subset F$ 无收敛于 F 中元的子列的话，则 $\forall x \in F$，$\exists \delta_x > 0$，使开球 $S(x, \delta_x)$ 内除 x 点外无 $\{x_n\}$ 的点．这样，从 F 的 $\{S(x, \delta_x) | x \in F\}$ 开复盖中运用"紧"性则可导出矛盾．

10．当 F 非空时，设 $x_0 \in F$，注意球 $\{S(x_0, n)\}$ 构成 F 的一个开复盖可得到 F 的有界性；从 F 是自列紧的可导出闭性．

11．由 f 连续 f^{-1} 将开集变为开集且 f 将紧集变为紧集而得出结论．

§ 1.2

3．注意到复变函数论的一个基本定理：解析函数列的一致收敛极限仍是解析函数．

4．不妨设 $[a, b] = [-1, 1]$ 取元列 $\{x_n\}$ 为 $x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0]; \\ nt, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$ 则知

$\|x_n - x_m\| \leqslant \left|\int_{1/m}^{1/n} dt\right| \to 0\,(m, n \to \infty)$．但 $x_n \to x_0(n \to \infty)$，而

$$x_0 = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0]; \\ 1, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

与 x_0"对等"的函数中无连续函数．一般说来，由于一个"平方可积"的可测函数(即使不与连续函数"对等")可以由连续函数列"平均逼近"，从而知 $C^2[a, b]$ 不完备．

5．由各阶导函数的 Cauchy 列得各连续函数；由一致收敛的性质，在积分号下取极限得知，上所得的各连续函数乃是同一函数之各阶导函数．最后，从 Cauchy 列不等式中对一序列取极限则得结果．

6．由一致收敛易得一连续函数 $x_0(t)$．再由 Cauchy 列假设还有

$$|x_0(t)| \leqslant |x_{n_0}(t) - x_0(t)| + |x_{n_0}(t)| < \varepsilon + |x_{n_0}(t)|,$$

从而易验证 $x_0(t) \to 0(t \to \infty)$，即 $x_0(t) \in C_0(-\infty, +\infty)$．

7．参阅§ 7.1 例 8．

8．由 E_0 中任意 Cauchy 列在 E 中有极限及 E_0 闭，故该极限属于 E_0．

9．注意 $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$ 是 E 的一 Cauchy 列．后一结论可由 $y_n \to y_0 \in E$，$y_{n-1} \to y_0$ 推得．

10．由于直径所成的数列 $\{d(S_n)\}$ 是不增有下界的，故存在 $d_0 > 0$，使得 $d(S_n) \searrow d_0(n \to \infty)$．取一球 S_{n_0} 使得 $d(S_{n_0}) < \frac{5}{4} d_0$，则当令 S_0 为与 S_{n_0} 同心以 $\frac{d_0}{2}$ 为直径的球时，在 S_{n_0} 内任意不包 S_0 的球的直径必不大于 $\frac{7}{8} d_0$．

11．可取各球心组成元列 $\{x_n\}$，并注意 $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}\ |d(S_n) - d(S_m)| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ 以及空间的完备性．

12．反例可举 $C[0,1]$ 中集列 $\{V_n\}$：V_1 为 $x_1(t)=t$ 以及过 $x_1(t)$ 端点在 $x_1(t)$ 下面的非负连续函数的全体；V_2 为 $x_2(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2} \text{ 时},\\ \dfrac{t-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}, & \text{当 } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$ 以及过 $x_2(t)$ 端点在 $x_2(t)$ 下面的非负连续函数的全体；…；V_n 为

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n} \text{ 时},\\ \dfrac{t-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}, & \text{当 } \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1 \text{ 时},\end{cases}$$

以及过 $x_n(t)$ 端点在 $x_n(t)$ 下面的非负连续函数的全体；…．或在 (c) 中令
$V_n=\{(\xi)_k\,|\,\xi_k=0,\ 1\leqslant k\leqslant n;\ 0\leqslant\xi_k\leqslant 1,\ k>n,\ \lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=1\}\quad(n=1,2,\cdots)$
(其实在非"自反"(§2.4)空间中均可举出例来)．

13．注意注 3．

14．首先证明 $\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|^{p_0}dt\to 0\Rightarrow\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|dt\to 0(n\to\infty)$．然后注意 $\{x_n(t)-x_0(t)\}$ 亦"等度连续"列．故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得一致地有

$$|[x_n(t')-x_0(t')]-[x_n(t'')-x_0(t'')]|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|t'-t''|\leqslant\delta,\quad\forall t',t''\in[0,1]\quad(n=1,2,\cdots).$$

最后，由 $n\geqslant N$，$\|x_n-x_0\|_{L_1}=\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|dt\leqslant\varepsilon\cdot\delta/2$，用归谬法则得

$$\sup_{t\in[0,1]}|x_n(t)-x_0(t)|\leqslant\varepsilon.$$

15．反之，有 $x_1\in E$，使 $\|x_1\|=1$；$\inf\limits_{y\in E_0}\|x_1-y\|=1$．注意：$\forall x\in E\backslash E_0$，当令

$$\alpha=\int_0^1 x_1(t)dt\Big/\int_0^1 x(t)dt$$

时，有 $x_1-dx\in E_0$ 由以上假设可得

$$\left|\int_0^1 x(t)dt\right|\leqslant\left|\int_0^1 x_1(t)dt\right|\|x\|,\quad\forall x\in E,$$

由此特取一列 $x_n(t)=t^{1/n}(n=1,2,\cdots)$ 可得 $\left|\int_0^1 x_1(t)dt\right|\geqslant 1$．但注意到 $x_1(0)=0$，$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_1(t)|=1$，$x(t)$ 连续故有 $\left|\int_0^1 x_1(t)dt\right|<1$ 矛盾．

§1.3.

1．可分．从 $x(t)$ 的 K 阶导函数用有理系数多项式一致逼近开始，然后逐次积分可得出与 $x(t)$ 度量逼近的有理系数多项式．

2．从 $C[-n,n]$ 可分，设对应可数稠集为 $Q_n^0(n=1,2,\cdots)$．对 Q_n^0 中函数在

$(-\infty,\infty)$ 作适当连续延拓，设所得函数集为 $Q_n(n=1,2,\cdots)$，则令 $Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_n$ 便易验得结论.

3. 不可分. 用归谬法验证. 反之，如果 $C[0,\infty)$ 可分，设函数列 $\{x_n(t)\}\subset C[0,\infty)$ 稠于 $C[0,\infty)$，那么，我们取一函数 $x_0(t)\in C[0,\infty)$：(i) (a) 当复数 $x_n(n)=0$ 时，取 $x_0(n)=1$；(b) 当复数 $x_n(n)\neq 0$，如果主幅角 $\arg[x_n(n)]\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 或 $\left[-\pi,-\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ 或 $\left[\pi-\frac{\pi}{4},\pi\right]$ 时，取 $x_0(n)=\frac{\overline{x_n(n)}}{|x_n(n)|}$ ；(c) 如果主幅角 $\arg[x_n(n)]$ 不属于上区间时，则取 $x_0(n)=-\frac{\overline{x_n(n)}}{|x_n(n)|}$ $(n=1,2,\cdots)$. (ii) $x_0(0)=0$. (iii) 在 $[0,\infty)$ 的其它部分 $x_0(t)$ 用上 $x_0(0)$ 与 $x_0(n)(n=1,2,\cdots)$ 的值"折线"方式取值(即实部与虚部分别依该可列值逐段线性相连取值)，则从

$$\|x_0-x_n\|=\sup_{0\leq t<\infty}|x_0(t)-x_n(t)|\geq|x_0(n)-x_n(n)|\geq 1\quad(n=1,2,\cdots).$$

故知与 $\{x_n\}$ 假设矛盾.

4. $\forall x=\{\xi_k\}\in(S)$，$\forall n$，做 $x_n=\{r_1^{(n)},r_2^{(n)},\cdots,r_n^{(n)},0,\cdots\}$ 其中 $r_k^{(n)}$ 为有理数满足 $|\xi_k-r_k^{(n)}|<\frac{1}{n}$，$1\leq k\leq n(n=1,2,\cdots)$.

5. 由 $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}(\alpha\neq 0)$，均有 $\lim\limits_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin^2\alpha t dt\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$. 故知 $\sin\alpha t\in\tilde{L}^2$. 且当 $\alpha\neq\beta$ 时，$\|\sin\alpha x-\sin\beta t\|=1$. 而 $\{\sin\alpha t|\alpha\in R\}\subset\tilde{L}^2$ 为不可数集.

6. 类似于证明 L^p 可分的方法，$\forall x(t)\in L^p(-\infty,+\infty)$. 先由在有限区间 $[-n,n]$ 之外 $x(t)$ 取 0 值的函数"按范"逼近，然后再对后者以连续函数来按范逼近，最后，由连续函数在有限区间上的积分关于平移连续可推得结论.

7. 注意元 $e_0=(1,1,\cdots)$ 与 $e_n(n=1,2,\cdots)$ 组成 (c) 的基底.

9. 本节的例中已提示该方法，其中，注意由函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的一致连续性可知，其可由"折线"来一致逼近，但"折线"所代表的函数是绝对连续并且导函数是平方可和的. 因而其相应的 Fourier 级数是绝对一致收敛于它的.

§ 1.4

1. 由定义有 $\{x_n\}\subset[x]$，使 $\|x_n\|\to\|[x]\|$. 注意到 $x_n=x+x_n^0$，$\{x_n^0\}\subset E_0$ 故由 §1.1 的定理不难由 $\{x_n^0\}$ 的列紧性证明

2. 在证明完备性时，注意到 $\{(x_l^{(n)})\}$ 是积空间 E 的一 Cauchy 列，$\forall l\in I$，$\{x_l^{(n)}\}$ 必为 E_l 空间的 Cauchy 列，因而不难从 E_l 的完备性导出所需的结论.

3. 其一类似 $\boldsymbol{K}^n$ 在定义 $\|x\|=\max\limits_{1\leq k\leq n}|\xi_k|$ 下完备的证法，其二，类似 $(l^p)(p\geq 1)$ 的证法

4. 注意由 $\|\alpha x\|$ 对 x 的连续性，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\|x\|<\delta$ 时，有 $\|\alpha x\|<\varepsilon$. 然后由元 $[x_n]\to 0(n\to\infty)$ 的假设可令 $\|[x_n]\|<\delta(n\geq N)$. 故由范的定义有 $x_n^0\in E$，$x_n^0\in[x_n](n=1,2,\cdots)$，使 $\|x_n^0\|<\delta(n\geq N)$，$\cdots$. 而在验证 $\alpha_n\to 0\Rightarrow\|[\alpha_n x]\|\to 0$ $(n\to\infty)$ 时，只须取一元 $x^0\in[x]$，由 $\|x\|$ 的(拟)准范性与 $\|[\alpha_n x]\|\leq\|\alpha_n x^0\|$ 不难得

到结论。

§ 1.5

1. 注意到当 $p \leqslant q$ 时，$\forall x = \{\xi_n\} \in (l^p)$，由于 $\sum\limits_{n>N} |\xi_n|^p < \varepsilon^p$，故

$$\sum_{n>N} |\xi_n|^q = \sum_{n>N} |\xi_n|^p |\xi_n|^{q-p} \leqslant \varepsilon^{q-p} \sum_{n>N} |\xi_n|^p < \varepsilon^q;$$

又 $\forall x(t) \in L^q(\Omega, B, \mu)$，由

$$\int_\Omega |x(t)|^p \mu(dt) = \int_{\Omega[t,|x|>1]} |x(t)|^p \mu(dt) + \int_{\Omega[t,|x|\leqslant 1]} |x(t)|^p \mu(dt)$$
$$\leqslant \int_\Omega |x(t)|^q \mu(dt) + \mu(\Omega) < \infty$$

便可得结论.

2. 充分性显然. 在必要性证明中注意如果 $\|x\|_1 \to 0 \Rightarrow \|x\|_2 \to 0$，则对 $\varepsilon_0 = 1$ 而言，$\exists \delta_0 > 0$，当 $\|x\|_1 < \delta_0$ 时，有 $\|x\|_2 \leqslant 1$. 特别，$\forall x \in E$，$x \neq \theta$ 由 $\left\| \frac{\delta_0 x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leqslant 1$ 便导出

$$\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{\delta_0} \|x\|_1$$

(当 $x = \theta$ 时亦对)，类似地可证明不等式的另一端

4. $\forall \{\xi_n\} \in (c)$，设 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$ 做映象 φ: $\{\xi_n\} \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \{\eta_n\}$，其中 $\eta_1 = \xi_0$，$\eta_2 = \xi_1 - \xi_0, \cdots, \eta_n = \xi_{n-1} - \xi_0, \cdots$. 则 $\{\eta_n\} \in (c_0)$. 反之亦然. 容易验证映象是线性同构的且双方连续的，但不保范.

5. 由绝对连续函数的性质易知，$\forall x(t) \in AC$，做映象 φ: $x(t) \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} x'(t)$，则 $x'(t) \in C$. 反之亦然，容易验证此为 AC 与 C 的等价映象.

6. $\forall x \in C^{(k)}$，作映象 φ: $x(t) \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} (x(t), x'(t), \cdots, x^{(k)}(t))$ 且注意

$$\|x\|_{C^{(k)}} = \|\varphi(x)\|_{C^k}.$$

φ 即为所求.

7. 注意连续函数按此范定义稠于 $L^p[a, b]$.

8. 注意多项式可一致收敛于一个连续而不可导的函数. 又具有"k 阶导函数"的函数按此范稠于 $C[a, b]$.

§ 2.1

1. 注意定理 2 的证明.

2. 由可加性可导出 $T(nx) = nT(x)$ (n——自然数)，从而 $T(\overset{+}{r}x) = \overset{+}{r}T(x)$ ($\overset{+}{r}$——正有理数)；再由 $T(\theta) = T(\theta + \theta) = 2T(\theta)$ 知 $T(\theta) = 0$，从而导出

$$T(-x) = -T(x), \quad \text{即} \quad T(rx) = rT(x).$$

(r——任意有理数). 最后由T的连续性, 故 $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}$ 存在有理数 $r_n\to\alpha\ (n\to\infty)$. 故易导出结论.

3. 例如在复 $C[a, b]$ 空间中考虑算子 $T(x)=\overline{x(t)}$, $\forall x=x(t)\in C[a, b]$.

4. 注意 $T(x)-T(x_1)=T((x-x_1)+x_0)-T(x_0)$.

5. 推理 1: 如果T将 $\bar{S}(x_0, \delta_0)$ 映像为有界集, 则 $\forall\theta\neq x\in E\backslash\bar{S}(x_0,\delta_0)$ 时有正整数 n_x, 使 $\frac{\|x\|}{n_x}\leqslant\delta_0<\frac{\|x\|}{n_x-1}$. 则 $x_0+\frac{x}{n_x}\in\bar{S}(x_0,\delta_0)$, 故) $\|T(x_0+\frac{x}{n_x}(\|<\beta$

则有 $\|T(\frac{x}{n_x})\|<\beta+\|T(-x_0)\|=\beta+\|T(x_0)\|$. 从而有

$$\|T(x)\|<n_x(\beta+\|T(x_0)\|)=(n_x-1)\cdot\frac{n_x}{n_x-1}(\beta+\|T(x_0)\|)$$

$<\frac{2}{\delta_0}(\beta+\|T(x_0)\|)$.

最后,由本节定理2,则可导出命题上半结论. 同样由定理2可知命题下半结论成立.

推理 2: 当设泛函 $f(x)$ 在球 $\bar{S}(x_0,\delta_0)$上有界时类似上题(考虑 $f(x_0\pm\frac{x}{n_x})$). "下有界"时考虑 $-f(x)$. 推理 3: "$\Rightarrow$" 由定理 2 知存在正数 β, 使 $\|T^{-1}(y)\|\leqslant\beta\|y\|$, 即 $\|y\|\geqslant\frac{1}{\beta}\|T^{-1}(y)\|$, $\forall y\in\mathfrak{W}(T)$ 注意 $\mathfrak{D}(T)$与 $\mathfrak{W}(T)$ 元一一对应,故上即

$$\|T(x)\|\geqslant\frac{1}{\beta}\|x\|,\quad\forall x\in\mathfrak{D}(T).$$

"$\Leftarrow$" 由设知 $\mathfrak{D}(T)$ 与 $\mathfrak{W}(T)$ 一一对应,故 T^{-1} 亦分配算子,且设 $x=T^{-1}(y)$,代入假设条件则得 T^{-1} 是有界算子,再利用定理 2 可得出结论.

6. 反之, 如果 $f(x)$ 在 x_0 点取到"局部极小"值, 则由存在 $S(x_0, \delta_0)$ 使 $f(x)\geqslant f(x_0)$, $\forall x\in S(x_0, \delta_0)$. 这样就有 $f\left(x_0\pm\frac{\delta_0 x}{\|x\|}\right)\geqslant f(x_0)$, $\forall x\in E$, $x\neq\theta$, 即

$$\mp\frac{\delta_0}{\|x\|}f(x)\leqslant 0,$$

从而 $f(x)=0$, $\forall x\in E$,当 $f(x_0)$ 取"局部极大"时可考虑泛函 $-f(x)$.

7. 由 $k(s, t)$ 在闭域上的连续性容易导出结论.

8. $[T(x)](z)$ 的解析性可以从其在 $|z|<1$ 能展成幂级数 (Taylor 级数) 而得. 事实上, 由于 $\sum_{k=0}^{\infty}(e^{it}z)^k=\frac{1}{1-ze^{it}}$ 关于 t 是一致收敛的. 因此, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 使得当 $n\geqslant N$时,均有 $\left|\sum_{k=0}^{n}(e^{it}z)^k-\frac{1}{1-ze^{it}}\right|<\varepsilon$, $\forall t\in[0, 2\pi]$. 于是

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{x(t)}{1-ze^{it}}dt-\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi}(e^{it}z)^k x(t)dt\right|$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1 - ze^{it}} - \sum_{k=0}^{n} (e^{it}z)^k \right| |x(t)| dt \leqslant \delta \int_0^{2\pi} |x(t)| dt,$$

故 $\forall x \in L^1$，均有 $[\mathrm{T}(x)](z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{ikt} x(t) dt \right) z^k$，$\forall |z| < 1$．至于作为从空间 L^1 到空间 $A_{\rho_0}(\rho_0 < 1)$ 的算子是连续线性算子则只要注意当 $|z| \leqslant \rho_0 < 1$ 时，由

$$|1 - ze^{it}| \geqslant 1 - |ze^{it}| \geqslant 1 - \rho_0,$$

有 $\|\mathrm{T}(x)\| \leqslant \frac{1}{1-\rho_0} \|x\|$．最后，当取 $\{x_n\} = \{e^{int}\}$ 时，由上面关于等比级数的展开以及一致收敛的级数可以逐项积分我们容易算出 $\mathrm{T}(x_n) = 0$，$n = 1, 2, \cdots$．因此 $\mathfrak{D}(\mathrm{T})$ 与 $\mathfrak{W}(\mathrm{T})$ 不是一一对应的，从而 T^{-1} 不存在．

9．(i) $\forall x \in E$，记 $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_1)}$ 则 $x - \alpha x_1 \in N_f$．(ii) 如果 $\alpha_1 x_1 + y_1 = \alpha_2 x_1 + y_2$，由 $(\alpha_1 - \alpha_2) x_1 = y_2 - y_1 \in N_f$，知 $\alpha_1 = \alpha_2$，从而 $y_1 = y_2$．

10．"$\Rightarrow$" 注意上面 8 的结果可得 $f_0(x_1) f_1(x) = f_1(x_1) f_2(x)$．$\forall x \in E$，故可取 $\lambda = f_1(x_1)/f_2(x_1)$．"$\Leftarrow$" 其是显然的．

11．"$\Rightarrow$" $\forall x_0 \in H_{f_1} = H_{f_2}$，容易证明集 $\{H_{f_1} - x_0\} = N_{f_1}$，$\{H_{f_2} - x_0\} = N_{f_2}$，故有 $N_{f_1} = N_{f_2}$．由上面 9 结果知 $f_1(x) = \lambda f_2(x)$，$\forall x \in E$．特别将 x_0 代入则有 $c_1 = \lambda c_2$．"$\Leftarrow$"其是显然的．

§ 2.2

1．由 $|\eta_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{i,j}| \right) \sup_j |\xi_j| (i = 1, 2, \cdots)$ 及 $\forall i$，取元 $x_i = \{\mathrm{sgn}\, \alpha_{ij}\} \in (m)$，则 $\|x_i\| = 1$，而 $\|\mathrm{T}(x_i)\| \geqslant |\eta_i| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{irj}|$．

2．由 $\sum_{i=1}^{n} |\eta_i| \leqslant \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \right)$ 及 $\forall j (1 \leqslant j \leqslant n)$，取元 $x_j = (\delta_{ij})$，则有 $\|\mathrm{T}(x_j)\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|$．

3．由线性代数知识，可知 T 为自共轭型的固有值均为实数，且存在两两直交的基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$．因而由

$$\|\mathrm{T}(x)\| = \left\| \mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e_i \right\|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \alpha_i|^2} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2}$$

以及当设 $\lambda_{i_0} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$ 时，令 $x^0 = e_{i_0}$，则有 $\mathrm{T}x^0 = \lambda_{i_0} e_{i_0}$，

4．分下三步证明：(i) $\forall x \in E \backslash E_0$，由有 $\{y_n\} \subset E_0$，使 $y_n \to x (n \to \infty)$，故可导出 $\{\mathrm{T}_0(y_n)\}$ 为 E_1 的 Cauchy 列，从而由 E_1 完备可定元 $\mathrm{T}(x)$．(ii) 上面定义是一意确定的．即如果还有 $\{y_n'\} \subset E_0$，使 $y_n' \to x (n \to \infty)$，则 $\|\mathrm{T}_0(y_n) - \mathrm{T}_0(y_n')\| \to 0 (n \to \infty)$．(iii) T 是分配的，且 $\|\mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}_0\|$，

5. 由算子范数定义易得前半命题，后半结论可由反例得到：在 $C[0, 2\pi]$ 中定义一有界算子列 $[A_n(x)](t) = \left(\int_0^{2\pi} e^{int}x(t)dt\right) e^{int}$，$\forall x = x(t) \in C[0, 2\pi]$. 由 Fourier 系数性质可知 $\|A_n(x)\| \to 0 (n \to \infty)$; $\forall x \in C[0, 2\pi]$. 但另一方面由

$$\|A_n(e^{-int})\| = 2\pi \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

故知 $\|A_n\| \nrightarrow 0$.

6. 必要性是较易导出的，我们只要注意到，如果 $C(\Omega)$ 可分而 Ω 不是紧集，那么从本节有关命题可知 $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\exists \{a_n\} \subset \Omega$ 满足 $d(a_i, a_j) \geqslant \varepsilon_0 (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots)$. 类似§1.3 习题 3 的方法，可得 $C(\Omega)$ 中一函数 $x_0(t)$，使其与 $C(\Omega)$ 中的可数稠集 $\{x_n(t)\}$，均有 $\|x_0 - x_n\| \geqslant 1 (n = 1, 2, \cdots)$. 矛盾. 充分性的证明较为困难些. 首先由 $x(t)$ 在 Ω 是一致连续的(因 Ω 紧)故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ "有理数" $\delta^\circ > 0$, 使得当 $|t' - t''| < \delta^\circ$ 时，就有 $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon/4$. 其次，由 Ω 紧，故知有可数集 $\{a_n\}$ 稠于 Ω，且由球列 $\{S(a_n, \delta^\circ)\}$ 复盖 Ω，可知必存在其中有限个球 $(S(a_{n_k}, \delta^\circ) k = 1, 2, \cdots, k_0)$ 仍然复盖 Ω. 取 k_0 个有理数 r_k，使得 $|x(a_{n_k}) - r_k| < \varepsilon/4$, $k = 1, 2, \cdots, k_0$. 这样，在 Ω 上定义一个简单函数 $y(t)$：当 $t \in S(a_{n_1}, \delta^\circ)$ 时，$y(t) = r_1$；当 $t \in S(a_{n_2}, \delta^\circ) \backslash S(a_{n_1}, \delta^\circ)$ 时，$y(t) = r_2, \cdots$；当 $t \in S(a_{n_{k_0}}, \delta^\circ) \backslash S(a_{n_{k_0}-1}, \delta^\circ)$ 时 $y(t) = r_{n_{k_0}}$. 我们可知 $\sup\limits_{t \in \Omega} |x(t) - y(t)| < \varepsilon/2$. 而对于上面的一个简单函数 $y(t)$，由 $x(t)$ 的一致连续性及 $y(t)$ 的做法我们不难作出一个相应的连续函数 $x_y(t)$，使得 $\sup\limits_{t \in \Omega} |y(t) - x_y(t)| < \varepsilon/2$. 故有 $\|x_y - x\| < \varepsilon$. 最后注意到上面的简单函数 $\{y(t)\}$ 是一个可数集合，从而知 $\{x_y(t)\}$ 亦是 $C(\Omega)$ 中的可数集，因而证得 $C(\Omega)$ 是可分的.

7. 注意到对 E 中任意有界集 M，对 M 内任意无限点列 $\{x_n\}$，由假设存在(非零)子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) \to y_0 \in E_1$，即 $\frac{T(x_{n_k})}{\|x_{n_k}\|} \to y_0 (k \to \infty)$. 注意 $\{\|x_{n_k}\|\}$ 亦有界数列，故有子列 $\|x_{n_{k_i}}\| \to \lambda_0 (k_i \to \infty)$，从而导出 $T(x_{n_{k_i}}) \to \lambda_0 y_0$.

§ 2.3

1. $\|f\| = \max(|\alpha|, |\beta|)$.

2. 由收敛定义有 $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k = x$. 故容易验证其连续线性泛函 f 必对应于有限项非零的复数组 $(f_1, f_2, \cdots, f_n, 0, \cdots)$.

3. (i) 先设 E_k 为次数小于 k 的多项式全体，E_0 为 $C^{(k)}$ 中 $x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(k-1)}(0) = 0$ 的元的全体，从 $x(t) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{x^{(i)}(0)}{i!} t^i + \left[x(t) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{x^{(i)}(0)}{i!} t^i\right]$ 易证 $C^{(k)} = E_k + E_0$. 其次，由于初始条件所定的方程 $x^{(k)}(t) = y(t)$, $x^{(i)}(0) = 0 (i = 0, 1, \cdots, k-1)$ $(y(t) \in C[0, 1])$ 可唯一确定 E_0 中一元，因而不难验得 E_0 等价于 $C[0, 1]$. (ii) 由 $\forall f \in (C^{(k)})^*$. 当令 $f_1(x) = f(x)$, $\forall x \in E_k$ 时，有 $f_1 \in (E_k)^*$；当令 $f_2(x) = f(x)$, $\forall x \in C[0, 1]$ 时，有 $f_2 \in (C[0, 1])^*$. 从而不难得出结论.

4. 仅须注意 $\forall f \in (E_1 \times E_2)^*$，当元 x 仅在 E_k 中动时(可视为积空间的元 (x, θ)).

则 f 变为E_k^*中的元 ($k=1,2$). 且有 $f[(x_1,x_2)]=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, 从而易得

$$\|f\|=\max(\|f_1\|,\|f_2\|).$$

反过来,作类似的讨论亦可.

5. 类似 4 可知, $\forall f\in E^*$ 当 f 在 E_l 中动时便成为 E_l^* 的元,称为 f_l. 且有

$$f[(x_l)]=\sum_l f_l(x_l),\quad \forall(x_l)\in E,$$

反之亦是. 此外 (i) 当 $p=1$ 时,由

$$|f[(x_l)]|\leqslant\sum_l|f_l(x_l)|\leqslant\sum_l\|f_l\|\|x_l\|\leqslant(\sup_l\|f_l\|)\sum_l\|x_l\|;$$

另一方面, $\forall\varepsilon>0$, $\forall l_0\in I$, 有 $x_{l_0}^0\in E_l$, 使 $\|x_{l_0}^0\|=1$,因此,有

$$\|f_{l_0}\|-\varepsilon<|f_{l_0}(x_{l_0}^0)|=|f[(x_l^0)]|\leqslant\|f\|$$

$\left(\text{这里}(x_l^0)\text{为积空间}\prod_{l\in I}(E_l)\text{中仅}\ l_0\ \text{坐标取}\ x_{l_0}^0,\ \text{其余均取}\ \theta\ \text{之元}\right)$. 由此则可导出 $\|f\|=\|(f_l)\|=\sup_l\|f_l\|$. (ii) 当 $p>1$ 时,由

$$|f[(x_l)]|\leqslant\sum_l|f_l(x_l)|\leqslant\sum_l\|f_l\|\|x_l\|\leqslant\left(\sum_l\|f_l\|^q\right)^{1/q}\left(\sum_l\|x_l\|^p\right)^{1/p}.$$

另一方面,对任有限个指标 $l_k\in I$,取元 $x_{l_k}^0$,使 $\|x_{l_k}^0\|\leqslant1$. 且 $|f_{l_k}(x_{l_k}^0)|\geqslant(1-\varepsilon)\|f_{l_k}\|$ ($k=1,2,\cdots,n$). 于是,取 E 中元 $(\bar{x}_l)$, 其在上面各相应坐标上取元为 $\|f_{l_k}\|^{q-1}x_{l_k}^0$ ($k=1,2,\cdots,n$),而在其余坐标上取 θ 元,那么,我们可导得

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^n\|f_{l_k}\|^q\leqslant|f[(\bar{x}_l)]|\leqslant\|f\|\cdot\|(\bar{x}_l)\|=\|f\|\left(\sum_{k=1}^n\|f_{l_k}\|^q\right)^{1/p},$$

即

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^n\|f_{l_k}\|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|.$$

§ 2.4

1. 由 $\forall x_1\in E$, $\tilde{x}_1(f)=f(x_1)(\forall f\in E^*)$ 为 E^* 上的有界线性泛函, 且有 $\|\tilde{x}_1\|\leqslant\|x_1\|$; 另一方面由假设有 $\tilde{x}_1(f_1)=\|x_1\|(\|f_1\|=1)$, 即导出 $\|\tilde{x}_1\|=\|x_1\|$. 最后, 注意到 $\tilde{x}_1\in E^{**}$ 即可.

3. 由 $\forall g\in E_1^*$, $\|[T^*(g)(x)\|\leqslant\|T^*\|\|g\|\|x\|$ 可知 $T^*(g)\in E^*$. 又由本节定理 1 可知 $\|(T^*)^*\|\leqslant\|T^*\|$, 从而不难导出 $\|T(x)\|=\|T^{**}(\tilde{x})\|\leqslant\|T^{**}\|\cdot\|x\|$,即得到 $\|T\|\leqslant\|T^{**}\|\leqslant\|T^*\|$,再用一次定理 1 即可.

4. 仅对逆算子进行证明,其它类似可得. 由于

$$\begin{aligned}\{[T^*(T^{-1})^*]f\}(x)&=\{T^*[(T^{-1})^*f]\}(x)=[(T^{-1})^*f][T(x)]\\&=f\{T^{-1}[T(x)]\}=f\{[T^{-1}T](x)\}=f(x),\quad\forall x\in E,\ f\in E^*.\end{aligned}$$

由此导得 $T^*(T^{-1})^*=C^*$ (E^* 上的"单位"算子), 类似地可证明 $(T^{-1})^*T^*=C_1^*$ (E_1^* 上的"单位"算子),从而得到 $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$.

5. 注意 $|[(T_n^*-T_0^*)g](x)|=|g(T_n(x))-g(T_0(x))|\leqslant\|T_n-T_0\|\|g\|\|x\|$, $\forall x\in E$, $g\in E_1^*$.

6. "$\Leftarrow$" 其是显然的;"$\Rightarrow$" 取基底 $z_k(1\leqslant k\leqslant n)$,由 § 1.1 中有限维空间特性,可知 $T(x)=\sum_{k=1}^{n} g_k(T(x))z_k$, $g_k\in E_1^*(k=1,2,\cdots,n)$. 由此得

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n}(T^*g_k)(x)z_k;$$

注意到 E_1^* 亦有限维,故易知 $T^*(g_k)\in E^*$.

7. 首先,由 $\mathscr{D}(T)$ 稠于 L^2 知 T^* 存在. 如果 $g\in\mathscr{D}(T^*)$ 则由 $T^*(g)=f\in(L^2)^*=L^2$,必有 $f(x)=[T^*(g)](x)=g(T(x))$,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot x(t)g(t)dt,\quad \forall x(t)\in\mathscr{D}(T).$$

故当取 $x(t)$ 为区间 $[\alpha,s]$ 上的特征函数,并取导数时,则可得到 $f(s)=sg(s)$(慨) $s\in(-\infty,\infty)$. 即导出 $T^*(g)=tg(t)$. 至于 $\mathscr{D}(T^*)$ 显然等于 $\mathscr{D}(T)$,从而知

$$T=T^*.$$

8. 类似上面的分析我们可得

$$\int_0^1 x(t)f(t)dt=\int_0^1\frac{1}{i}x'(t)g(t)dt,\quad \forall x(t)\in\mathscr{D}(T).$$

特别,取空间中一元 $y_0(t)$,使 $\int_0^1 y_0(t)dt=0$,并取 $x(t)=x_0(t)=i\int_0^t y_0(s)ds$,那么,$k_0(0)=x_0(1)=0$,且上式变为 $\int_0^1 x_0(t)f(t)dt=\int_0^1 y_0(t)g(t)dt$. 再令

$$h(t)=i\int_0^t f(s)ds,$$

由

$$\int_0^1[x_0(t)f(t)-y_0(t)h(t)]dt=\frac{1}{i}\int_0^1[x_0(t)h'(t)-x_0'(t)h(t)]dt$$

$$=\frac{1}{i}x(t)h(t)\Big|_0^1=0,$$

可得 $\int_0^1 y_0(t)[g(t)-h(t)]dt=0$,最后由上述 $y_0(t)$ 的任意性则可导出

$$g(t)=\alpha+i\int_0^t f(s)ds,$$

即 $T^*(g)=\frac{1}{i}g'(t)$, $\forall g\in\mathscr{D}(T^*)$(形式上与T相同),然而注意 $\mathscr{D}(T^*)$ 由任意 $g(t)\in\mathscr{D}(T^*)$ 必须且只须有

$$\int_0^1 x(t)\frac{1}{i}g'(t)dt=\int_0^1\frac{1}{i}x'(t)g(t)dt,\quad \forall x\in\mathscr{D}(T)$$

因而由分部积分法可得 $x(1)g(1)-x(0)g(0)=0$. 特别令 $x(t)=\alpha t+\beta$ 则可推出 $g(0)=g(1)=0$,因而 $\mathscr{D}(T^*)=\{x(t)\mid x(0)=x(1)=0,\ x\in\mathscr{D}(T)\}\subsetneqq\mathscr{D}(T)$.

§ 3.1

1. 在 $x_1\in E\ E_0$,做 $f_1(y+2x_1)=f_0(y)+\alpha$, $\forall y\in E_0$, $\alpha\in\boldsymbol{K}$,用 Zorn 引理即可.

2. "⇒" 取 $E_1 = E_0$，P_0 为 E_0 上的"么算子"，保范延拓于 E 上的算子 P 即为所求．"⇐" T_0P 即 T_0 在 E 上之保范延拓算子．

3. "⇒" 由 E 自反，有自然映象 $\tilde{x} = \varphi(x)$，$\forall x \in E$，使得 $\varphi(E) = E^{**}$．对任意 $\tilde{f}_0 \in E^{***}$，在 E 中定义泛函 $f_0(x) = \tilde{f}_0(\tilde{x})$，$\forall x \in E$．由此不难导出 $\tilde{f}_0(\tilde{x}) = \tilde{x}(f_0)$，$\forall \tilde{x} \in E^{**}$，从而得出 E^* 的自反性．"⇐" 仍用 $\varphi: E \to E^{**}$，仅需证明 $\varphi(E) = E^{**}$，由 Hahn-Banach 定理可知，此仅需证明：对任意 $\tilde{f}_0 \in E^{***}$，如果有 $\tilde{f}_0[\varphi(x)] \equiv 0 (x \in E)$，则有 $\tilde{f}_0 = 0$．但注意到 E^* 的自反性，故此时不难得到 $f_0(x) \equiv 0 (x \in E)$，从而有 $f_0 = 0$，故知 $\|\tilde{f}_0\| = \|f_0\| = 0$．

4. 当 n、m 奇偶性相同时，由于（不妨设 $n<m$）$E^{n*} \subset E^{(n+2)*} \subset \cdots \subset E^{m*}$．故当在"自然映象"下 $E^{n*} = E^{m*}$ 时，我们可导出在"自然映象"下有 $E^{n*} = E^{(n+2)*}$，即 E^{n*} 为自反，从而由题 3 可以导出 E 为自反．故矛盾．而当 n、m 奇偶性不同时，我们设 $m = n + 2k + 1$，即有 $E^{(n+2k+1)*} = E^{n*}$，那么，由假设我们有（在等价意义下）

$$E^{(n+2k+1)*} = E^{n*},$$

从而注意到上面包含的关系式，有 $E^{(n+2k+1)*} \subset E^{(n+2k)*}$，由 Hahn-Banach 定理，有 $E^{(n+2k+2)*} \subset E^{(n+2k)*}$，从而得到 $E^{(n+2k)*} = E^{(n+2k+2)*}$，与假设矛盾．

5. (ii) 注意 Hahn-Banach 定理．

6. 在 $E_0 = \{\alpha x_0 | \alpha \in k\}$ 上，定义 $f_0(\alpha x_0) = B_0 \alpha \|x_0\|$．用 Hahn-Banach 定理即得结论．

§ 3.2

2. 为证明 4)，注意 $(\alpha + \beta)\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}y\right) = \alpha x + \beta y$ 及

$$-V = \{-x | x \in V\}$$

即可．

3. (i) 反之，如果有数 λ_0，使得 $\|\lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0)x_2\| < 1$，则注意此点 $\lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0)x_2$ 在 x_1 与 x_2 联线的外部，从而由中间一点表为两端之凸组合易得出此中间点（x_1 或 x_2）与范数小于 1 的矛盾结果．(ii) 当 $\alpha + \beta \neq 0$ 时，令 $\lambda = \alpha + \beta$，注意

$$\|\alpha x_1 + \beta x_2\| = |\lambda| \left\| \frac{\alpha}{\lambda}x_1 + \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)x_2 \right\|$$

即可．

4. 在证明推理 1 时应注意，当 $x \in V \backslash \mathring{V}$ 时直接利用定理 3 的结论；当 $y \in \bar{V} \backslash V$ 时，由有 $x_n \to y (n \to \infty)$，$x_n \in V (n = 1, 2, \cdots)$，用上所得结论另做一元列 $x_n^0 \in \mathring{V}$，使

$$\|x_n - x_n^0\| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

即可．

5. (i) 注意定理 6 证明中的式 3，4 与 (5) 可得到

$$\frac{c(x_1) - c(x_1 - nx)}{n} \leqslant \frac{c(x_1) - c(x_1 - mx)}{m} \leqslant \frac{c(x_1 + mx) - c(x_1)}{m}$$

$$\leqslant \frac{c(x_1 + nx) - c(x_1)}{n},$$

因而代 $x_1=x_0$, $x=\frac{y}{n}$ 时,不难看出 $\frac{c(x_0+ry)-c(x_0)}{r}$ 当 $r\to 0+$时是不增有下界的,因而可得结论. (ii) 由凸性可得

$$f(x)-f(x-y)\leqslant\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}\leqslant f(x+y)-f(x)\quad(0<\lambda<1).$$

由前一不等式可知 $\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$ 对 λ 有下界, 由后一不等式可得, 对任意 $0<\theta<1$ 有 $\frac{f(x+\theta\lambda y)-f(x)}{\theta\lambda}\leqslant\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$, 从而知 $\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$ 当 $\lambda\to 0+$时不增,因而可得结论.

6. (i) 注意 $x_0=\frac{\lambda_0-\lambda}{1-\lambda}y_1+\frac{1-\lambda_0}{1-\lambda}y_2$ 及 $c(x)$ 凸性. (ii) 注意

$$x=\frac{\lambda}{\lambda_0}x_0+\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0}y_2.$$

(iii) 注意 (ii) 两边乘以 λ_0 后加以 $(\lambda_0-\lambda)[c(y_2)-c(x_0)]$ 即可.

7. 与习题 5 的 (iii) 类似,注意 $x_0=\frac{\lambda_0}{\lambda}x+\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}y_2$ 即可.

8. 由 $x_0\in\mathring{V}$, 故有球 $S(x_0,\delta_0)\subset\mathring{V}$, 此 δ_0 即为所求. 用归谬法证明(否则, 或有 $y_1\in S(x_0,\delta_0)\subset\mathring{V}$, 或有 $y_2\in S(x_0,\delta_0)\subset\mathring{V}$, 矛盾).

9. 由习题 5, 6, 7,当设 $c(x)$ 在"边界"值的一个上界为 β_0 时,我们有

$$\frac{|\lambda_0-\lambda|}{1-\frac{\delta_0}{d}}[c(x_0)-\beta_0]\leqslant c(x)-c(x_0)\leqslant\frac{|\lambda-\lambda_0|}{\frac{\delta_0}{d}}[\beta_0-c(x_0)].$$

再注意到对点 $x_0=\lambda_0y_1+(1-\lambda_0)y_2$, $x=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$, 当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时,有

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{\delta}{\|y_1-y_2\|}<\frac{\delta}{2\delta_0},$$

因而不难导出结论.

10. 反之,由存在一开球 $S(\theta,r)\subset V$,当设 $\frac{1}{n}<r$ 时, $\forall x_0\in S[0,1]$,我们令

$$x_k(t)=\begin{cases}nx_0(t), & \text{当 } \frac{k-1}{n}\leqslant t<\frac{k}{n} \text{ 时};\\ \theta, & \text{当 } t\in[0,1] \text{ 其它值时 } (k=1,2,\cdots,n),\end{cases}$$

则有 $\|x_k\|\leqslant\frac{1}{n}<r$. 从而知 $x_k\in S(\theta,r)\subset V(k=1,2,\cdots,n)$ 及

$$x=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}\in V,$$

也即导出凸集 V 与全空间 $S[0,1]$ 重合,此显然与 V 的作法矛盾.

§ 3.3

3. 其充分性可用归谬法证明.

4．只要由 Ascoli-Maznr 定理证明点 $x_0 \notin \overline{\text{cor } M}$ 时，必有

$$x_0 \notin \bigcap_{f \in E^*} \{x \mid f(x) \leqslant \sup_{y \in M} f(y),\ x \in E\}.$$

6．当 $\mathscr{F} = E^*$ 显然；如果 $\mathscr{F} \subseteqq E^*$，则必有 $f_0 \notin \mathscr{F}$，使 $d(f_0, \mathscr{F}) > 0$. 由分离性定理及 E 的自反性不难导出结论.

7．例如 $\mathscr{F}$ 取为 $L^2[a, b]$ 内多项式的全体.

8．反之，$f_1 \notin \mathscr{F}$，由正则闭定义可导出一元 $\bar{x}$，使得 $\bar{x} \in M_0$，但 $\bar{x} \notin H_1$. 故矛盾.

§ 3.4

2．只要在定理 2 中将条件 $f_1(y) = 0,\ y \in E_0$ 换为 $f_1(y) = f_1(x_0),\ y \in M$（其中线性簇为 $M = E_0 + x_0$).

7．注意本节定理 6 (Helly 定理).

§ 3.5

2．当证明前半部时，注意对于集 $M = \{x \mid \|x\| \leqslant \beta,\ x \in E\}$ 内任一元列 $\{x_n\}$，考虑 $x'_n = \dfrac{x_n}{\beta}\ (n = 1, 2, \cdots)$. 当证明后半部时，注意对任意非零元列 $\{x_n\} \subset \bar{S}(\theta, 1)$，必有 $x_0 + \dfrac{\delta_0 x_n}{\|x_n\|} \in \bar{S}(x_0, \delta_0)$ 从而不难导出 $\bar{S}(\theta, 1)$ 也是弱列紧的.

3．注意 $E^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bar{S}^*(\theta, n)$.

4．注意定理 3 的必要性及范数 $\|f\|$ 的定义.

5．当令 $y_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ 1, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$ 时，易见

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t) dg(t) = \int_0^1 y_0(t) dg(t), \quad \forall g(t) \in C^*[0,1].$$

然而由上 $y_0(t) \notin C[0, 1]$，故知 $\forall x(t) \in C[0, 1]$，$\exists t_0 \neq \dfrac{1}{2}$，使得 $x(t_0) \neq y(t_0)$. 特别，当取 $b_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < t_0; \\ 1, & t_0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$ 时易见 $b_0 \in C^*[0,1]$，且知 $\forall \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，不难验证

$$\int_0^1 x_{n_k}(t) db_0(t) \to y_0(t_0) \neq x(t_0) = \int_0^1 x(t) db_0(t) \quad (k \to \infty).$$

6．注意此处假设以及本节的 Pettis 定理.

§ 3.6

2．注意一致凸定义，用归谬法证明.

4. 先考虑函数 $f(\lambda)=\|x-\lambda y\|-(1-\lambda)\|y\|$ (当 $\|x\|<\|y\|$ 时)或

$$f(c)=\|y-cx\|-(1-c)\|x\| \quad (\text{当 } \|y\|<\|x\| \text{ 时}),$$

从而得到提示的关系．然后做

$$x_0=(x-cy)/(1-c)\|y\|, \quad y_0=(1-c)y/(1-c)\|y\|,$$

因此，利用上面习题 2 的结果，对 x_0、y_0 计算 $\|x_0-y_0\|$ 与 $\|x_0+y_0\|$.

6. 利用习题 3，然后将

$$\left\|\frac{x_k}{\|x_k\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\leqslant 2(1-\delta(\alpha_k))\left(k=1,2,\cdots,n, \quad y=\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$$

"通分"后加起来整理即可．

7. 利用习题 6 结果整理易得本题结论．

8. (i) 对 φ 用微分法．

(ii) 不妨设 $|\eta_1|<|\eta_2|$，用 $|\eta_2|^q$ 除两端得形如

$$|1+\xi|^q+|1-\xi|^q\leqslant 2(1+|\xi|^p)^{q-1}$$

的不等式，由 (i) 只考虑 $\xi=\rho e^{i\varphi}$, $0<\rho<1$, $\varphi=0$ 的情形，做变换

$$\xi=\frac{1-\rho_1}{1+\rho_1} \quad (0<\rho_1<1),$$

视不等式 $\dfrac{1}{2}[(1+\rho_1)^p+(1-\rho_1)^p]-(1+\rho_1^q)^{p-1}\geqslant 0$ 是否成立．由不等式确是成立的，从 Taylor 展开可知，其左端为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}\rho_1^{2k}\left[\frac{1-\rho_1^{2k-p/p-1}}{(2k-p)/(p-1)}-\frac{1-\rho_1^{2k/p-1}}{2k/(p-1)}\right],$$

最后利用微分法可证得 $(1-\rho_1^t)/t$ $(t>0,\ 0<\rho_1<1)$ 是 t 的减函数，从而得出该式大于零．

(iii) 不妨设 $0<\alpha\leqslant\beta$. 用 β^p 除不等式两端可得 $2(\rho^q+1)^{p-1}\leqslant 2^{p-1}(\rho^p+1)$ $(0\leqslant\rho\leqslant 1)$. 令 $H(\rho)=2^{p-2/p}\dfrac{(\rho^p+1)^{1/p}}{(\rho^q+1)^{1/q}}$，注意用微分法验明 $H(\rho)$ 在 $\rho=1$ 取到最小值 $H(1)=1$.

(iv) 对于空间 (l^p) 利用上面的 (ii) 和 (iii) 的两不等式，取极限则得．至于空间 $L^p[0,1]$ 可先由等分 $[0,1]$ 做的梯形函数类似地有上面不等式，而由梯形函数稠于 $L^p[0,1]$ 空间，且范数连续，从而可得出结论．

(v) 设 $r_k=\lambda\alpha_k+(1-\lambda)\beta_k(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，做 $f(\lambda)=\left(\sum_{k=1}^{n}r_k^s\right)^{1/s}$，利用 Canchy 不等式证明 $f''(\lambda)$ 与 $s-1$ 的符号相同以及凸凹关系便可得结论．

(vi) 对于空间 (l^p)，可在上面的 (v) 中设 $s=p/q$, $\alpha_k=|\xi_k+\eta_k|^q$, $\beta_k=|\xi_k-\eta_k|^q$，再利用 (ii) 的不等式，然后取极限而得．至于空间 $L^p[0,1]$ 可类似于 (iv) 的做法．

§ 4.1

2. (i) 注意 $p(\theta)\leqslant 2kp(x)$, $\forall x\in E$，并对 $p(x)=p(x-\theta)$, $p(-y)=p(\theta-y)$

用假设条件，整理则得 $p(x)$ 为“$k^2(2k+1)$-拟次加”泛函. (ii) 由 (i) 知

$$p(-y) \leqslant k(2k+1)p(y), \quad \forall y \in E.$$

3. (i) 注意 $p(\theta) = p(2\theta)$. (ii) 先验 $p(\theta) \leqslant 0$, 后注意 $p(x) = p(x+\theta)$. (iii) 注意 $p(x) = p(x+\theta)$.

4. (iii) 注意 $\ln u$ 当 $u > 0$ 时是单增的. 以及

$$f(x_1 + x_2) + (1+\alpha) \leqslant [f(x_1) + (1+\alpha)][f(x_2) + (1+\alpha)].$$

6. 由上半连续的定义及本节定理 2 可得出结论.

7. 由上半连续的定义及本节引理便可得结论.

8. 由上半连续的定义直接用习题 6 可导出结论.

9. 次加正齐性易得,下半连续的结论类似数学分析方法可得. 或证 $\{x \mid p(x) \leqslant \alpha\}$ $(\forall \alpha \in R)$ 均为闭集.

§ 4.2

6. 注意对次加正齐性泛函列 $\{p_{n,(m)}(x) = \|T_{m,n}(x)\|\}$,用共鸣定理,然后设其使 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|p_{n,(m)}(x)| < \infty$ 的第一纲集为 $A_{(m)}$. 令 $Q = E \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{(m)}$, 即为所求.

7. 可举反例: $\{T_n\}$, $(l^1) \to E_0$ (其内有限个坐标非零的元的全体)

$$T_n(x) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots), \quad \forall x = \{\xi_k\} \in (l^1).$$

9. 上半段可由归谬法(注意元列弱列紧假设)及习题 8 的结果推得其矛盾. 其后半段可由回忆 § 2.5 结果而得到.

§ 4.3

1. 注意矩阵 $(\alpha_{ij})$$\Big($其中, $\alpha_{ij} = \dfrac{y_j - y_{j-1}}{y_i}$, 当 $j = 1, 2, \cdots, i$ 时,(令, $y_0 = 0$); $\alpha_{ij} = 0$, 当 $j \geqslant i+1$ 时$\Big)$是一保存矩阵.

2. 由 $\{\xi_n\}$ 有收敛子列 $\{\xi_{n_i}\}$,而此时对应的 $\{\eta_i\}$ 为矩阵 (α_{ij})(其中, $\alpha_{ij} = 0$, 当 $j \leqslant i$ 时; $\alpha_{ij} = \alpha_{j-i}$,当 $j > i$ 时)作用 $\{\xi_{n_i}\}$ 而得,且 (α_{ij}) 是保存的.

3. 注意对泛函列 $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k, \forall x = \{\xi_k\} \in (c) (n = 1, 2, \cdots)$. 使用共鸣定理.

4. 注意取 $b_n(t) = b(t)$,当 $|b(t)| \leqslant n$ 时; $b_n(t) = n$,当 $b(t) > n$ 时; $b_n(t) = -n$, 当 $b(t) < -n$ 时. 并做泛函列 $f_n(x) = \int_0^1 b_n(t)x(t)dt$, 以及注意由控制收敛定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int_0^1 b(t)x(t)dt$, $\forall x \in L^2[0, 1]$.

5. 由假设可知 $\forall \{\varepsilon_k\} \subset C$, $|\varepsilon_k| = 1 (k = 1, 2, \cdots)$ 亦有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f(x_k)$ 收敛.

由此知 E^* 上的泛函族 $F_{n,\varepsilon}(f)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f(x_k)=f\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\right)$均为有界线性泛函所组成，然后由共鸣定理及当令 $\varepsilon_k^0=\overline{f(x_k)}/|f(x_k)|$ 时有 $\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^0 f(x_k)$，从而不难导出结论.

6. 与习题 5 类似，由共鸣定理及

$$\sum_{k=1}^{n}|F(f_k)|=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^0\cdot F(f_k)=F\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^0 f_k\right)$$

(其中，$|\varepsilon_k^0|=1$) 则不难导出结论.

7. 注意 G_T^* 为 Banach 空间，用归谬法，如有 $\|x_n\|=1$，$\|T(x_n)\|\to\infty(n\to\infty)$. 在 G_T^* 上定义一列泛函 $F_n(g)=g[T(x_n)]$，$\forall g\in G_T^*\subset\mathscr{D}(T^*)$. 然后用共鸣定理导出 $\|T(x_n)\|=\|F_n\|<\beta(n=1,2,\cdots)$. 矛盾.

§ 4.5

1. 注意元列 $e_n=(0,\cdots,0,\underset{(n)}{1},0,\cdots)(n=1,2,\cdots)$ 具有性质

$$\overline{[\{e_n\}]}=(l^1)=(c)^* \text{ 和 } \overline{[\{e_n\}]}=(l^q)=(l^p)^* \quad (p>1)$$

即可.

2. 注意元族 $e_s(t)=1$，当 $a\leqslant t\leqslant s$；$e_s(t)=0$，当 $s<t\leqslant b\ (a\leqslant s\leqslant b)$，且具有性质 $\overline{[\{e_s|a\leqslant s\leqslant b\}]}=L^q[a,b]=(L^p[a,b])^*(p>1)$.

3. 注意本节的定理 4.

4. 反之，如果 $g(t)$ 在其 $(0,1)$ 内某一连续点 t_0，则有 $g(t_0)\neq 0$. 不妨设 $g(t_0)>0$，从而必在一区间 $(t_0-2\delta,t_0+2\delta)\subset(0,1)$ 上均有 $g(t)>0$. 我们做多项式 $p(t)=1+4\delta^2-(t-t_0)^2$ 使其满足 $p(t)\geqslant 1+3\delta^2$，当 $|t-t_0|<\delta$ 时；$p(t)\geqslant 1$，当 $|t-t_0|<2\delta$ 时；$0\leqslant p(t)\leqslant 1$，当 t 为 $(0,1)$ 上其它值时(选 δ 足够小使得上式成立). 从而由下面估计式

$$0=\int_0^1 p^n(t)dg(t)\geqslant-\int_0^{t_0-2\delta}|g(t)|dt+\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}-\int_{t_0+2\delta}^1|g(t)|dt$$

$$\geqslant(1+3\delta^2)^n\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}g(t)dt-\int_0^{t_0-2\delta}|g(t)|dt-\int_{t_0+2\delta}^1|g(t)|dt,$$

从而导出 $\int_0^1|g(t)|dt\geqslant(1+3\delta^2)^n\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}g(t)dt$，因而当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_0^1|g(t)|dt=\infty$$

与 $g(t)$ 为囿变函数矛盾.

5. 注意 T^* 此时亦有界线性算子，且有 $T^*(g)\in E^*$，$\forall g\in E_T^*$.

6. 类似本节定理 10，用归谬法证明.

7. 首先注意 $(l^1)^* = (m)$，此时必可导出 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 元的各坐标 $\xi_k^{(n)}$ 必收敛于一数 $\xi_k^{(0)}(k=1, 2, \cdots)$. 然后由共鸣定理知 $\|x_n\| \leqslant \beta (n=1, 2, \cdots)$. 因而可以导出元 $x_0 = \{\xi_k^{(0)}\} \in (l^1)$，最后由 $\{x_n\}$ 的假设及其坐标收敛，不难由把 $f(x_n)$ 分为两部分然后分别估计值的办法证明出本题所需的结论.

§ 4.6

2. 推理 1 可由本节定理 2 的证明中得出：推理 2 则可由元

$$\frac{3}{2} x_0 \in S(x_0, \delta_0) \cap S(2x_0, \delta)$$

及推理 1 导出；推理 3 则可直接由推理 1 导出.

3、4. 类似本节定理 4 前的引理的证明，用归谬法及泛函的拟次加法不难导出结论.

6. (i) 可举例为$\mathfrak{S} = (0, \infty)$, $p(x) = -\infty$, x 为有理数时；泛函 $p(x) = +\infty$, x 为无理数时. (ii) 可举例为 (l^1) 空间内的半模：$\mathfrak{S} = \{\{\xi_i\} | \xi_i \geqslant 0, i=1, 2, \cdots, \{\xi_i\} \in (l^1)\}$. 拟次加泛函 $p(x) = -\infty$，当 $x = \{\xi_i\}$ 中坐标均为正有理数时；$p(x) = \|x\|$，当 $x = \{\xi_i\}$ 中坐标至少有一个为 0，其它均为正有理数时；$p(x) = +\infty$，当 $x = \{\xi_i\}$ 的(非负)坐标中至少有一为无理数时.

7. 注意到下极限及泛函拟次加的性质，可找出一元列 $\{x_n\} \subset \mathfrak{S}$，使得

$$x_n \to \theta (n \to \infty); \quad \lambda \leqslant p(x_n) < \lambda + \frac{1}{n} (n = 1, 2, \cdots).$$

从而有 $\lambda \leqslant p(2x_n) \leqslant 2k p(x_n) < 2k \left(\lambda + \frac{1}{n}\right) (n=1, 2, \cdots)$.

8. (ii) 由元 $y \in \mathring{P}$，必有一球 $\bar{S}(y, \delta_0) \subset P$. 故 $\forall x \neq \theta$ ($x=\theta$ 显然)，由元

$$\left\| \frac{\delta_0 x}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0,$$

知元 $y \pm \frac{\delta_0 x}{2\|x\|} \in S(y, \delta_0) \subset \mathring{P}$，从而由 (i) 知 $\frac{\|x\|}{\delta_0} y \pm \frac{x}{2} \in \mathring{P}$，令

$$u = \frac{\|x\|}{\delta_0} y + \frac{x}{2}, \quad v = \frac{\|x\|}{\delta_0} y - \frac{x}{2}$$

即可.

10. 注意 G_1^* 是实心线性半群. 因为次加泛函 $p_0(x) = \|x\| + \alpha (\alpha > 0)$ 有 $p_0 \in G_1^*$. 并且在 B_1^* 范数下，当对任意泛函 $p \in B_1^*$，只要有 $\|p - p_0\| < \frac{\alpha}{3}$ 时，则有

$$p(x) > p_0(x) - \frac{\alpha}{3} \text{ 及 } p(x+y) \leqslant p_0(x+y) + \frac{\alpha}{3}.$$

从而不难验证有 $p \in G_1^*$. 因此知 p_0 为 G_1^* 的一个内点. 这样一来，直接利用上面习题 8 的结果可得本题结论.

§ 5.2

2. 以 T_0^* 表示定义在 G_1^* 上的共轭算子 T^*，注意 T_0^* 是闭算子且

$$\|T(x)\| = \sup\{|g[T(x)]| \mid \|g\| \leqslant 1,\ g \in G_l^*\}.$$

3．定义积空间 $E_1 = \{y = \{y_l | l \in I\} | \sup_l \|y_l\| < \infty,\ y_l \in E_l l \in I\}$. 其内范数为 $\|y\| = \sup_l \|y_l\|$，则 E_1 亦为 (B) 空间．再定义从 E 中第二纲线性子空间 $\mathscr{D}(T)$ 到 (B) 空间 E_1 内的线性算子 $x \xrightarrow{T} \{T_l(x) | l \in I\}$; $\forall x \in \mathscr{D}(T)$. 可验证 T 为闭算子．最后，由闭图象定理不难导出结论．

4．设在范"$\|\cdot\|_1$"定义下构成的(B)空间为 E_1，在"$\|\cdot\|_2$"定义下的为 E_2，对 E_2 到 E_1 上的"么算子"应用本节的推理 3，最后由前面 § 1.5 习题 2 的结果可以完成证明．

5．做积空间 $E_1 \times E_2$，定义算子 C'：$(x_1, x_2) \xrightarrow{C'} x_1 + x_2$，$\forall x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$. 易验 C' 为从 $E_1 \times E_2$ 到 E 上的 1-1 对应有界线性算子，从而由本节的推理 3 可以得出这里的结论．

§ 5.3

1．在证明范数收敛导出坐标收敛时需注意，当 $\|x_n - x_0\|_* \to 0$ 时有 $\|x_n - x_0\|_i \to 0 (i = 1, 2, \cdots)$. 由 $\|\cdot\|_i$ 的定义，对元 $x_n - x_0$ 考虑其第 m 个坐标 $\xi_m^{(n)} - \xi_m^{(0)}$. 首先当 m 固定时 $\{\alpha_{im} | i = 1, 2, \cdots\}$ 中至少有一 $\alpha_{i_0 m} \neq 0$（否则与方程组解的唯一性矛盾）．这样一来，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n \geqslant N$ 时有 $\|x_n - x_0\|_i < \frac{\varepsilon}{2} |\alpha_{i_0, m}|$，于是则可导出 $|\alpha_{i_0 m}(\xi_m^{(n)} - \xi_m^{(0)})| \leqslant 2\|x_n - x_0\|_i < \varepsilon |\alpha_{i_0 m}|$，即当 $n \geqslant N$ 时，有 $|\xi_m^{(n)} - \xi_m^{(0)}| < \varepsilon$. 在证明 E_1 按范"$\|\cdot\|$"$_*$ 完备时，只要注意上面已得的性质即可．

2．注意考虑从 E 到 (c) 内的线性算子 T：$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots)$，$\forall x \in E$. 容易验证其为闭算子，从而 T 为连续线性算子，因此由 (c) 空间收敛的定义可导出本题所求的结论．

§ 5.4

1．注意本节定理 1 中的条件 (ii) 以及关于范数等价的性质（见 § 1.5 习题 2）．

2．由推理 1 可得到 $\forall k$，有 $\|\xi_k e_k\| \leqslant 2\beta \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_k e_k + \cdots + \xi_{k+n} e_{k+n}\|$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 从而取极限可得 $|\xi_k| \|e_k\| \leqslant 2\beta \|x\|$.

3．"$\Rightarrow$" 显然可从 $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$ 取 $\{e_n\}$ 的值可以看出"$\Leftarrow$" 注意此时 $\left\{\sum_{k=1}^{n} f(e_k) f_k\right\}$ 亦为 E^* 的 Cauchy 列，故 $\sum_{k=1}^{\infty} f(e_k) f_k$ 亦在 E^* 内收敛，再从 $\{e_n\}$ 是 E 中的基，故可导出

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) f(e_k) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} f(e_k) \cdot f_k\right](x), \quad \forall x \in E.$$

4. 注意到当 $\|y\| = 1$ 时，如果 $|\lambda| \geqslant 2$，则由范的性质立即可得 $\|y + \lambda x\| \geqslant \|y\|$；如果 $|\lambda| < 2$，由引理证明可得 $\|y + \lambda x\| > (1 - \varepsilon)\|y\|$. 从而不难导出结论.

5. 注意 E 的自反性，然后分别用推理 2 的必要性及充分性.

6. 注意 $\mathscr{F} = \overline{[\{f_n\}]} = E^*$. 否则当 $f_0 \notin \mathscr{F}$, $f_0 \in E^*$ 时，由正则闭的性质可知必存在一元 $x_0 \in E$，使得 $f_0(x_0) = 1$; $f(x_0) \equiv 0 (f \in \mathscr{F})$. 从而导出

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) e_k = \theta,$$

与原结论矛盾.

§ 5.5

3. 注意 $\mathfrak{W}(T^*) = \mathscr{D}[(T^*)^{-1}]$. 由 $(T^*)^{-1}$ 连续以及 § 5.1 结果 T^* 闭，从而 $(T^*)^{-1}$ 闭，最后由 E_1^* 完备及该节的定理可得出 $\mathscr{D}((T^*)^{-1})$ 的闭性.

§ 6.1

3, 5. 注意 (l^p), $L^p[a, b] (p > 1)$ 空间中"弱收敛"的充要条件.

7. 类似"数学分析"中相应的证明方法.

§ 6.2

1. 同 $(l^p)(p>1)$ 内抽象函数弱连续充要条件的证法.

2. "$\Rightarrow$" 其是显然的. "$\Leftarrow$" $\forall \varepsilon > 0$，在得到满足条件 (ii)（其中 ε 换为 $\varepsilon/2$）的 N_0, δ_0 以后，对前 N_0 项，取相应的 δ_1，使 $0 < |\delta| < \delta_1$，就恒有

$$\left|\frac{x_n(t_0 + \delta) - x_n(t_0)}{\delta} - x'_n(t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2N_0} \quad (n = 1, 2, \cdots, N_0).$$

那么，当 $0 < |\delta| < \min(\delta_0, \delta_1)$ 时，如果设 $x'(t_0) = \{x'_n(t_0)\}$，则可导出

$$\left\|\frac{x(t_0 + \delta) - x(t_0)}{\delta} - x'(t_0)\right\| < \varepsilon.$$

3. 注意 $\forall b(\xi) \in M[-\pi, \pi]$, $\lim\limits_{t \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{\xi}{t} b(\xi) d\xi = 0$，有（弱）$x'(0) = \theta$. 故 $\left\|\frac{x(t) - x(0)}{t}\right\| = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{\xi}{t}\right| d\xi \not\to 0$.

4. 由于 $\dfrac{[x(t)](\xi) - [x(t_0)](\xi)}{t - t_0} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \xi \leqslant \min(t, t_0); \\ \dfrac{1}{|t - t_0|}, & \min(t, t_0) < \xi \leqslant \max(t, t_0); \\ 0, & \max(t, t_0) < \xi \leqslant 1. \end{cases}$

故知若 $x(t)$ 强可导，上必概收敛于 $L[0, 1]$ 中的元 θ. 然而

$$\int_0^1 \left| \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \right)(\xi) \right| d\xi = 1 \not\to 0 \quad (t \to t_0).$$

5．其注6中4)的(ii)，注意对元$\int_\alpha^\beta x(s)ds$ 利用§3.1关于E^*中有非零元的 Hahn-Banach 定理以及数值函数的相应中值定理.

7．首先容易证明T$[x(s)]$亦为$[\alpha,\beta]$上的强连续函数，然后在式

$$\mathrm{T}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x(s_k)(s_{k+1}-s_k)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{T}[x(s_k)](s_{k+1}-s_k)$$

两边取极限可得结论.

§6.3

2．在1)中由$f[x(s)]$连续且可测易得$x(s)$的弱可测性，至于强可测只要注意到$x(s)$在$[\alpha,\beta]$上的强一致连续性便容易证明. 3)中为证$\alpha(s)x(s)$强可测，仅注意到$\alpha(s)$也可表为可数阶梯函数列$\{\alpha_n(s)\}$的概收敛极限即可. 5)中仅注意到当$\{x_n(s)\}$，$\{y_n(s)\}$均可数阶梯函数列时，$\{x_n(s)y_n(s)\}$亦是，并且有

$$\|x_n(s)y_n(s)-x(s)y(s)\| \leqslant \|y(s)\|\|x_n(s)-x(s)\| + \|x_n(s)\|\|y_n(s)-y(s)\|.$$

3．首先不难知$x(s)$是弱可测的，此外从其单边弱连续，类似于§6.1中定理1，不难得出$x([\alpha,\beta]) \subset \overline{[\{x(r) \mid \text{有理数 } r \in [\alpha,\beta]\}]}$，也即$x[\alpha,\beta]$是取可分值的，因而由 Pettis 定理可得结论.

4．类似于实变函数论，先证明依测度收敛于$x(s)$的抽象正数列必可选出子列强收敛于$x(s)$.

5．首先由本节定理3可知$\{x_n(s)-x(s)\}$亦为强可测列，$\{\|x_n(s)-x(s)\|\}$为平常可测函数，且$\|x_n(s)-x(s)\| \leqslant \|x_n(s)\| + \|x(s)\| < \infty$（概），

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(s)-x(s)\| = 0 \text{（概）}.$$

从而由实变函数论中的 Егоров 定理可以导出本命题的结论.

6，7．类似实变函数论中的证明方法.

§6.4

1．1)、2)、3)直接由定义导出；4)可利用定理1的结论.

2．(B)可积性可由本节定理3导出；互等性(或不等式)由可数值阶梯函数过渡导出，例如3)，当设(B)可积可数值列$\{x_n^0(s)\}$有

$$\int_\Omega \|x_n^0(s)-x(s)\|\mu(ds) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

时，注意到$\int_\Omega \big|\|x_n^0(s)\| - \|x(s)\|\big|\mu(ds) \to 0$，从而由不等式

$$\left\|\int_\Omega x_n^0(s)\mu(ds)\right\| \leqslant \int_\Omega \|x_n^0(s)\|\mu(ds)$$

两边取极限而得.

3．1)注意§6.3定理3以及$\|x_n(s)\| \to \|x(s)\|$（概）$(n\to\infty)$. 不难知$x(s)$亦

(B) 可积，最后，对实函数列 $\{\|x_n - x(s)\|\}$ 用相应的收敛定理则得. 2) 用反证法证明. 当 $\mu(A_0) = \mu\{s | \|x(s)\| > \varepsilon_0\} > 0$ 时，由上节 Pettis 定理后面推理知存在 (B) 可积可数值列 $\{x_n^0(s)\}$，使存在 N，在 $n > N$ 后，一致地有 $\|x_n(s) - x(s)\| < \frac{\varepsilon_0}{4}$（概）. 即 $\|x_n^0(s)\| > \frac{3}{4}\varepsilon_0$，取定上一 $x_n^0(s)$，设其在某集 $A_{k_0}(A_{k_0} \cap A_0 \neq \varnothing)$ 取非零元 x_0，那么，一方面由 Hahn-Banach 定理可知 $\exists f_0 \in E^*$，使得 $f_0(x_0) = \|x_0\|$，$\|f_0\| = 1$，从而由假设可知 $\int_{A_0 \cap A_{k_0}} f_0[x(s)]\mu(ds) = 0$，由此得

$$\int_{A_0 \cap A_{k_0}} f_0[x_{n_0}(s) - x(s)]\mu(ds) = \int_{A_0 \cap A_{k_0}} \|x_0\|\mu(ds)$$

$$= \int_{A_0 \cap A_{k_0}} \|x_{n_0}(s)\|\mu(ds) > \frac{3\varepsilon_0}{4}\mu \quad (A_0 \cap A_{k_0});$$

但另一方面又有

$$\int_{A_0 \cap A_{k_0}} f_0[x_{n_0}(s) - x(s)]\mu(ds)$$

$$\leqslant \int_{A_0 \cap A_{k_0}} \|f_0\| \|x_{n_0}(s) - x(s)\|\mu(ds) \leqslant \frac{3\varepsilon_0}{4}\mu \quad (A_0 \cap A_{k_0}).$$

矛盾. 3) 令当 $s \in A_k$ 时，有 $x_k(s) = x(s)$；当 $s \notin A_k$ 时，$x_k(s) = \theta (k = 1, 2, \cdots)$. 且令 $y_n(s) = \sum_{k=1}^{n} x_k(s)$. 显然 $y_n(s) (n = 1, 2, \cdots)$，均 (B) 可积 $y_n(s) \to x(s) (n \to \infty)$，$\|y_n(s)\| \leqslant \|x(s)\|$. 由上面 1) 可导出

$$(B)\int_{\Omega} x(s)\mu(ds) = \lim_{n \to \infty} (B)\int_{\Omega} y_n(s)\mu(ds)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (B)\int_{\Omega} x_k(s)\mu(ds) = \sum_{k=1}^{\infty} (B)\int_{A_k} x(s)\mu(ds).$$

故导出了“完全可加性”；至于“绝对连续”性，只要注意到这里注 11 上面注 10 中的3°)，从而直接由 $\|x(s)\|(L)$-积分的绝对连续性导出.

§ 6.5

1. 用反证法. 若 $\|x(t)\|$ 在 G 内 t_0 点达到最大值，则对元 $x(t_0)$ 应用 Hahn-Banach 定理，定出一泛函 $f_0 \in E^*$，然后对数值函数 $f_0[x(t)]$ 用相应的定理结果，从而导出 $\|x(t)\| = \|x(t_0)\| (\forall t \in G)$. 故矛盾.

2. 对于数值函数 $f[x(t)]$，$f[y(t)]$ $(\forall t \in G)$ 用相应的定理结果，然后再利用 Hahn-Banach 定理则可导出.

3. (i) 注意当 $|t - t_0| < r$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| |t - t_0|^n$ 收敛. 从而由 E 可得收敛的结论；当 $|t - t_0| > r$ 时，由“通项” $\|x_n\| |t - t_0|^n \not\to 0$ 可得发散的结论. (ii) 由数值函数 $f[s(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)(t - t_0)^n (\forall f \in E^*)$ 的讨论来过渡. (iii) 不难从 (i) 的证明方法导出结论.

4. 先对数值函数 $f[x(t)]$ 用最大模定理，然后不难用"共鸣定理"导出结论.

§7.1

1. 注意数学分析中的 Leibniz 公式可知

$$\|x\cdot y\| = \sum_{m=0}^{k} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |(x\cdot y)^{(m)}(t)| = \sum_{m=0}^{k} \max\left|\sum_{i=0}^{m} c_m^i x^{(i)}(t)\, y^{(m-i)}(t)\right|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant (2^{k+1}-1)\|x\|\cdot\|y\|.$$

此外，乘法不等式不成立，可举 $x(t)=y(t)=t^2$.

2. 先证明在范数 $\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt$ 下 $L^1(-\infty,\infty)$ 亦为一 Banach 空间(类似 §1.2 的证法). 同样地在范数 $\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \max_{-\infty<t<\infty} |x^{(k)}(t)|$ 下，$C^{(k)}(-\infty,\infty)$ 亦构成一 Banach 空间，从而易得 $D_m^{(\infty)}$ 亦为 (B) 空间.

3. 仅对实值证明即可，为证明乘法的封闭性须注意函数论知识：若 $g(t)\in V[a,b]$，则 $\int_a^b f(t)dg(t)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 在 $f(t)$ 的不连续点集上，$g(t)$ 的全变差为 0. 也即在含 $f(t)$ 不连续点的区间上，$g(t)$ 的全变差之和可以任意小. 又由囿变函数的性质，我们只须对两单增函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_1(-\infty)=x_2(-\infty)=0$，证明

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)dx_2(\tau)$$

除可列点外亦有意义且亦单增函数并可适当改变其可列值使其为右连续即可. 并验证 $\bigvee_{-\infty}^{\infty}(x_1\cdot x_2)(t) \leqslant \bigvee_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cdot \bigvee_{-\infty}^{\infty} x_2(t)$. 即 $\|x_1\cdot x_2\|\leqslant\|x_1\|\cdot\|x_2\|$. 关于乘法的结合律我们可用"$R.$-$S.$"积分的定义以及证明乘法不等式的方法(注意所涉及的二重级数的和是绝对收敛的，故可交换级数和号次序). 从而得出结论.

§7.2

1. 注意上节习题 2，在 $C^k[0,1]$ 中改赋范为 $\|x\|_1 = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(m)}(t)|$ 时即可.

2. 注意本节定理 1，2.

§7.3

4. (i) 注意当 $\|x_n - x\|\leqslant \frac{1}{2\beta}$ 时，有 $\|x_n^{-1}x - e\|\leqslant\frac{1}{2}$，然后利用本节定理 1 及注 1 易得结论. (ii) 注意 $\|x^{-1}(x+y)-e\|$ 及定理 1.

5. 由习题 4，可知，$B^{-1}\in\mathfrak{C}(E)$；又由 $B^{-1}=A^{-1}(BA^{-1})^{-1}$，从而对$(BA^{-1})$应用本节定理 1 可得 $B^{-1} = A^{-1}\left[I + \sum_{k=1}^{\infty}(I - BA^{-1})^k\right] = A^{-1}\left[I + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\triangle A)A^{-1}\right]$,

由此由范数的三角不等式及乘法不等式易得结论.

6. 类似地证明：(i) 当 $x \notin I(t_0) = \{x(t) | x(t_0) = 0, x \in A\}$ 时，对任意 $y \in A$，有 $y(t) - \frac{y(t_0)}{x(t_0)} x(t) \in I(t_0)$；(ii) 不妨设 $t_0 = 0$，注意对任意 $x \notin I(0)$，有 $x - x(0)$，$e \in I(0)$，因而 x 与 $I(0)$ 所张线性集含有主单元；(iii) 与证明 (ii) 的方法类似.

7. 注意全连续算子的性质（§ 22）以及此时 E 的单位球不列紧，且"么算子" $C \notin I$.

§ 7.4

1. 注意定理 2 的结果：

$$R(\lambda; a) = R(\lambda_0; a)\left\{e + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R(\lambda_0; a)]^n\right\}.$$

2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n\|^{1/n} > 0$ 时由推理 3 直接可知 $\sigma(a) \neq \varnothing$；而当

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\|^{1/n} = 0$$

时，则 $\sigma(a) = \{\theta\} \neq \varnothing$.

3. 注意恒等式 $(\lambda e - x)[R(\lambda; x) - R(\lambda; y)](\lambda e - y) = x - y$.

4. 注意 $\|a^{kn}\|^{1/n} \leqslant (\|a^n\|^{1/n})^k$.

5. 为证明 $L^1[0, 1]$ 是 Banach 代数，注意从二元可测函数的 Fubini 定理可得

$$\int_0^1 \left|\int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau\right| dt \leqslant \int_0^1 dt \int_0^t |x(t-\tau)||y(\tau)|d\tau$$
$$= \int_0^1 |y(\tau)|d\tau \int_0^{1-\tau} |x(t)|dt \leqslant \int_0^1 |y(\tau)|d\tau \int_0^1 |x(t)|dt.$$

同样有

$$\int_0^t z(\tau)d\tau \int_0^{t-\tau} x(t-\tau-s)\, y(s)ds = \int_0^t z(\tau)d\tau \int_\tau^t x(t-\rho)y(\rho-\tau)d\rho$$
$$= \int_0^t x(t-\rho)d\rho \int_0^\rho y(\rho-\tau)z(\tau)d\tau.$$

至于后半段命题只要注意到当取 $T = t$ 时，有

$$T^{(2)} = \int_0^t (t-\tau)\tau d\tau = \frac{t^3}{3!}, \cdots, T^{(n)} = \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

便知 $\|T^{(n)}\|^{1/n} \to 0 (n \to \infty)$. 即 t 为 $L^1_*[0, 1]$ 的广义幂零元，类似地可证得其它结果.

6. 首先，注意 § 7.3 习题 (i) 可知，如果 $x^0 \neq \theta$ 为 $\mathfrak{U}$ 的特异元，且有 $\mathfrak{U}$ 的一正则元列 $\{x_n\} \subset G(\mathfrak{U})$，使得 $x_n \to x^0 (n \to \infty)$，那么，$\{\|x_n^{-1}\|\}$ 无界. 从而可取其一子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\|x_{n_k}\| = \|x_{n_k}^{-1}\|^{-1} \to 0 (k \to \infty)$，但此又与 $x \neq \theta$ 矛盾. 故我们知 $\mathfrak{U}$ 的非零特异元的全体 $S(\mathfrak{U})$ 亦为一开集. 此即有 $\mathfrak{U} \backslash \{\theta\} = G \cup S$. 然而当 $\mathfrak{U}$ 非一维时(此时本题结论已得)，由 $\mathfrak{U} \backslash \{\theta\}$ 是连通集，因此其不可能为两不交开集之并，矛盾. 因而 $\mathfrak{U}$ 无非 θ 的特异元，且由本节定理 3 后的推理 1 可得本题结论.

§ 7.5

1. 注意此时"根基"="广义幂零元"集.

2. 易见 $L^1[0,1]$ 为可易 (B)-代数，注意 § 7.4 习题5以及多项式全体稠于 $L^1[0,1]$.

3. 注意习题 2 的结果，从而可知对任意 $\lambda \neq 0$ 及 $a \in L^1[0,1]$，$(\lambda e - a)^{-1}$ 均存在.

4. "$\Leftarrow$"其是显然的；"$\Longrightarrow$"由 I_0 定义泛函 $f_{I_0}(x) = x(I_0)$，$\forall x \in \mathfrak{U}$，则 $f_{I_0}(x)$ 为有界线性乘法的. 又不难验证（注意多项式全体稠于 $C(\Omega)$）$f_I(x(t)) = x(t_0)$，$\forall x \in C(\Omega)$. 从而 $x \in I_0 \Longleftrightarrow x(I_0) = 0 \Longleftrightarrow x(t_0) = 0$.

5. (i) 易知其为具主单位元满足乘法不等式的可易 (B)-代数 W. 注意 x^{-1} 存在 $\Longleftrightarrow x \notin$ 任意极大幻. 及本节定理 8. (ii) 由定理 8，$t \in (-\infty, \infty)$ 与 $\mathscr{I}(\mathfrak{U})$ 中元一一对应，记 $t \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} I_t$. 对任意 $x \in \mathfrak{U}$，注意 $x(I) = \lambda \Longleftrightarrow \lambda \in \sigma(x)$，故

$$\sigma(x) = \{x(t) \mid t \in (-\infty, \infty)\} \subset \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \rho\}.$$

从而由 $f(\lambda)$ 假设知 $\exists y \in W$，使 $y(I) = f[x(I)]$，$\forall I \in \mathscr{I}(\mathfrak{U})$. 最后由 t 与 I_t 的一一对应，即 $\forall t \in (-\infty, \infty)$，必有 $y(t) = f[x(t)]$ 在 $(-\infty, \infty)$ 是绝对收敛的 Fourier 级数.

6. 注意当 $f_0(x) = x(t_0)$ 为 $C(\Omega)$ 中有界线性乘法泛函时，必须且只须存在 $C(\Omega)$ 一极大幻 I_0，使 $f_0(x) = x(I_0)$，$\forall x \in C(\Omega)$.

7. I_0 为 D_n 中极大幻 $\Longleftrightarrow \exists t_0 \in [0,1]$，使 $I_0 = \{x \mid x(t_0) = 0, x \in D_n\}$.

8. 类似上面 7 的结果.

§ 7.6

4. 其中的推理 2，此时既可以视为 $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$，又可视为 $\mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1$. 从而直接由本节定理 1 得出结论.

参 考 文 献

[1] 关肇直,泛函分析讲义,高等教育出版社,1958.
[2] ——,拓扑空间概论,科学出版社,1958.
[3] 关肇直、田方增,赋范环论,数学进展 1(1955),107—216,223—363.
[4] 李文清,泛函分析,科学出版社,1965.
[5] ——,巴拿赫空间上有界变差函数,厦门大学学报 3,13—19(1955).
[6] 南京大学,泛函分析,人民教育出版社,1961.
[7] W. 奥尔利契,线性泛函分析,科学出版社,1963.
[8] 夏道行等,实变函数论与泛函分析概要,上海科技出版社,1963.
[9] 杨宗磐,数学分析入门,科学出版社,1958.
[10] 江泽坚、吴智泉,实变函数论,人民教育出版社,1961.
[11] 巴尔赫明科,度量空间,数学通报 **4**(1962),35—39.
[12] 林鸿庆,(1) 空间的绝对连续函数,厦门大学学报 **1**(1956),1—10.
[13] 马绍芹,在巴拿赫空间中取值的绝对连续函数,数学学报 **13**(1963),574—583.
[14] 定光桂,关于不完备空间的"共鸣定理",数学学报 **13**(1963),216—222.
[15] ——,关于一类算子族的"共鸣定理"(简报),数学学报 **20**(1977),153—156.
——(全文),南开大学学报 **3**(1977),1—20.
[16] ——,关于拟次加泛函的一些性质,数学学报 **25**(1982),410—418.
[17] ——,关于凸泛函族的"共鸣定理",数学学报 **24**(1981),851—956.
[18] Aeams, C. R. and Clarkson, J. A., The type of certain borel sets in Several Banach Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45(1939), 322—334.
[19] Alaoglu, L., Weak topologies of normed linear spaces, *Annals of Math.*, (2) **41**(1940), 252—267.
[20] Александров, П. С., Введение В общую теорию мнотеств и функций, 1948.(有中译本)
[21] Alexiewicz, A., On diffentiation of vector-valued function, *Studia Math.* **11**(1949), 185—196.
[22] Banach, S., Sur les fouctionnelles linéaries II, *Studia Math.*, **1**(1929), 223—239.
[23] ——————, Théorie des opérations linéaires. 1932.
[24] Banach, S. et Steinhaus, H., Sur le principe de la condensation de singularites, *Func. math.*, 9(1927) 50—51.
[25] Бари, Н. К. Тригонометрические ряды, 1961.
[26] Bessaga, and Peíczyński, A., On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.*, **17**(1958, 151—644.
[27] Birkhoff, G., Integration of functions with values in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38**(1935), 357—378.
[28] ——————, A note on topological group, *Composition Math.*, **3** (1936), 427—430.

[29] Bochner, S., Integration von Funktionen, deren werte die Elemente eines Vektorraumes Sind, *Fund. Math.*, **20**(1933), 262—276.
[30] Bochner, S. and Phillips, R. S., Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings. *Annals of Math.*, (2)**43**, (1942), 409—418.
[31] Bohnenblust, H. F. and Sobczyk, A., Extensions of functionals on complex linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**(1938), 91—93.
[32] Bourbaki, N., Topologie générale, 1953.
[33] ————, Espaces Vectoriels topologigues, 1955.
[34] du Bois Reymond, P., Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellung formeln, *Abh, Akad. München*, **12** (1876), 1—103.
[35] Bourgin, D. G., Some properties of Banach. Spaces, *Amer. J. Math.*, **44**(1942), 597—612.
[36] Bynum, W. L. and Drew, J. H., A weak parallelogram low for lp, *Month. the Amer. Math.* **79**(1972), 1012—1015.
[37] Clarkson, J. A., Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 396—414.
[38] Cooper, R.. The Converse of the Cauchy-Hölder inequality and the solution of the inequality $g(x+y)\leqslant g(x)+g(y)$, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **26**(1927), 415—432.
[39] Cocrant, R. and Hilbert, D., Methoden der mathematischen Physik, I, 1931. (有中译本)
[40] Day, M. M., The spaces L^p with $o<p<1$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 816—823.
[41] ————, Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**(1941), 313—317.
[42] ————. Some more uniformly convex spaces, *Bull. Amel. Math. Soc.*, **47**(1941), 504—507.
[43] ————, Strict convexity and smoothness, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78**(1955), 516—528.
[44] ————. Every L-space is isomorphic to a stricty Convex space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**(1957), 415—417.
[45] ————, On the basis problem in normed spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**(1962), 655—658.
[46] ————, Normed linear Spaces, 1962.
[47] Deutsch, F. R. and Maserick, P. H., Applications of the Hahn-Banach theorem in approximation theory, *SIAM Rev.*, **9**(1967), 516—530
[48] Duford, N., Uniformity in linear spaces, *Trans, Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 305—356.
[49] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, I, 1958
[50] Duren, P. L., Theory of H^p spaces, 1970.
[51] Eberlein W. F., Weak compactness in Banach spaces I, *Proc. Nat Acad. Sci.*, **33**(1947), 51—53.

[52] Eidelheit. M., Zur Theorie der Konvexen Megen in linearen normierten Räumen, *Studia Math.*, **6**(1936), 104—111.
[53] Enflo, P., A counterexample to the Approximation property in Banach Spaces, *Acta Math.*, **130**(1973)„ 309—317.
[54] Гаркави, А. Л., Теоремы Двойственности Для Приближений Посредством Элементов Выпуклых Множеств, *УМН*, **16** (1961), 141—145.
[55] Гельфанд, И. М., Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires, *Зап*, Матем., (4) **13**(1936), 35—40.
[56] ——————, Abstrakte Funtionen und lineare Operatoren, *Матем. сб.*, **4**(1938), 235—286.
[57] ——————, Normierte Ringe, *Матем. сб.*, **9**(1941), 3—24,
[58] Гельфанд, И. М., Райков, А. А., Шилов, Г. Е., Коммутативные Нормированные Кольиа, 1960.
[59] Goldberg, S., Linear operators and their conjugates, *Pacif. Math. J.*, **9**(1959), 69—79.
[60] Hahn, H., Über Folge linearer Oprationen, *Monatsh. f. Math. u. phis.*, **32**(1922), 3—88.
[61] ——————, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. f. Math.*, **157**(1927), 214—229.
[62] Halmos, P. R., Measure theory, 1950. (有中译本)
[63] Hanner, O., On the uniform Convexity of L^p and l^p, *Arkiv. f. Mat* **3**(1956), 239—244.
[64] Hardy, G. H., Li tlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, 1934.
[65] Hausdorff, F., Zur Theorie der linear metrishen Räume, *J. Reine Angew. Math.*, **167**(1932), 294—311.
[66] ——————, Über innere Abbildungen, *Fund. Math.*, **23**(1934), 279—291.
[67] Hildebrandt, T. H., Integration in abstract spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59**(1953), 111—139.
[68] Hille, E. and Phillips, R. S., Functional analysis and semi-groups, 1957.
[69] Hoffman, K., Banach spaces of analytic functions, 1962.
[70] Hörmander, L., On the theory of general partial differential operators. *Acta Math.*, **94**(1955), 161—248.
[71] ——————, Linear partial differential operators, 1963.(有中译本)
[72] Husain, T., The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces, 1965.
[73] Hyers, D. H, A note on linear topological spaces, *Bull. Amer. Math Soc.*, **44**(1938), 76—80.
[74] James, R. C., Bases and reflexivity of Banach spaces, *Ann. of Math.*, **52**(1950), 518—527.
[75] ——————, A non-reflexflexive Banach space isometrir with its second conjugate Space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. A.*, **37**(1951), 174—177.

[76] ————————, Reflexivity and the sup emum of linear functionals *Ann. Math.*, **66**(1957), 159—169.
[77] ————————, A. characterization of the reflexive Banach Space, *Studia Math.* (*Ser Specjalna*) *Zeszyt*, **1**(1963), 55—56; **23**(1964), 205—216.
[78] ————————, Weak compact sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113**(1964), 129—140.
[79] Jordan, P. and Neumann, J. V., On inner products in linear metric spaces, *Ann. of Math.*, **36**(1935), 719—723.
[80] Кадец, М. И., О Топологицеской Эквивалентности равномерно Выпуклых пространств, *УМН*, 10(1955), 137—141.
[81] ————————,О Слабой И Сильнсй сходимости, *Д. А. Н., С. С. С. Р.*, **121** (1958), 13—16.
[82] Кадеч. М. И., Пелциньски, А., Базисные Последовательности биортогональные системы и нормирующие множества В Пространствах Банаха и Фреше, *Studia Math.*, **25** (1965), 297—323.
[83] Kakutani, S. (角谷静夫), Some characterizations of Euclidea spaces, *Jap. math. J.*, **16**(1939), 93—97.
[84] ————————, Weak topology and regularity of Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15**(1939), 169—173.
[85] ————————, Banach 空间の regularity, 日本数物学会誌 **14**(1940), 37—51.
[86] Канторовиц, Л. В., Акилов, Г. П., Функниональный анализ в нормированных Пространствах, 1959.
[87] Karlin, S., Bases in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **15**(1948), 971—985.
[88] Kelley, J. L., General topology, 1955.
[89] Kelley, J. L. Namioka, I. and Co-Authors, Linear topological spaces, 1963.
[90] Klee, V. L. Jr., Convex sets in linear spaces, *Duke Math. J.*, **18**(1951), 443—466.
[91] ————————, A conjecture on weak compactness, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **104**(1962), 398—402.
[92] Колмогоров. А. Н., Zur Normierbarkeit eines Allgemeinen Topologischen linearen Raumes, *Studia Math.* **5**(1934), 29—33.
[93] Коровкин, П. П., Линейные операторы и теория приближений,1959. (有中译本).
[94] Крейн, М. Г., Рутман, М. А., Линейные операторы оставляющие инвариантный конус в Банаховом Пространстве, *УМН*, **1**(1948), 3—95.
[95] La Salle, J. P., Pseudo-normed linear spaces, *Duke Math. J.*, **8**(1941). 131—135.
[96] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, I (Sequence. spaces), 1977.
[97] Loomis, L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, 1953.
[98] Lovaglia, A. R., Locally uniformly Convex Banach spaces. *Trans. Amer*

Math. Soc., **78**(1955), 225—238.

[99] Lorentz, G. C., Operations in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 755—761.

[100] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы Функционального аиализа, 1965. (有中译本)

[101] Mazur, S., Über Konvexe Mengen in linearen normierten Raumen, *Studia Math.*, **4**(1933), 70—84.

[102] Mazur, S, Orlicz, W., Über Folgen linearer Operationen, *Studia Math.*, **4**(1933), 152—157.

[103] ——————, ——————, Sur les espaces métriques linéaires (I), *Studia Math.*, **10**(1948), 184—208; (II), *Studia Math.*, **13**(1953), 137—179.

[104] Mazurkiewicz, S., Sur les fonctions non dérivables, (1931), 92—94.

[105] Moore, E. H. and Smith, H. L., A general theory of limits, *Amer. Math. J.*, **44**(1922), 102—121.

[106] Murray, F., J., On Complementary manifolds and Projections in spaces Lp and lp, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41**(1937), 138—152.

[107] Musielak, J. and Orlicz, W., A generalization of certain extension theorems, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **8**(1960), 531—534.

[108] Наймарк, М. А., Линейные диференциальные операторы. 1954.

[109] Иакапон (中野秀五郎), ベーナヘ空间论, 1953. (有中译本)

[110] ——————, On an extension theorem, *Proc. Japan. Acad.*, **35**(1959), 127.

[111] Натансон, И. П., Теория функций Вещественной Переменной, 1957. (有中译本)

[112] ——————, Конструктивная Теория функций, 1949. (有中译本)

[113] Orlicz, W., Über Folgen linearen Operationen, die Von einen Parameter abbängen, *Studia math.*, **5**(1934), 160—170.

[114] Oxtoby, J. C., The category of borel class of certain subsets of Lp, *Bull. Amer, Math. Soc.*, **43**(1937), 245—248.

[115] Pełczyński, A. and Singer, I., On non equlivalent bases and Conditional bases in Banach spaces, *Studia Math.*, **25**(1965), 5—25.

[116] Pełczyński, A., On Mikusinski Theorem of bounded momenes, *Acta Acad. Sinica*, **9**(1959), 10—16.

[117] Pettis, B. J., On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44**(1938), 277—304.

[118] ——————, A note on regular Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**(1938), 420—428.

[119] ——————, A proof that every uniformly convex space is reflexive, *Duke Math. J.*, 5(1939), 249—253.

[120] Pólya, G. and Szegö, G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 1925.

[121] Polya, G.. Über die konvergenz Von Quadratus Verfahren, *Math Zeitschr*, **37**(1933), 264—286.

[122] Ptàk, V., Biorthogonal systems and reflexivity of Banach spaces, *Czechoslovak Math. J.*, 9(1959), 319—326.

[123] Rickart, C. E., General theory of Banach algebras, 1960.

[124] Riesz, F., Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, **69**(1910), 449—497.

[125] Riesz, F., Sz-Nagy, B., Lecons d'analyse fonctionnelle, 1953.

[126] Rosenbaum, R. A., Sub-additive functions, *Duke. Math. J.*, **17**(1950), 227—247.

[127] Рубинщтейн, Г. ш., Об одной экстремальной задаче в Линейном нормированном пространстве, *Сибир. Мате ж.*,**6** (1965), 711—714.

[128] Sargent, W. L. C., On some theorems of Hahn Banach and Stein haus, *J. London Math. Soc.*, 28(1953), 438—453.

[129] Saks, S., Theory of the integral, 1937.

[130] ————, On some functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1932), 549—555.

[131] Sheauder, J., Zur Theorie stetiger Abbilidungen in Funktionalräumen, *Math. Zeit.*, **26**(1927), 47—65.

[132] ————, Eint Eigenschafi des Haarschen Orthogonal-Systemes, *Math. Z.*, **28**(1928), 317—320.

[133] ————, Über die Umkehrung linearer stetiger Funktional operationem. *Studia Math.*, **2**(1930), 1—6.

[134] ————, Über lineare vollsteige Funktional operationch, *Studia Math.*, 2(1930), 183—196.

[135] Schur, I., Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen, Reihen *J. F. math.*, **151**(1921). 79—111.

[136] Singer, I., On dual du théoreme de Hahn-Banach, *C. R. acad. Scien.*, **247**, 4(1958), 408—411.

[137] ————, Quelques applications d'un dual du theoreme de Hahn-Banach, *C. R. acad. Scien.*, **247**, **12**(1958), 846—849.

[138] ————, Bases in Banach spaces I, 1970.

[139] ————, The theory of best approrimation and functional analysis, 1974.

[140] Стечкин, С. Б., Об ограниченности нелинейных функционалов, *УМН*, **17** (103),(1962). 215—222.

[141] Сухомлинов, Г. А., О Продолженении линейных функционалов В комплексноu и кватернионном линейном пространстве, *Мат. СБ.*, **3**(1938) 353--358.

[142] Taylor, A. E., The resolvent of a closed transformation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**(1938), 70—74.

[143] ————, The extension of linear functionals, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 538—547.

[144] ————, Introduction to functional analysis, 1958.

[145] Taylor, A. E. and Halberg, C. J. A.. General theorems about a linear operator and its Conjugate, *J. Reine Angew. Math.*, **198**(1957), 93—

111.
[146] Titchmarsh, E. C., Theory of functions, 1939. (有中译本)
[147] Toeplitz, O., Über allgemeine lineare Mittelbildungen, *Prace matematyezne-Fizyczne*, **22**(1911), 113—119.
[148] Valentine, F .A., Convex sets, 1964.
[149] Wiener, N and Pitt, H. R., On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms, *Duke Math. J.*, **4**(1938), 420—436.
[150] Wilansky, A., Functional analysis, 1964.
[151] Weston, J. D., A note on the extension of linear functionals, *Amer. math. monthly*, **67**(1960), 444—445.
[152] Yosida, K. (吉田耕作), Functional analysis 1965. (有中译文)
[153] Zaanen, A. C., Linear analysis, 1953.
[154] Zorn, M. A., Derivatives and Fréchet differentinals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**(1946), 133—137.
[155] Zygmud, A., Trigonometrical series, 1935.
[156] Хавинсон, С. Я,. Об аппроксиманни Элементами выпуклых множеств, *Д. А. Н., С. С. С. Р.*, **172**, (1967), 294—297.